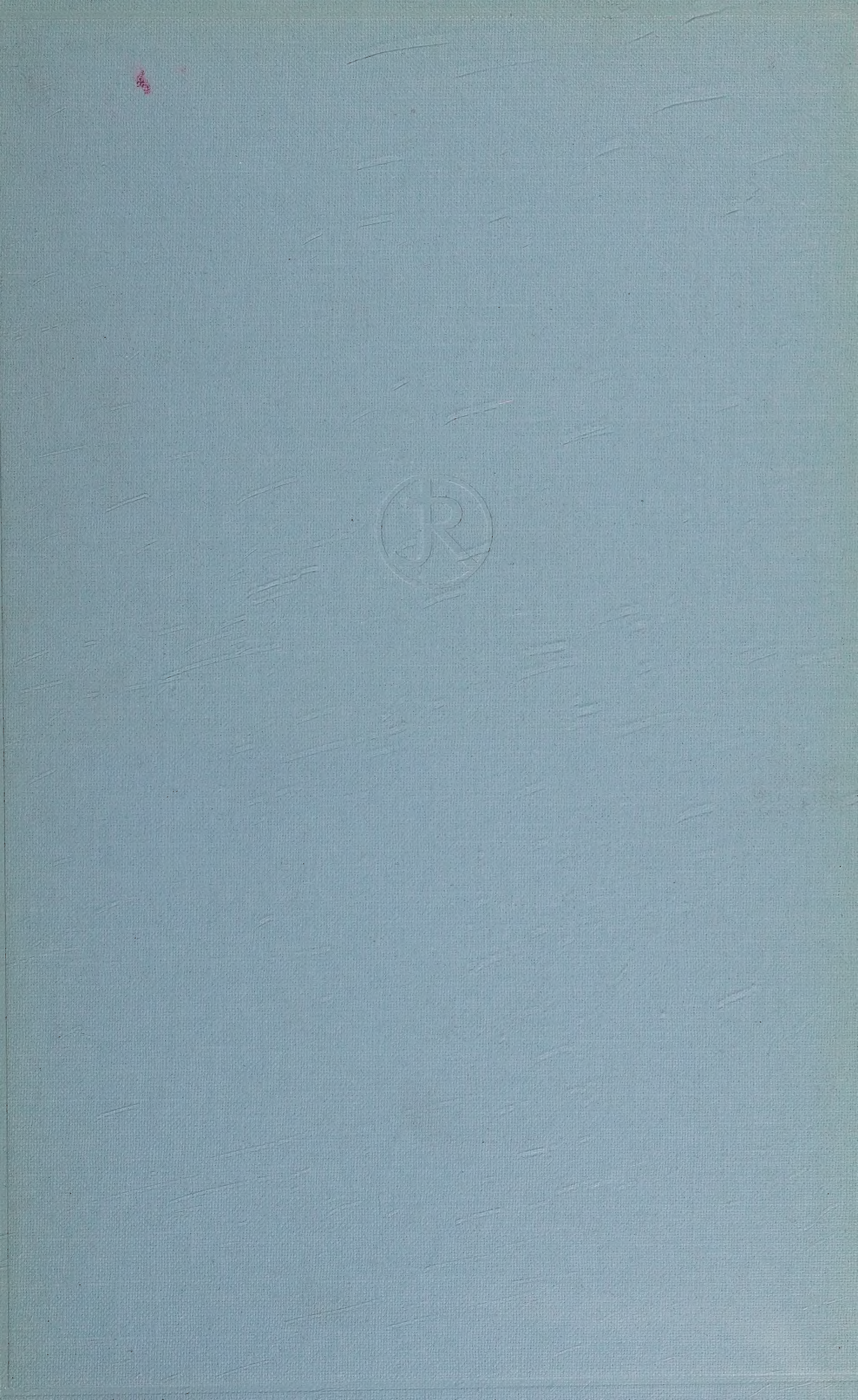




ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 10

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

Tome 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1946

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая. 10 (1946), 3—34 Série mathématique

Н. П. РОМАНОВ

ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе излагается новый аналитический метод теории чисел, основанный на рассмотрении теории гильбертова пространства.

§ 1

Во всей работе $\mu(n)$ означает известную арифметическую функцию Мёбиуса, обладающую свойством

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1; \end{cases}$$

(n, m) — общий наибольший делитель n и m, $\sum\limits_{d/n}$ означает, что суммирование распространено по всем делителям n.

Согласно известному принципу обращения Мёбиуса из соотношений $a_n = \sum\limits_{d/n} b_d$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ следует $b_n = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и наоборот. Большую роль в дальнейшем будет играть следующая

ЛЕММА 1. *Если $k < n$, $f(u)$ — любая функция, определенная для всех целых положительных u, то*

$$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f((d, k)) = 0. \tag{1}$$

Для доказательства этой леммы введем операции S, S', A, B, E, определенные на множестве Φ всех функций от целого аргумента, задав их следующим образом:

$$Sf(n) = \sum_{d/n} f(d), \quad S'f(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d), \quad Af(n) = f((n, N)),$$

$$Bf(n) = \varepsilon\left(\frac{N}{n}\right) f(n), \quad Ef(n) = f(n),$$

где $\varepsilon(u) = 1$, если u — целое число и $\varepsilon(u) = 0$ — в противном случае, и где N — заданное число.

Согласно принципу обращения Мёбиуса $SS' = S'S = E$. Кроме того,

$$SBf(n) = S\varepsilon\left(\frac{N}{n}\right) f(n) = \sum_{d/n} \varepsilon\left(\frac{N}{d}\right) f(d) = \sum_{\substack{d/n \\ d/N}} f(d) = \sum_{d/(n,N)} f(d) = ASf(n),$$

$$SB = AS, \quad B = S^{-1}AS, \quad BS^{-1} = S^{-1}A.$$

Далее,

$$S^{-1}Af(n) = S^{-1}f((n, N)) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f((d, N)) = BS^{-1}f(n) = \varepsilon\left(\frac{N}{n}\right) S^{-1}f(n).$$

Полагая $N = k < n$ и учитывая, что $\varepsilon\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, сразу получаем требуемый результат.

Лемму 1 можно доказать и иначе, установив, что $\sum\limits_{\substack{d/n \\ (d,k)=\delta}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 0$ при $k < n$ и приняв во внимание, что

$$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f((d, k)) = \sum_{\delta} f(\delta) \sum_{\substack{d/n \\ (d,k)=\delta}} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Смысл леммы 1 состоит в том, что в сумме $\sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$, при $k < n$, отдельные подсуммы, соответствующие условиям $(d, k) = \delta$, равны нулю.

§ 2

Рассмотрим абстрактно заданное гильбертово пространство H в аксиоматической форме Стона-Неймана (¹).

Последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$ элементов H назовем обладающей D-свойством, точнее, D_g-свойством, если $(f_n, f_m) = g((n, m))$, где $g(n)$ — данная функция целого положительного аргумента.

Если последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *обладает* D-*свойством, то последовательность* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, *где* $\gamma_n = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, *ортогональна.*

В самом деле, если $k < n$,

$$(\gamma_n, f_k) = \left(\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, f_k\right) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)(f_d, f_k) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g((d, k)) = 0,$$

как это следует из леммы 1, и $(\gamma_n, \gamma_m) = 0$ при $m < n$, так как γ_m — линейная комбинация из $f_k (k \leqslant m < n)$. Точно так же и $(\gamma_n, \gamma_m) = \overline{(\gamma_n, \gamma_m)} = 0$ при $m > n$.

Далее,

$$(\gamma_n, \gamma_n) = \left(\gamma_n, \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d\right) = (\gamma_n, f_n) = \left(\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, f_n\right) =$$

$$= \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)(f_d, f_n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g((d, n)) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Отсюда видно, что $g(u)$ не может быть совсем произвольной, так как $\sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = (\gamma_n, \gamma_n) \geqslant 0$. Условие $\sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, таким образом, необходимо для существования последовательности

$f_1, f_2, f_3, \ldots$, обладающей D_g-свойством, но оно и достаточно, так как если $G(n)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)\geqslant 0$, то последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$, где $f_n=\sum_{d/n}\sqrt{G(d)}\,\alpha_d$, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — любая ортонормированная последовательность H, обладает D_g-свойством.

В самом деле,

$$(f_n, f_m)=\left(\sum_{d/n}\sqrt{G(d)}\,\alpha_d, \sum_{\delta/m}\sqrt{G(\delta)}\,\alpha_\delta\right)=\sum_{d/(n,m)} G(d)=g((n, m)).$$

Здесь $G(n)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$ по определению $G(n)$, а $g(n)=\sum_{d/n}G(d)$ следует отсюда по принципу обращения Мёбиуса.

Таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовала последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$, обладающая D_g-свойством, состоит в сильной неотрицательности $g(n)$, т. е. в том, что $g(n)$ получается путем суммирования некоторой неотрицательной функции $G(n)$ по делителям.

Если

$$G(n)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)>0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

то последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ можно нормировать и мы получаем ортонормированную последовательность $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$, где

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{G(n)}}\gamma_n$$

или

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{G(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f_d. \tag{2}$$

Отсюда по принципу обращения Мёбиуса следует

$$f_n=\sum_{d/n}\sqrt{G(d)}\,\psi_d. \tag{3}$$

Таким образом, если последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$ обладает D_g-свойством, то $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$, где ψ_n задано любой из двух эквивалентных формул (2) или (3) и $G(n)=\sum_{d/n}g(d)$, есть ортонормированная последовательность. Если $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ задана, как произвольная ортонормированная последовательность H, и $G(n)$ — как произвольная неотрицательная функция целого аргумента, то $f_1, f_2, f_3, \ldots$, где f_n определено формулой (3), обладает D_g-свойством со значением $g(n)=\sum_{d/n}G(d)$. В самом деле, тогда, как было указано выше,

$$(f_n, f_m)=\left(\sum_{d/n}\sqrt{G(d)}\,\psi_d, \quad \sum_{\delta/m}\sqrt{G(\delta)}\,\psi_\delta\right)=\sum_{d/(n,m)} G(d)=g((n, m)).$$

Таким образом,

ТЕОРЕМА 1. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы в H существовала последовательность, обладающая D_g-свойством, состоит в том, что $g(n)$ удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если элементы двух последовательностей $f_1, f_2, f_3, \ldots$ и $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ гильбертова пространства связаны соотношениями*

$$f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\, \psi_d \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $G(n)$ — любая положительная функция целого аргумента, то $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ ортонормирована тогда и только тогда, когда $f_1, f_2, f_3, \ldots$ обладает D_g-свойством со значением $g(n) = \sum\limits_{d/n} G(d)$.

Интересно, что для последовательностей, обладающих D-свойством, процесс ортогонализации по Шмидту (E. Schmidt) совпадает с процессом обращения по Мёбиусу, т. е. происходит совпадение одного из важнейших процессов анализа с одним из важнейших процессов теории чисел. Это обстоятельство связано с тем, что в любом определителе $|a_{ik}|$, в котором элементы зависят только от общего наибольшего делителя индексов $a_{ik} = g((i, k))$, адъюнкты элементов последнего столбца $A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \ldots, A_{nn}$ пропорциональны числам $\mu\left(\frac{n}{1}\right)$, $\mu\left(\frac{n}{2}\right), \ldots$, $\mu\left(\frac{n}{n}\right)$; при u нецелом мы полагаем $\mu(u)$ равным нулю.

Возникает вопрос: каковы должны быть $f_1, f_2, f_3, \ldots$, чтобы $\gamma_n = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ образовали ортогональную последовательность? Предполагая $f_1, f_2, f_3, \ldots$ линейно независимыми, находим, что $(\gamma_n, \gamma_n) = G(n) > 0$, $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ ортонормированы, а $f_n = \sum\limits_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d$, как мы видели выше, образуют последовательность, обладающую D-свойством. Таким образом, возможность ортогонализации путем инверсии Мёбиуса есть характерное свойство последовательностей, обладающих D-свойством, что в свою очередь связано с тем, что симметрическая функция $g(i, k)$ зависит только от общего наибольшего делителя своих аргументов, $g(i, k) = g((i, k))$, тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d, k) = 0$ при всех $n > 1$ и для всякого $k < n$.

Таким образом, лемма 1 допускает обращение.

Особое значение приобретает указанная в теореме 2 взаимосвязь между D-свойством и ортонормированностью благодаря возможности построения последовательностей из H, обладающих D-свойством, — построения, основанного на других соображениях, чем те, которые были указаны выше, и базирующихся на простом арифметическом принципе наложения двух арифметических прогрессий. Это построение дано следующей теоремой 3.

ТЕОРЕМА 3. *Если дана комплексно-значная функция* $\omega(n)$, *обладающая свойством* $\omega(a)\,\omega(b)=\omega(ab)$, и $\sum_{k=1}^{\infty}|\omega(k)|^2<\infty$, *и ортонормированная последовательность* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *элементов* H, *то* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ $\left(f_n=\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)\,\alpha_{kn}\right)$ *обладает* D_g-*свойством, причем*

$$g(n)=\frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}, \quad \sigma=\sum_{k=1}^{\infty}|\omega(k)|^2.$$

В самом деле,

$$(f_n, f_m)=\left(\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)\,\alpha_{kn}, \ \overline{\omega(m)}^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}\omega(l)\,\alpha_{lm}\right)=$$

$$=\left(\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{k\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)}\omega\left(\frac{k}{n}\right)\alpha_k, \quad \overline{\omega(m)}^{-1}\sum_{l\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)}\omega\left(\frac{l}{m}\right)\alpha_l\right)=$$

$$=\overline{\omega(n)}^{-1}\,\overline{\omega(m)}^{-1}\sum_{k\equiv 0(\mathrm{mod}[n,m])}\omega\left(\frac{k}{n}\right)\overline{\omega}\left(\frac{k}{m}\right)=$$

$$=|\omega(n)|^{-2}|\omega(m)|^{-2}\sum_{k\equiv 0(\mathrm{mod}[n,m])}|\omega(k)|^2=$$

$$=\sigma|\omega(n)|^{-2}\,|\omega(m)|^{-2}\,|\omega([n,m])|^2=\frac{\sigma}{|\omega((n,m))|^2}.$$

Объединяя теоремы 2 и 3, получаем теорему 4.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — *ортонорирмованная последовательность* H, $\omega(n)\neq 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $\omega(ab)=\omega(a)\,\omega(b)$, $\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}|\omega(k)|^2<\infty$, *то*

$$\psi_n=(\sigma\Omega(n))^{-\frac{1}{2}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\overline{\omega(d)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)\,\alpha_{kd} \tag{4}$$

образуют ортонормированную последовательность H, *где*

$$\Omega(n)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)|\omega(d)|^{-2}=|\omega(n)|^{-2}\prod_{p/n}(1-|\omega(p)|^2).$$

Для дальнейшего важна следующая

ТЕОРЕМА 5. *Если* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — *ортонормированная система, полная для подпространства* H' *пространства* H, *то* $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$, *где* ψ_n *определены формулами* (4), *также образуют полную систему* H'.

Очевидно, что ψ_n принадлежат H'. Поэтому подпространство H'', порожденное $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$, входит в H'. Нужно показать, что оно совпадает с H'. Для этого достаточно показать, что $\alpha_n \in H''$. Вхождение

α_n в H'' характеризуется наличием равенства Парсеваля: $(\alpha_n, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha_n, \psi_k)|^2$.

Проверим равенство

$$(\alpha_1, \alpha_1) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha_1, \psi_k)|^2.$$

Очевидно, что

$$(\alpha_1, \psi_k) = \frac{\mu(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(k)}}.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha_1, \psi_k)|^2 = \sigma^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{\Omega(k)} = \sigma^{-1} \prod_p \left(1 + \frac{1}{\Omega(p)}\right) =$$

$$= \sigma^{-1} \prod_p (1 - |\omega(p)|^2)^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1.$$

Здесь двукратно использован известный в теории чисел прием преобразования бесконечных рядов, распространенных на все целые числа, в бесконечные произведения, распространенные на все простые числа, и очевидное свойство $\Omega(n)$: $\Omega(a)\Omega(b) = \Omega(ab)$, если $(a, b) = 1$ [(2), стр. 25].

Таким образом, α_1 аппроксимируемо при помощи линейных комбинаций из ψ_n, а следовательно, при помощи линейных комбинаций из f_n, так как $\psi_n = (G(n))^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $N, c_1, c_2, \ldots, c_N$, так что $\| \alpha_1 - c_1 f_1 - c_2 f_2 - \ldots - c_N f_N \| < \varepsilon$.

Введем в H' линейные операторы $L_1, L_2, L_3, \ldots$, где L_n превращает $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k$ в $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_{kn}$. Очевидно, что все операторы L_n изометричны, т. е. $\| L_n\beta \| = \| \beta \|$.

Далее очевидно, что

$$L_n\left(\alpha_1 - \sum_{k=1}^{N} c_k f_k\right) = \alpha_n - \sum_{k=1}^{Nn} c'_k f_k.$$

Поэтому

$$\left\| \alpha_n - \sum_{k=1}^{Nn} c'_k f_k \right\| < \varepsilon.$$

Но все f_k выражаются через ψ по формулам (3) и поэтому

$$\left\| \alpha_n - \sum_{k=1}^{Nn} c''_k \psi_k \right\| < \varepsilon.$$

Таким образом, α_n аппроксимируемо полиномами вида $\sum c_k \psi_k$ и поэтому входит в H''. Все α_n входят в H'', а следовательно, $H'' = H'$.

Прямая проверка равенства $1=(\alpha_n, \alpha_n)=\sum_{k=1}^{\infty}|(\alpha_n, \psi_k)|^2$ при любом n приводят к большим сложностям арифметического характера. В качестве $\omega(k)$ проще всего взять $\omega(k)=k^{-s}$, где $\operatorname{Re}(s)>\frac{1}{2}$. Мы видим, что процесс образования сумм $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{kn}}{k^s}$, в котором, казалось бы, нет ничего арифметического, вызывает появление арифметики в виде D-свойства, а ортонормирование образующейся последовательности усугубляет арифметику, вызывая появление функции Мёбиуса*.

Бесконечная матрица

$$\|c_{ik}\|, \quad \text{где} \quad c_{ik}=(\psi_i, \alpha_k)=\frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}}\sum_{d/(i,k)}\mu\left(\frac{i}{d}\right)|\omega(d)|^{-2},$$

осуществляющая переход от одной полной ортонормированной системы пространства H' к другой, очевидно, унитарна.

Таким образом, в гильбертовом пространстве мы обнаруживаем бесчисленное множество арифметических вращений.

Можно указать варианты указанного выше метода построения ортонормированных систем. Если f_n определены для всех значений индекса n, взаимно простых с данными N, и если $(f_n, f_m)=g((n, m))$, то

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{G(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f_d, \quad \text{где} \quad G(n)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d) \quad (n, N)=1,$$

образуют ортонормированную последовательность. Далее, если α_n (n пробегают все значения $1, 2, 3, \ldots$) образуют ортонормированную последовательность H и $\omega(n)$ обладает указанными ранее свойствами, то $f_n=\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{(k,N)=1}\omega(k)\alpha_{kn}$ обладают свойством $(f_n, f_m)=g((n, m))$ при $(n, N)=1$, $(m, N)=1$, где $g(n)=\frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}$, $\sigma=\sum_{(k,N)=1}|\omega(k)|^2$. Здесь все индексы взаимно просты с N.

Положим $f_n=f_n^{(1)}$ и определим $f_n^{(q)}$ по формуле

$$f_n^{(q)}=\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}\omega(k)\alpha_{knq},$$

где $(n, N)=1$, q — любое число, все простые делители которого входят в N. Очевидно, $(f_n^{(q)}, f_m^{(q)})=g((n, m))$, где, как и выше,

$$g(n)=\frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}, \quad \sigma=\sum_{(k,N)=1}|\omega(k)|^2.$$

* Конечно, известно, что общий принцип обращения рядов позволяет выразить a_n через b_n, если $b_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kn}$, но развитый здесь метод дает возможность указать, кроме этого известного «векторного» обращения, также скалярное обращение.

Полагая

$$\psi_n^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma \Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^{(q)}, \quad \Omega(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) |\omega(d)|^{-2} =$$

$$= |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2),$$

получим ортонормированную систему $\psi_n^{(q)}$, где верхний индекс пробегает все числа, не содержащие простых делителей, отличных от тех, которые входят в N, а нижний индекс пробегает все числа, взаимно простые с N.

Теорема о полноте может быть доказана совершенно аналогично предыдущему и поэтому ясно, что $\psi_n^{(q)}$ при данном q и переменном n образуют систему, порождающую то же пространство, что и α_{nq} $(n, N) = 1$ *.

Другой вариант получим, определяя f_n по формуле

$$f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k) \alpha_{k^2 n^2}.$$

Тогда $(f_n, f_m) = g((n, m))$, где $g(n) = \frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}$, $\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2$. Полагая $f_n^{(Q)} = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k) \alpha_{k^2 n^2 Q}$, где Q — любое бесквадратное число, т. е. такое, что $\mu(Q) \neq 0$, также имеем $(f_n^{(Q)}, f_m^{(Q)}) = g((n, m))$, где $g(u) = \frac{\sigma}{|\omega(u)|^2}$, $\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2$. Очевидно, далее, что $(f_n^{(Q_1)}, f_m^{(Q_2)}) = 0$, если $Q_1 \neq Q_2$. Полагая $\psi_n^{(Q)} = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^{(Q)}$, где n — любое целое, Q — любое бесквадратное число, легко убеждаемся в том, что $\psi_n^{(Q)}$ образуют ортонормированную систему. Можно также показать, что $\psi_n^{(Q)}$ полна на подпространстве, порожденном $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

В первом из рассмотренных вариантов условия $\omega(n) \neq 0$ могут и не соблюдаться при $(n, N) > 1$, так как рассматриваются только значения $\omega(n)$ при $(n, N) = 1$. В частности, можно положить $\omega(n) = \frac{\chi(n)}{n^z}$, где $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$, $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N. Тогда

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\chi(n)|}{n^{2s}}, \quad s = \mathrm{Re}(z)$$

и

$$\Omega(n) = n^{2s} \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \varphi_{2s}(n), \quad f_n^{(q)} = \chi(n) \overline{n^z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^z} \alpha_{knq},$$

---

* Этот способ построения ортонормированных систем будем называть в дальнейшем первым вариантом.

$$\psi_n^{(q)}=\frac{n^s}{\varphi_{2s}(n)\sqrt{\zeta(2s)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f_d^{(q)}\quad (s=\mathrm{Re}(z)), \tag{5}$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, q — все числа, не содержащие простых чисел, не входящих в N, — образуют ортонормированную систему, эквивалентную с $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

По поводу первого варианта можно сделать еще следующее замечание. Обычно нам удается в конкретных случаях просуммировать (т. е. представить в сжатой аналитической форме) непосредственно не $f_n=\sum\limits_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}\omega(k)\,\alpha_{kn}$, а $f'=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega(k)\,\alpha_k$. Но легко видеть, что

$$f_1=\sum_{d/n}\mu(d)\,\omega(d)\,L_d f'$$

и потому

$$f_n^{(q)}=\overline{\omega(n)}^{-1}L_{nq}f_1=\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{d/N}\mu(d)\,\omega(d)\,L_{nqd}f'. \tag{6}$$

Когда H конкретизировано, как $L_2(0, 1)$, и в качестве $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ взяты $\alpha_n(x)=\sqrt{2}\sin 2\pi nx$, операция L_n означает замену $f(x)$ на $f(nx)$. Теорема 4 показывает, что мы можем, имея одну ортонормированную последовательность, построить бесчисленное множество ортонормированных последовательностей, пользуясь произвольной мультипликативной нигде не равной нулю функцией с сходящейся суммой квадратов модулей всех ее частных значений.

Самый переход от старой системы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ к новой $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ совершается при помощи унитарного преобразования с матрицей $\|c_{ik}\|$, где

$$c_{ik}=(\psi_i, \alpha_k)=\frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}}\sum_{d/(i,k)}\mu\left(\frac{i}{d}\right)|\,\omega(d)\,|^{-2},$$

унитарность которого видна только на основе теоретико-числовых соображений.

Само собой разумеется, новым здесь оказывается не тот давно известный факт, что переход от одной ортонормированной системы гильбертова пространства к другой будет унитарным преобразованием, связанным с унитарной матрицей, а совершенно не очевидный a priori факт существования в гильбертовом пространстве бесчисленного множества арифметически охарактеризованных вращений. Этот факт порождает так много арифметических соотношений между элементами гильбертова пространства, что можно говорить об арифметике гильбертова пространства. Уже перенумерация последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ в теореме 4 порождает новые примеры в конкретных функциональных случаях. Сопоставляя формулы

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f_d,\quad \psi_i=\sum_{i=1}^{\infty}c_{ik}\alpha_k,\quad f_n=\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)\,\alpha_{kn}$$

и учитывая невырожденность унитарной матрицы $\| c_{ik} \|$, мы видим, что если последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ пробегает * все ортонормированные последовательности H, $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ также пробегают все ортонормированные последовательности H, то $f_1, f_2, f_3, \ldots$, согласно теореме 2, дают все последовательности H, обладающие D_g-свойством со значением $g(n) = \frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}$. Таким образом, если для любой $g(n)$, для которой $G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ можно указать общий способ получения всех последовательностей, обладающих D_g-свойством, состоящим в том, что в формулу $f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\, \psi_d$ в качестве $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ подставляются всевозможные ортонормированные последовательности H, для частного случая $g(n) = |\omega(n)|^{-2}$ можно указать дополнительно еще также всеобщий (т. е. охватывающий все последовательности с D_g-свойством) способ, состоящий в том, что в формулах $f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\, \alpha_{kn}$, в качестве $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ берутся всевозможные ортонормированные последовательности H. Второй способ относится к случаю $g(n)$, удовлетворяющих условиям

$$g(ab) = g(a)\, g(b), \quad g(n) > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty.$$

Для случая $g(n)$, не удовлетворяющей этим условиям, не удалось найти способ построения, кроме общего метода, данного теоремой 2.

Очевидно, что существование двух различных методов построения систем, обладающих D_g-свойством, позволяет построить новые ортонормированные системы из любой заданной.

Теперь мы видим, что теорема 3 имеет обратную теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Если последовательность* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *обладает* D_g-*свойством, причем*

$$g(n) > 0, \quad g(ab) = g(a)\, g(b), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty,$$

то существует ортонормированная последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, *такая что*

$$f_n = \frac{\overline{\omega(n)}^{-1}}{\sqrt{\sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\, \alpha_{kn},$$

где

$$\omega(n) = g(n)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1}.$$

---

* $\omega(n)$ и, следовательно, c_{ik} предполагаются фиксированными.

Самая же последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *может быть найдена следующим образом: находим* ψ_n *по формуле*

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d,$$

затем α *по формулам*

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_n, \psi_k)\,\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}\psi_k, \quad c_{kn} = \frac{\omega(n)}{\sqrt{\sigma\Omega(k)}} \sum_{d/(n,k)} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \omega(d)^{-2},$$

$$\Omega(n) = \omega(n)^{-2} \prod_{p/n} (1 - \omega(p)^2).$$

В силу известного факта выражение $\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k\psi_k \|$ принимает наименьшее значение при $a_k = (f, \psi_k)$. В частности, $\| \alpha_1 - \sum_{k=1}^{N} a_k\psi_k \|$ принимает наименьшее значение при $a_k = \frac{\mu(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(k)}}$. Но $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ и, следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Наименьшее значение* $\| \alpha_1 - \sum_{k=1}^{N} b_k f_k \|$ *достигается при*

$$b_k = c_k^N = \sum_{l=1}^{\left[\frac{N}{k}\right]} \frac{\mu(lk)\,\mu(l)}{\sigma\Omega(lk)} = \frac{\mu(k)}{\sigma\Omega(k)} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^{\left[\frac{N}{k}\right]} \frac{\mu(l)^2}{\Omega(l)}.$$

Скалярное произведение любых двух элементов f, g

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\alpha_k, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k\alpha_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$$

пространства H', порожденного данной ортонормированной системой $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, может быть дано в двух различных формах:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \quad (f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n)\overline{(g, \psi_n)},$$

где

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, \quad f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\,\alpha_{kn},$$

$$\Omega(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) |\omega(d)|^{-2} = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2$$

и где $\omega(n) \neq 0$ — любая мультипликативная функция, для которой $\sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2 < \infty$.

$$(f, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)(f, f_d) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \omega(d)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\omega(k)}\, a_{kd}$$

и аналогично

$$(g, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \omega(d)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\omega(k)}\, \overline{b}_{kd}.$$

Из сопоставления этих двух форм получим тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sigma^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega(n)^{-1} \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \omega(d)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\omega(k)}\, a_{kd} \right\} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \overline{\omega(d)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\, b_{kd} \right\}, \qquad (7)$$

где a_k и b_k — любые последовательности с сходящейся суммой квадратов модулей, $\omega(n) \neq 0$ — любая функция, для которой

$$\omega(ab) = \omega(a)\,\omega(b), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2 < \infty$$

и где

$$\Omega(n) = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2).$$

Полагая

$$\omega(n) = n^{-z}, \quad s = \mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}, \quad \Omega(n) = \varphi_{2s}(n) = n^{2s} \prod_{p/n} (1 - p^{-2s}),$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right|^2 = \zeta(2s),$$

получим, в частности,

$$\zeta(2s) \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2s}(n)^{-1} \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^z \sum_{k=1}^{\infty} \overline{k}^{-z} a_{kd} \right\} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \overline{d} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} b_{kd} \right\}. \qquad (8)$$

Очевидно, что тождество (7) выражает факт инвариантности скалярного произведения двух произвольных элементов пространства H' при вращении H', реализуемого матрицей $\|(\psi_i, \alpha_k)\| = \|c_{ik}\|$, где

$$c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) |\omega(d)|^{-2},$$

и тождество (7) представляет другое выражение факта унитарности матрицы $\|c_{ik}\|$, — факт, который столь же трудно доказуем из каких-либо иных выражений, отличных от приведенных выше.

Подставляя в (8) $z = \frac{s}{2}$ $(s > 1)$, находим

$$\zeta(s)\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_s(n)^{-1}\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^{\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\frac{s}{2}}a_{kd}\right\}\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^{\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\frac{s}{2}}b_{kd}\right\}. \quad (9)$$

Пользуясь первым вариантом и вводя в пространстве h, порожденном всеми теми α_n, у которых $(n, N)=1$, эквивалентную систему $\psi_n^{(1)}$, рассматривая также скалярное произведение любых f, g из h

$$f=\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} a_k\alpha_k,\quad g=\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}\bar{b}_k\alpha_k,$$

получаем следующее тождество:

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} a_k b_k=\sigma^{-1}\sum_{\substack{n=1\\(n,N)=1}}^{\infty}\Omega(n)^{-1}\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\omega(d)^{-1}\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}\omega(k)a_{kd}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\overline{\omega(d)}^{-1}\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}\omega(k)b_{kd}\right\}, \quad (10)$$

где $\omega(n)$ — любая мультипликативная функция, определенная для всех n, взаимно простых с данным N,

$$\sigma=\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}|\omega(k)|^2<\infty,\quad \omega(n)\neq 0 \text{ при } (n,N)=1,$$

$$\Omega(n)=|\omega(n)|^{-2}\prod_{p/n}(1-|\omega(p)|^2).$$

Полагая $\omega(n)=\chi(n)n^{-z}$, $\mathrm{Re}(z)=s>\frac{1}{2}$, где $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N, получим

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} a_k b_k=$$

$$=\prod_{p/N}(1-p^{-2s})^{-1}\zeta(2s)^{-1}\sum_{\substack{n=1\\(n,N)=1}}^{\infty}\varphi_{2s}(n)^{-1}\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\chi(d)d^{z}\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\chi}(k)k^{-z}a_{kd}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\chi(d)d^{z}\sum_{k=1}^{\infty}\chi(k)k^{-z}b_{kd}\right\}. \quad (11)$$

Конкретизируя a_k и b_k различными способами, получим из (7), (8), (9), (10), (11) разнообразные конкретные тождества.

§ 3

Легко указать способ построения биортогональных систем, основанный на следующих замечаниях.

Если две последовательности $f_1, f_2, f_3, \ldots$ и $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots$ таковы, что $(f_n, f'_m) = g((m, n))$, то мы будем говорить, что они обладают **относительным D_g-свойством**. В этом случае

$$\gamma_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d \quad \text{и} \quad \gamma'_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f'_d,$$

очевидно, биортогональны, т. е. $(\gamma_n, \gamma'_m) = 0$, если $n \neq m$.

Очевидно,

$$(\gamma_n, \gamma'_n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = G(n).$$

Если $G(n) \neq 0$, то $\psi_n = G(n)^{-\frac{1}{2}} \gamma_n$, $\psi'_n = \overline{G(n)}^{-\frac{1}{2}} \gamma'_n$ удовлетворяют условиям

$$(\psi_n, \psi'_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Если дана ортонормированная последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ и две мультипликативные функции $\omega_1(n)$, $\omega_2(n)$ с сходящейся суммой квадратов модулей, нигде не обращающиеся в нуль, то

$$f'_n = \overline{\omega_2(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1(k) \alpha_{kn}, \qquad f_n = \overline{\omega_1(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_2(k) \alpha_{kn}$$

образуют последовательности, обладающие относительным D_g-свойством со значением

$$g(u) = \frac{\sigma}{\omega_1 \overline{\omega}_2(u)}, \quad \omega_1 \overline{\omega}_2(n) = \omega_1(n) \overline{\omega_2(n)}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1 \overline{\omega}_2(k).$$

В самом деле,

$$(f_n, f'_m) = \left(\overline{\omega_2(n)}^{-1} \sum_{k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n)} \omega_1\left(\frac{k}{n}\right) \alpha_k, \quad \overline{\omega_1(m)}^{-1} \sum_{k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m)} \omega_2\left(\frac{k}{m}\right) \alpha_k\right) =$$

$$= \overline{\omega_2(n)}^{-1} \omega_1(m)^{-1} \sum_{k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, [m,n])} \omega_1\left(\frac{k}{n}\right) \overline{\omega}_2\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{\sigma}{\omega_1 \overline{\omega}_2((m, n))}.$$

Отсюда получаем:

ТЕОРЕМА 8. *Если*

$$\omega_1(n) \neq 0, \quad \omega_2(n) \neq 0, \quad \omega_1(ab) = \omega_1(a)\,\omega_1(b), \quad \omega_2(ab) = \omega_2(a)\,\omega_2(b),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_1(k)|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_2(k)|^2 < \infty, \quad g(n) = \frac{\sigma}{\omega_1(n)\,\overline{\omega_2(n)}}, \quad \sigma = \sum \omega_1(k) \overline{\omega_2(k)},$$

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \neq 0$$

и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — любая ортонормированная последовательность H, то

$$\psi_n = G(n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, \quad \psi'_n = \overline{G(n)}^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f'_d,$$

где

$$f_n = \overline{\omega_2(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1(k)\,\alpha_{kn}, \quad f'_n = \overline{\omega_1(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_2(k)\,\alpha_{kn},$$

образуют биортогональную пару последовательностей, т. е.

$$(\psi_n, \psi'_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Если дана некоторая последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$, обладающая D_g-свойством, где $g(n)$ такова, что

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то, согласно теореме 2,

$$f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\,\psi_d,$$

где $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ некоторая однозначно определенная ортонормированная последовательность.

Введем теперь последовательность $f_1^*, f_2^*, f_3^*, \ldots$, где f_n^* определено формулой

$$f_n^* = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{\sqrt{G(d)}}\,\psi_d.$$

Тогда

$$(f_n, f_m^*) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } (n, m) = 1, \\ 0, \text{ если } (n, m) > 1. \end{array} \right\} \tag{12}$$

В самом деле,

$$(f_n, f_m^*) = \left(\sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\,\psi_d, \sum_{\delta/m} \frac{\mu(\delta)}{\sqrt{G(\delta)}}\,\psi_\delta \right) =$$

$$= \sum_{d/(n,m)} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n, m) = 1, \\ 0, & \text{если } (n, m) > 1. \end{cases}$$

Последовательность f_n^* можно использовать для получения различных арифметических тождеств, которые найдем, помножая на f_m^* обе части равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\,|\omega(n)|^2 f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log n\,\omega(n)\,\alpha_n \quad \left(f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\,\alpha_{kn} \right), \tag{13}$$

которое легко обосновать, если мультипликативная $\omega(n)$ такова, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)| < \infty$.

Для

$$f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\,\alpha_{kn} = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\,\psi_d,$$

где α_n, ψ_n, $\omega(n)$, $G(n)$ взяты, как и в теореме 4, можно указать после-

довательность $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \ldots$, биортогональную к $f_1, f_2, f_3, \ldots$, положив

$$\hat{f}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\sqrt{G(kn)}} \psi_{kn}.$$

Очевидно

$$(f_n, \hat{f}_m) = \sum_{\substack{d/n \\ d\equiv 0 \pmod m}} \mu\left(\frac{d}{m}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Пользуясь формулой $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, можно выразить $\hat{f}_n$ через f_k следующим образом:

$$\hat{f}_n = \sum_{k\equiv 0 \pmod n} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{G(k)}} \psi_k = \sum_{k\equiv 0 \pmod n} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)}{G(k)} \sum_{d/k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) f_d =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k\equiv 0 \pmod{[n,\, m]}} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{m}\right)}{G(k)} f_m,$$

$$\hat{f}_n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,\, m} f_m, \tag{14}$$

где

$$c_{n,\, m} = \sum_{k\equiv 0 \pmod{[n,\, m]}} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)\mu\left(\frac{k}{m}\right)}{G(k)} = \sigma^{-1} \sum_{k\equiv 0 \pmod{[n,\, m]}} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)\mu\left(\frac{k}{m}\right)}{\Omega(k)} =$$

$$= \sigma^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{[n,\, m]}{n} k\right)\mu\left(\frac{[n,\, m]}{m} k\right)}{\Omega(k[n,\, m])} = \sigma^{-1}\mu(m')\mu(n') \sum_{\substack{k=1 \\ (k,\, n'm')=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{\Omega(k[n,\, m])},$$

причем

$$m' = \frac{m}{(n,\, m)} = \frac{[n,\, m]}{n}, \quad n' = \frac{n}{(n,\, m)} = \frac{[n,\, m]}{m}.$$

Обозначив через b произведение всех степеней простых чисел, входящих в n и m с одинаковым показателем степени и взятых в b с этим показателем, имеем $[n, m] = ab$, где a — произведение всех степеней простых чисел, входящих в n и m с разными показателями, и которые, естественно, войдут в $[n, m]$ с наибольшими из этих разных показателей. Очевидно, что $(a, b) = 1$, $(b, n'm') = 1$ и $(k, n'm') = 1$ эквивалентно $(k, a) = 1$. Поэтому

$$c_{n,\, m} = \sigma^{-1}\mu(n')\mu(m') \sum_{\substack{k=1 \\ (k,\, a)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{\Omega(kab)}.$$

Представляя k в форме $k'c$, $(k', b) = 1$ (c может содержать только те простые числа, которые входят в b), получаем

$$c_{n,m} = \sigma^{-1}\mu(n')\mu(m') \sum_{\substack{k'=1 \\ (k', ab)=1}} \frac{(k'c)^2}{\Omega(k'abc)};$$

здесь c пробегает все числа, могущие содержать только те простые делители, которые входят в b. Очевидно, $(a, bc) = 1$, $(k', abc) = 1$, так как b и bc имеют одни и те же простые делители. Функции $\mu(n)$ и $\Omega(n) = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2)$ обладают свойством узкой мультипликативности:

$$\mu(uv) = \mu(u)\mu(v), \ \Omega(uv) = \Omega(u)\Omega(v), \text{ если } (u, v) = 1.$$

Поэтому

$$c_{n,m} = \sigma^{-1}\mu(n')\mu(m')\Omega(a)^{-1} \sum_{d/b} \frac{\mu(d)^2}{\Omega(bd)} \sum_{\substack{k=1 \\ (k, ab)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{\Omega(k)} =$$

$$= \mu(n')\mu(m')\Omega(ab)^{-1} \prod_{p/b} (1 + |\omega(p)|^2) \prod_{p/(a,b)} (1 - |\omega(p)|^2) =$$

$$= \mu\left(\frac{n}{(n, m)}\right)\mu\left(\frac{m}{(n, m)}\right)\omega([n, m])^2 \prod_{p/b_{n,m}} (1 + |\omega(p)|^2).$$

В случае $\omega(n) = n^{-z}$, $s = \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$,

$$c_{n,m} = \mu\left(\frac{n}{(n, m)}\right)\mu\left(\frac{m}{(n, m)}\right)|\omega([n, m])|^2 \prod_{p/b_{n,m}} (1 + |\omega(p)|^2), \tag{15}$$

где $b_{n,m}$ — произведение всех тех простых чисел, которые входят в m и n в одинаковой степени.

Умножая $\hat{f}_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} f_k$ на f_m и учитывая, что

$$(f_m, f_k) = g((m, k)) = \frac{\sigma}{|\omega((m, k))|^2} = \zeta(2s)(m, k)^{2s},$$

имеем

$$(\hat{f}_n, f_m) = \zeta(2s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{n}{(n, k)}\right)\mu\left(\frac{k}{(n, k)}\right)}{[n, k]^{2s}} \prod_{p/b_{n,k}} (1 + p^{-2s})(k, m)^{2s}$$

или, при замене $2s$ на s,

$$\delta_m^n \zeta(s)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{n}{(n, k)}\right)\mu\left(\frac{k}{(n, k)}\right)}{n^s k^s} (n, k)^s (m, k)^s \prod_{p/b_{n,k}} (1 + p^{-s}), \tag{16}$$

где

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

В частности, при любом $n = m$

$$\zeta(s)^{-1} = n^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{n}{(n,k)}\right)\mu\left(\frac{k}{(n,k)}\right)}{k^s} \prod_{p/\mathfrak{b}_{n,k}} (1+p^{-s})(n,k)^{2s}, \tag{17}$$

где $s > 1$ и n — любое целое число.

В предыдущем содержится

ТЕОРЕМА 9. *Если последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$ элементов H обладает D_g-свойством, причем*

$$g(n) > 0, \quad g(ab) = g(a)g(b), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty,$$

то последовательность $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \ldots$, для которой

$$\hat{f}_n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} f_m \ \text{ и } \ c_{n,m} = \sigma\mu\left(\frac{n}{(n,m)}\right)\mu\left(\frac{m}{(n,m)}\right) g([n,m])^{-1} \prod_{p/\mathfrak{b}_{n,m}} (1+g(p)^{-1}),$$

образует с ней биортогональную пару, т. е.

$$(\hat{f}_n, f_m) = \delta_n^m, \quad где \ \delta_n^m = \begin{cases} 1, & если \ n = m, \\ 0, & если \ n \neq m. \end{cases}$$

Здесь, как и выше, $\mathfrak{b}_{n,m}$ — произведение всех простых чисел, входящих в n и m в одинаковой степени. Построение последовательности $\hat{f}_n$ по f_n важно ввиду (13), так как, помножая (13) на $\hat{f}_m$, получим

$$\Delta(m)|\omega(m)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \log k\omega(k)(\alpha_k, \hat{f}_m). \tag{18}$$

Отсюда видно, какую важную роль играет определение асимптотики $\sum_{k=1}^{N} |\omega(k)|^{-2}\hat{f}_k$ в случае конкретных функциональных интерпретаций H для выяснения закона распределения простых чисел.

§ 4

Выше был указан способ получения ортонормированных последовательностей $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ из заданной ортонормированной последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, основанной на применении к $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ преобразования при помощи унитарной матрицы

$$C_\omega = \|c_{ik}\|, \quad c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right)|\omega(d)|^{-2},$$

$$\omega(ab) = \omega(a)\omega(b), \quad \omega(n) \neq 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2 < \infty, \quad \Omega(n) = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2).$$

Если бы удалось доказать чисто алгебраически факт унитарности матрицы с элементами $c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \omega(d)^{-2}$, тогда ортонорми-

рованность $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ была бы прямым следствием известного факта: преобразование последовательностей H при помощи унитарной матрицы переводит ортонормированную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ в ортонормированную и полную для того подпространства H' из H, для которого полна последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Из двух соотношений унитарности $C_\omega c_\omega^* = E$, $C_\omega^* C_\omega = E$ удается просто доказать только первое из них чисто алгебраически-арифметическим образом, минуя топологические моменты теории гильбертова пространства. Определим $\mu(u)$, как равную нулю при u нецелом и как функцию Мёбиуса на множестве целых значений u. Определим, далее, e_{ik} по формуле

$$e_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ делится на } k, \\ 0, & \text{если } i \text{ не делится на } k. \end{cases}$$

Пусть операция *, примененная к любой матрице $\| z_{ik} \|$, переводит ее в $\| z_{ik}^* \|$, где $z_{ik}^* = z_{ki}$.

Матрицу $B = \| b_{ik} \|$ будем называть обладающей Δ_g-свойством, если $b_{ik} = g((i, k))$, где $g(n)$ — данная функция целого аргумента. Если, сверх того, существует такая матрица X, что $B = XX^*$, то матрицу B назовем обладающей D_g-свойством.

Предположив, что

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

введем матрицу $M = \| m_{ik} \|$, где $m_{ik} = G(i)^{-\frac{1}{2}} \mu\left(\frac{i}{k}\right)$, и матрицу $A = \| a_{ik} \|$, где $a_{ik} = e_{ik} \sqrt{G(k)}$. Очевидно, $MA = E$, так как

$$\sum_{s=1}^{\infty} m_{is} a_{sk} = G(i)^{-\frac{1}{2}} G(k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^{\infty} \mu\left(\frac{i}{s}\right) e_{sk} = G(i)^{-\frac{1}{2}} G(k)^{\frac{1}{2}} \sum_{d/i} \mu\left(\frac{i}{d}\right) e_{dk} =$$

$$= G(i)^{-\frac{1}{2}} G(k)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{d/i \\ d \equiv 0 \pmod k}} \mu\left(\frac{i}{d}\right) = \delta_k^i.$$

Здесь сумма $\sum\limits_{\substack{d/i \\ d \equiv 0 \pmod k}} \mu\left(\frac{i}{d}\right)$ равна нулю, как пустая, при i, не делящемся на k, и равна $\sum\limits_{d'/i'} \mu\left(\frac{i'}{d'}\right)$, если i делится на k, где $i' = \frac{i}{k}$, т. е. опять-таки равна нулю, если $\frac{i}{k} > 1$, и только при $i = k$ равна единице.

Как всюду, здесь δ_i^k — символ Кронекера, т. е.

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Далее, $AM = E$, так как $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{is} m_{sk} = \sum\limits_{d/i} \mu\left(\frac{d}{k}\right)$, где $\sum\limits_{d/i} \mu\left(\frac{d}{k}\right) = \delta_{i'}^k$, $i' = \frac{i}{k}$, если i делится на k, и пуста, если i не делится на k.

В дальнейшем предполагается, что $g(u)$ такова, что все приводимые перемножения строк и столбцов сходятся абсолютно.

Имеем

$$AA^* = B, \quad MBM^* = E.$$

В самом деле,

$$(AA^*)_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} e_{is} e_{ks} G(s) = \sum_{d/(i,k)} G(d) = g((i, k)) = b_{ik}.$$

Помножая $AA^* = B$ слева на M и справа на M^* и учитывая, что $MA = A^*M^* = E$, имеем

$$MBM^* = MAA^*M^* = MA(MA)^* = E.$$

Равенство $AA^* = B$ показывает, что если $G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0$, то матрица B, обладающая Δ_g-свойством, будет обладать и D_g-свойством.

Далее, всякое разложение $B = XX^*$ (X — матрица с сходящейся суммой квадратов модулей элементов любой из строк) дает

$$MBM^* = MXX^*M^* = MX(MX)^* = E.$$

Таким образом, для MX одно из условий унитарности выполнено — строки ее образуют систему ортонормированных векторов. Отсюда видно, что всякое разложение матрицы B, обладающей D_g-свойством, вида $B = XX^*$ важно для построения унитарных матриц, так как оно дает матрицу $U = MX$, для которой одно из условий унитарности $UU^* = E$ выполнено. Очевидно, что если X дает такое разложение, то XV (V — любая унитарная матрица) также дает такое разложение, так как $XV(XV)^* = XVV^*X^* = XX^* = B$. Одно из разложений дано выше: $B = AA^*$, но оно не интересно, так как приводит нас к совершенно тривиальному факту унитарности единичной матрицы E.

Если $g(n) > 0$ обладает свойством

$$g(ab) = g(a)\, g(b), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty,$$

то можно указать нетривиальное разложение указанного свойства, взяв

$$x_{ik} = \frac{g(i)}{\sqrt{\sigma}} e_{ki} \omega(k),$$

где $\omega(k)$ такова, что $|\omega(n)|^{-2} = g(n)$, $\omega(ab) = \omega(a)\,\omega(b)$.

В самом деле,

$$(XX^*)_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} x_{is} x_{ks} = \frac{g(i)\, g(k)}{\sigma} \sum_{s=1}^{\infty} e_{si} e_{sk} |\omega(s)|^2 =$$

$$= \frac{g(i)\, g(k)}{\sigma} \sum_{s \equiv 0 \pmod{[(n,m)]}} g(s)^{-1} = g(i)\, g(k)\, g([i, k])^{-1} = g((i, k)) = b_{ik}$$

или

$$XX^* = B.$$

Очевидно, что элементы MX будут

$$(MX)_{ik}=\frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}}\sum_{d/(i,k)}\mu\left(\frac{i}{d}\right)g(d),\quad \Omega(i)=G(i).$$

Чисто арифметически-алгебраическое доказательство соотношения $(MX)^*MX=E$ (ортонормированность столбцов) возможно, но оно значительно сложнее. Обозначая MX через C_ω, рассмотрим произведение $C^*_{\omega_1}C_\omega$, где $\omega(n)$ и $\omega_1(n)$ — любые нигде не равные нулю мультипликативные функции с сходящейся суммой квадратов модулей. Элементы C_ω обозначим через c_{ik}, а элементы C_{ω_1} — через c'_{ik}. Элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы $C^*_{\omega_1}C_\omega$ обозначим p_{ik}.

Имеем

$$p_{ik}=\sum_{s=1}^{\infty}c'_{si}c_{sk}.$$

Необходимо доказать, что при $\omega_1(n)=\omega(n)$, $p_{ik}=\delta_i^k$, где

$$\delta_i^k=\begin{cases}1, & \text{если } i=k\\ 0, & \text{если } i\neq k\end{cases}\quad \text{(символ Кронекера).}$$

Самый общий способ задания мультипликативной функции $\omega(n)$ состоит в произвольном задании значений $\omega(p)$ (p — любое простое число) и в определении

Если $g(n)>0$ обладает свойством:

$$\omega(n)=\omega(p_1)^{\alpha_1}\omega(p_2)^{\alpha_2}\dots\omega(p_\nu)^{\alpha_\nu}\quad\text{для}\quad n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_\nu^{\alpha_\nu},$$

а самый общий способ задания $\omega(n)$ с сходящейся суммой квадратов модулей состоит в том, что к указанному определению добавляют еще условия

$$|\omega(p_i)|<1,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|\omega(p_i)|^2<\infty$$

($p_1, p_2, p_3, \dots$ — последовательность всех простых чисел). В пределах этих ограничений $u_i=\omega(p_i)$ и $v_i=\omega_1(p_i)$ являются произвольными комплексными числами, а все p_{ik} — функциями от произвольных переменных $u_1, u_2, u_3, \dots$ и $v_1, v_2, v_3, \dots$, удовлетворяющих условиям

$$|u_i|<1,\quad |v_i|<1,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^2<\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|v_i|^2<\infty.$$

Далее,

$$p_{ik}=\frac{\overline{\omega_1(i)}\,\omega(k)}{\sqrt{\sigma\sigma_1}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\Omega(s)\,\Omega_1(s)}}\sum_{d/(i,s)}\mu\left(\frac{s}{d}\right)|\omega_1(d)|^{-2}\sum_{d/(k,s)}\mu\left(\frac{s}{d}\right)|\omega(d)|^{-2}.$$

Выражение

$$f(s)=\frac{1}{\sqrt{\Omega(s)\,\Omega_1(s)}}\sum_{d/(i,s)}\mu\left(\frac{s}{d}\right)|\omega_1(d)|^{-2}\sum_{d/(k,s)}\mu\left(\frac{s}{d}\right)|\omega(d)|^{-2}$$

представляет узкомультипликативную функцию от s, т. е. $f(ab)=f(a)f(b)$, если $(a, b)=1$. Для узкомультипликативной $f(n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1+f(p)+f(p^2)+\ldots),$$

где произведение справа распространено на все простые числа [(2), стр. 25].

Полагая $i=i'p^{\alpha_1}$, $k=k'p^{\alpha_2}$, $(i', p)=(k', p)=1$, имеем

$$f(p^\beta)=|\omega(p)|^\beta|\omega_1(p)|^\beta(1-|\omega(p)|^2)^{-\frac{1}{2}}(1-|\omega_1(p)|^2)^{-\frac{1}{2}}\Sigma_1\Sigma_2$$

где

$$\Sigma_1=\sum_{z=0}^{\min(\beta,\alpha_1)}\mu(p^{\beta-z})|\omega_1(p)|^{-2z}=\begin{cases} 0, & \text{если } \beta>\alpha_1+1, \\ -|\omega_1(p)|^{-2(\beta-1)}, & \text{если } \beta=\alpha_1+1, \\ |\omega_1(p)|^{-2\beta}-|\omega_1(p)|^{-2(\beta-1)}, & \text{если } \beta\leqslant\alpha_1, \end{cases}$$

и аналогично

$$\Sigma_2=\sum_{z=0}^{\min(\beta,\alpha_2)}\mu(p^{\beta-z})|\omega(p)|^{-2z}=\begin{cases} 0, & \text{если } \beta>\alpha_2+1, \\ -|\omega(p)|^{-2(\beta-1)}, & \text{если } \beta=\alpha_2+1, \\ |\omega(p)|^{-2\beta}-|\omega(p)|^{-2(\beta-1)}, & \text{если } \beta\leqslant\alpha_2. \end{cases}$$

Далее,

$$a(p)=a(i, k, p)=1+\sum_{\beta=1}^{\infty}f(p^\beta)=1+\sum_{\beta=1}^{1+\min(\alpha_1,\alpha_2)}f(p^\beta)=$$

$$=\begin{cases} 1+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\left\{\dfrac{1-(xy)^\alpha}{1-xy}+\dfrac{(xy)^\alpha}{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}, & \text{если } \alpha_1=\alpha_2=\alpha, \\ 1+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\left\{\dfrac{1-(xy)^{\alpha_1}}{1-xy}+\dfrac{(xy)^{\alpha_1}}{1-y^2}\right\}, & \text{если } \alpha_1<\alpha_2, \\ 1+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\left\{\dfrac{1-(xy)^{\alpha_2}}{1-xy}+\dfrac{(xy)^{\alpha_2}}{1-x^2}\right\}, & \text{если } \alpha_1>\alpha_2, \end{cases}$$

где

$$x=|\omega(p)|^{-1}, \qquad y=|\omega(p)|^{-1}.$$

Очевидно,

$$\sum_{s=1}^{\infty}f(s)=\prod_p a(p),$$

где произведение справа распространено на все простые числа.

Полагая

$$b(p)=x^{-1}y^{-1}\eta^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha_2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(y^2-1)^{\frac{1}{2}}a(p)$$
$$(\xi=\omega(p)^{-1}=u^{-1}; \quad \eta=\omega_1(p)^{-1}=v^{-1}),$$

получим

$$p_{ik}=\prod_p b(p).$$

После элементарных выкладок, имеем

$$b(p)=\begin{cases} e^{i(\vartheta-\vartheta')\alpha}\left\{1-\dfrac{(x-y)^2}{xy(xy-1)}\left(1-\dfrac{(xy)^{-\alpha}}{1+\dfrac{xy-1}{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}}}\right)\right\}, \\ \qquad\qquad \text{если } \alpha_1=\alpha_2=\alpha, \\ e^{i(\vartheta\alpha_1-\vartheta'\alpha_2)}\left\{(x^2-1)\,x^{\alpha_1-\alpha_2}y+\dfrac{(y-x)\,x^{-\alpha_2}y^{-\alpha_1}}{1+\dfrac{xy-1}{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}}}\right\}\dfrac{x-y}{xy(xy-1)}, \\ \qquad\qquad \text{если } \alpha_1<\alpha_2, \\ e^{i(\vartheta\alpha_1-\vartheta'\alpha_2)}\left\{(y^2-1)\,y^{\alpha_2-\alpha_1}x+\dfrac{(x-y)\,x^{-\alpha_2}y^{-\alpha_1}}{1+\dfrac{xy-1}{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}}}\right\}\dfrac{x-y}{xy(xy-1)}, \\ \qquad\qquad \text{если } \alpha_2<\alpha_1, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\vartheta=\arg\eta,\ \vartheta'=\arg\xi,\ y=|\eta|,\ x=|\xi|,\ \eta=\omega_1(p)^{-1},\ \xi=\omega(p)^{-1}$$

и α_1, α_2 — показатели степеней, с которыми p входит в i и k соответственно: $i=i'p^{\alpha_1}$, $k=k'p^{\alpha_2}$, $(i', p)=(k', p)=1$.

В частности, если $(i, p)=1$, то $\alpha_1=0$.

Зависимость x, y, ξ, η, ϑ, ϑ', α_1, α_2 от p мы не включаем в обозначения.

Из предыдущих выражений для $b(p)$ легко видеть, что при $x=y$

$$b(p)=\begin{cases} 1, \text{ если } \alpha_1=\alpha_2, \\ 0, \text{ если } \alpha_1\neq\alpha_2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если $\omega_1(p)=\omega(p)$ для всех p, то

$$p_{ik}=\prod_p \delta^{\alpha_1(p)}_{\alpha_2(p)}=\delta^i_k \quad (\delta^k_i \text{ — символ Кронекера}),$$

так как, очевидно, что если $i=k$, то $\alpha_1(p)=\alpha_2(p)$ для всех простых чисел p и все множители бесконечного произведения $\prod_p b(p)$ равны единице, а если $i\neq k$, то по крайней мере для одного p $\alpha_1(p)\neq\alpha_2(p)$ и потому по крайней мере один из сомножителей указанного произведения равен нулю.

Таким образом, $C^*_\omega C_\omega=E$ и унитарность C_ω доказана.

Остановимся на том случае, когда $\omega(n)>0$, $\omega_1(n)>0$. Тогда $\vartheta=\vartheta'=0$ для всякого p. Легко видеть из (19), что в этом случае

$$\lim_{y\to x}\frac{b(p)-\delta^{\alpha_2}_{\alpha_1}}{y-x}=\left(\frac{\partial b(p)}{\partial y}\right)_{y=x}=\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_1=\alpha_2, \\ x^{\alpha_1-\alpha_2-1}, & \text{если } \alpha_1<\alpha_2, \\ -x^{\alpha_2-\alpha_1-1}, & \text{если } \alpha_1>\alpha_2, \end{cases}$$

или

$$\left(\frac{\partial b(p)}{\partial(\omega_1(p))^{-1}}\right)_{\omega(p)=\omega_1(p)} = \operatorname{sgn}(\alpha_1-\alpha_2)\,\omega(p)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1},$$

где $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $\operatorname{sgn} u = 1$, если $u > 0$, $\operatorname{sgn} u = -1$, если $u < 0$.

Формула

$$\left(\frac{\partial b(p)}{\partial\omega_1(p)}\right)_{\omega_1(p)=\omega(p)} \operatorname{sgn}(\alpha_1-\alpha_2)\omega(p)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1} \tag{20}$$

и формулы

$$p_{ik} = \prod_p b(p), \qquad \lim_{\omega_1(p)\to\omega(p)} b(p) = \delta_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

дают

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial\omega_1(P)}\right)_{\omega_1(n)=\omega(n)} = \operatorname{sgn}(\alpha_1-\alpha_2)\,\omega(P)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1},$$

если i и k таковы, что $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$ для всех p, отличных от P, и

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial\omega_1(P)}\right)_{\omega_1(n)=\omega(n)} = 0,$$

если $\alpha_1(p) \neq \alpha_2(p)$ по крайней мере для одного p, отличного от P. Здесь P — любое заданное простое число. Символ $\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial\omega_1(P)}\right)_{\omega_1(n)=\omega(n)}$ понимается таким образом, что в выражении $\frac{\partial p_{ik}}{\partial\omega_1(P)}$, зависящем от $\omega(p_1), \omega(p_2), \omega(p_3), \ldots$ и $\omega_1(p_1), \omega_1(p_2), \omega_1(p_3), \ldots$, где $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, полагаем $\omega_1(p_r) = \omega(p_r)$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Полагая

$$h_{ik} = h_{ik}(\omega(P)) = \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \alpha_1)\,\omega(P)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}$$

в случае, если $\lim\limits_{z\to\infty}(i, p^z) = \lim\limits_{z\to\infty}(k, p^z)$ для всех p, отличных от P, и $h_{ik} = 0$, когда по крайней мере для одного p, не равного P, $\lim\limits_{z\to\infty}(i, p^z) \neq \lim\limits_{z\to\infty}(k, p^z)$ и, вводя обозначения $H_p = \| h_{ik}(p) \|$, имеем

$$C^*_{\omega+\delta\omega} C_\omega = E - \delta\omega(P)\,H_P + (\delta\omega(P))^2 N_P + \ldots = C^{-1}_{\omega+\delta\omega} C_\omega,$$

где $\omega + \delta\omega$ — мультипликативная функция, получаемая из $\omega(n)$, если ее значения во всех простых числах задать как у $\omega(n)$, а в точке P изменить на $\delta\omega(P)$. Отсюда

$$C_\omega = C_{\omega+\delta\omega} - \delta\omega(P)\,C_\omega H_P + \ldots$$

или

$$\frac{\partial C_\omega}{\partial\omega(p)} = C_\omega H_p. \tag{21}$$

Таким образом, матрица C_ω представляет собою решение бесконечной системы дифференциальных уравнений (21), в которой любому

простому числу p соответствует определенное уравнение. Очевидно также, что матрица

$$T_{\omega_1, \omega} = C^*_{\omega_1} C_\omega = C^{-1}_{\omega_1} C_\omega,$$

как функция параметров $u_i = \omega(p_i)$, $v_i = \omega_1(p_i)$, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = T H_{p_i} \tag{22}$$

с граничными условиями: $T = E$ при $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ...

Итак, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. *Если* $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *и* $v_1, v_2, v_3, \ldots$ — *две любые числовые последовательности, удовлетворяющие условиям*

$$0 < u_i < 1, \quad 0 < v_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 < \infty,$$

и если $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — *последовательность всех простых чисел, то матрица* $T = \| t_{ik} \|$, *где* $t_{ik} = \Pi'_{ik} \Pi''_{ik} \Pi'''_{ik}$,

$$\Pi'_{ik} = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' \left[1 - \frac{(u_\nu - v_\nu)^2}{1 - u_\nu v_\nu} \left(1 - \frac{(u_\nu v_\nu)^{\alpha_\nu^{(i)}}}{1 + \frac{1 - u_\nu v_\nu}{\sqrt{(1 - u_\nu^2)(1 - v_\nu^2)}}} \right) \right],$$

$$\Pi''_{ik} = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}'' \frac{u_\nu - v_\nu}{1 - u_\nu v_\nu} \left[(1 - u_\nu) u_\nu^{\alpha_\nu^{(k)} - \alpha_\nu^{(i)} - 1} + \frac{(u_\nu - v_\nu) u_\nu^{\alpha_\nu^{(k)}} v_\nu^{\alpha_\nu^{(i)}}}{1 + \frac{1 - u_\nu v_\nu}{\sqrt{(1 - u_\nu)^2 (1 - v_\nu^2)}}} \right],$$

$$\Pi'''_{ik} = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}''' \frac{v_\nu - u_\nu}{1 - u_\nu v_\nu} \left[(1 - v_\nu^2) v_\nu^{\alpha_\nu^{(i)} - \alpha_\nu^{(k)} - 1} + \frac{(v_\nu - u_\nu) u_\nu^{\alpha_\nu^{(k)}} v_\nu^{\alpha_\nu^{(i)}}}{1 + \frac{1 - u_\nu v_\nu}{\sqrt{(1 - u_\nu^2)(1 - v_\nu^2)}}} \right],$$

причем $\alpha_\nu^{(i)}$, $\alpha_\nu^{(k)}$ *определены формулами*

$$p_\nu^{\alpha_\nu^{(i)}} = \lim_{z \to \infty} (p_\nu^z, i), \qquad p_\nu^{\alpha_\nu^{(k)}} = \lim_{z \to \infty} (p_\nu^z, k)$$

и Π' *означает, что произведение распространено на те значения* ν, *для которых* $\alpha_\nu^{(i)} = \alpha_\nu^{(k)}$, Π'', Π''' *означают, что* ν *пробегает те значения, при которых* $\alpha_\nu^{(i)} < \alpha_\nu^{(k)}$, $\alpha_\nu^{(i)} > \alpha_\nu^{(k)}$, *соответственно, — будет ортогональной.*

Если положить $\omega(p_\nu) = u_\nu$, $\omega_1(p_\nu) = v_\nu$, *то*

$$T = C^{-1}_{\omega_1} C_\omega.$$

Кроме того, матрица T удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial u_r} = TH_{p_r} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

и обращается в единичную матрицу при $u_r = v_r$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Той же системе уравнений удовлетворяет C_ω, *если* $\omega(p_r) = u_r$. *Здесь*

$$H_{p_r} = \| h_{ik}^{p_r} \|,$$

где

$$h_{ik}^{(p_r)} = 0,$$

если $\alpha_\nu^{(i)} = \alpha_\nu^{(k)}$ *по крайней мере для одного* ν, *отличного от* r, *и*

$$h_{ik}^{(p_r)} = \operatorname{sgn}(\alpha_r^{(k)} - \alpha_r^{(i)})\, u_r^{|\alpha_r^{(i)} - \alpha_r^{(k)}| - 1},$$

если для всех $\nu \neq r$ $\alpha_\nu^{(i)} = \alpha_\nu^{(k)}$.

Совершенно так же, считая $\omega(n)$ и $\omega_1(n)$ *положительными*, имеем

$$C_\omega C^*_{\omega_1} = \| q_{ik} \|,$$

где

$$q_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} c_{is} c'_{ks},$$

причем

$$c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma \Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \omega(d)^{-2}, \quad c'_{ik} = \frac{\omega_1(k)}{\sqrt{\sigma_1 \Omega_1(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \omega_1(d)^{-2},$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)^2, \quad \sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1(k)^2;$$

$$\Omega(n) = \omega(n)^{-2} \prod_{p/n} (1 - \omega(p)^2), \quad \Omega_1(n) = \omega_1(n)^{-2} \prod_{p/n} (1 - \omega_1(p)^2)$$

и, далее,

$$q_{ik} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma\sigma_1 \Omega(i)\, \Omega_1(k)}} \sum_{d/i} \sum_{\delta/k} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \mu\left(\frac{k}{\delta}\right) \frac{\omega_1}{\omega}(d) \frac{\omega}{\omega_1}(\delta)\, \omega\omega_1((d, \delta))^{-1},$$

где

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\, \omega_1(k), \quad \frac{\omega}{\omega_1}(n) = \frac{\omega(n)}{\omega_1(n)}, \quad \frac{\omega_1}{\omega}(n) = \frac{\omega_1(n)}{\omega(n)},$$

$$\omega\omega_1(n) = \omega(n)\, \omega_1(n).$$

Замечая, что

$$\Phi(m, n) = \sum_{d/m} \sum_{\delta/n} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \mu\left(\frac{n}{\delta}\right) \frac{\omega_1}{\omega}(d) \frac{\omega}{\omega_1}(\delta)\, \omega\omega_1((d, \delta))^{-1}$$

обладает свойством $\Phi(m_1 m_2, n_1 n_2) = \Phi(m_1, n_1)\, \Phi(m_2, n_2)$, если $(m_1, m_2) = (n_1, n_2) = (m_1, n_2) = (m_2, n_1) = 1$, мы видим, что для вычисления $\Phi(m, n)$ достаточно вычислить $\Phi(p^\alpha, p^\beta)$ для случаев $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha = 0$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta = 0$, $\alpha = \beta = 0$, где p — простое число, так как

$$\Phi(m, n) = \Phi(p_1^{\alpha_1}, p_1^{\beta_1})\, \Phi(p_2^{\alpha_2}, p_2^{\beta_2}) \cdots \Phi(p_\nu^{\alpha_\nu}, p_\nu^{\beta_\nu}),$$

если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\nu^{\alpha_\nu}$, $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_\nu^{\beta_\nu}$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $\alpha_\nu \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $\beta_\nu \geqslant 0$.

Соответствующие вычисления дают

$$q_{ik} = \prod_p b^*(p),$$

где

$$b^*(p) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(x-y)^2}{(xy-1)\left[xy - 1 + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]}, & \text{если } \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \\ 1 - \dfrac{(x-y)^2}{xy-1}, & \text{если } \alpha_1 = \alpha_2 > 0, \\ \dfrac{x-y}{xy-1}\, y^{-\alpha_1} \sqrt{y^2-1}, & \text{если } \alpha_1 > \alpha_2 = 0, \\ \dfrac{y-x}{xy-1}\, x^{-\alpha_2} \sqrt{x^2-1}, & \text{если } \alpha_2 > \alpha_1 = 0, \\ \dfrac{y-x}{xy-1}\, x^{-(\alpha_2-\alpha_1)-1} (x^2-1), & \text{если } \alpha_2 > \alpha_1 > 0, \\ \dfrac{x-y}{xy-1}\, y^{-(\alpha_1-\alpha_2)-1} (y^2-1), & \text{если } \alpha_1 > \alpha_2 > 0, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$x = \omega(p)^{-1}, \quad y = \omega_1(p)^{-1}, \quad p^{\alpha_1} = \lim_{z\to\infty}(p^z, i), \quad p^{\alpha_2} = \lim_{z\to\infty}(p^z, k)$$

Формулы (22) показывают, что если $\omega(p_i)$ положить равным произвольным функциям некоторого параметра t, то

$$C'_\omega = \frac{d}{dt} C_\omega = C_\omega H,$$

где

$$H = \varkappa_1 H_{p_1} + \varkappa_2 H_{p_2} + \varkappa_3 H_{p_3} + \ldots, \quad \varkappa_i = \frac{d\omega(p_i, t)}{dt},$$

и H_{p_ν} — матрицы указанного выше вида, соответствующие различным простым числам p_ν. Так как матрица H имеет нули всюду, кроме элементов с номерами i, k (где i и k отличаются по составу простых делителей на одно простое число), то, в силу того, что $C_\omega^* C'_\omega = H$, имеем $\sum_{s=1}^{\infty} c_{si} \frac{d}{dt} c_{sk} = 0$ во всех случаях, кроме того, когда

$$\lim_{z\to\infty}(p^z, i) = \lim_{z\to\infty}(p^z, k)$$

верно для всех простых чисел p, кроме одного. Эти своеобразные соотношения ортогональности ведут, в свою очередь, к новым арифметическим тождествам.

Так же, как и выше, можно вычислить, пользуясь (23),

$$\lim_{y\to\infty} \frac{b^*(p) - \delta_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{y-x} = \left(\frac{\partial b^*(p)}{\partial y}\right)_{y=x}.$$

Здесь

$$b^*(p)=\begin{cases} 0 & , \text{ если } \alpha_1=\alpha_2, \\ x^{(\alpha_2-\alpha_1)-1} & , \text{ если } \alpha_2>\alpha_1>0, \\ -x^{-(\alpha_1-\alpha_2)-1} & , \text{ если } \alpha_1>\alpha_2>0, \\ \dfrac{x^{-\alpha_2}}{\sqrt{x^2-1}} & , \text{ если } \alpha_2>\alpha_1=0, \\ \dfrac{x^{-\alpha_1}}{\sqrt{x^2-1}} & , \text{ если } \alpha_1>\alpha_2=0, \end{cases}$$

или

$$\left(\frac{\partial b^*(p)}{\partial y}\right)_{y=x}=\operatorname{sgn}(\alpha_2-\alpha_1)\,x^{-|\alpha_1-\alpha_2|-1} \text{ в случае } \alpha_1\alpha_2\neq 0$$

и

$$\left(\frac{\partial b^*(p)}{\partial y}\right)_{y=x}=\operatorname{sgn}(\alpha_2-\alpha_1)\,\frac{x^{-|\alpha_1-\alpha_2|}}{\sqrt{x^2-1}} \text{ в случае } \alpha_1\alpha_2=0.$$

Аналогично предыдущему

$$C_\omega C^{-1}_{\omega+\delta\omega}=C_\omega C^*_{\omega+\delta\omega}=E-\hat{H}_p\delta\omega(p)+\hat{N}(\delta\omega(p))^2+\ldots,$$

где матрица $\hat{H}_p=\|\hat{h}^{(p)}_{ik}\|$ имеет элементы

$$\hat{h}^{(p)}_{ik}=0,$$

если $\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, i)=\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, k)$ по крайней мере для одного простого q, отличного от p, и

$$\hat{h}^{(p)}_{ik}=\begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha_1-\alpha_2)\,\omega(p)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1} & \text{при } \alpha_1\alpha_2\neq 0, \\ \operatorname{sgn}(\alpha_1-\alpha_2)\,\dfrac{\omega(p)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}}{\sqrt{1-\omega(p)^2}} & \text{при } \alpha_1\alpha_2=0, \end{cases}$$

когда $\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, i)=\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, k)$ для всех q, отличных от p. Очевидно, что $\dfrac{\partial C_\omega}{\partial\omega(p)}=\hat{H}_pC_\omega$, откуда следует

$$C_\omega H_p=\hat{H}_pC_\omega.$$

Далее, аналогично предыдущему видим, что если положить $\omega(p)=\omega(p, t)$ равным некоторым функциям параметра t, то

$$\frac{dC_\omega}{dt}=\sum_{i=1}^{\infty}H_{p_i}\frac{d}{dt}\omega(p_i, t)\,C_\omega,$$

откуда

$$\sum_{s=1}^{\infty}c_{is}\frac{d}{dt}c_{ks}=\begin{cases} 0, \\ \operatorname{sgn}(\alpha_1-\alpha_2)\,\omega(q)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}\dfrac{d\omega(q)}{dt}, \\ \operatorname{sgn}(\alpha_1-\alpha_2)\,\dfrac{\omega(q)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}}{\sqrt{1-\omega(q)^2}}\cdot\dfrac{d\omega(q)}{dt}, \end{cases} \tag{24}$$

где первое равенство имеет место, если по крайней мере для двух различных простых чисел $\lim_{z\to\infty}(p^z, i) \neq \lim_{z\to\infty}(p^z, k)$, второе и третье равенства верны, когда соотношение $\lim_{z\to\infty}(p^z, i) \neq \lim_{z\to\infty}(p^z, k)$ осуществляется ровно для одного простого числа q, второе равенство верно, если $\lim_{z\to\infty}(q^z, i) = q^{\alpha_1} > 1$, $\lim_{z\to\infty}(q^z, k) = q^{\alpha_2} > 1$ и третье — в противном случае.

Для получения конкретных арифметических тождеств нужно в формулах (7), (8), (9), (10), (11) конкретизировать последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ При этом важно разработать приемы, позволяющие из $a_1, a_2, a_3, \ldots$ получить

$$a'_n = n^{\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{s}{2}} a_{kn}, \qquad A_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a'_d.$$

Тогда равенство (9) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_s(n)^{-1} A_n B_n,$$

где B_n имеет то же отношение к b_n, какое имеет A_n к a_n.

На стр. 32 приведена таблица соответственных значений a_n, a'_n, A_n.

Подставляя эти данные в соотношение (9), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) x^n = -\zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n} \frac{\log p}{1-p^{-s}}\right) \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d^s x^d}{1-x^d}, \tag{25}$$

$$(|x| < 1,\ s > 1).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{z-s} F_{s-z}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n, s-z) x^n =$$

$$= -\zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n} \frac{\log p}{1-p^{-s}}\right) \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d^z x^d}{1-x^d}$$

$$\left(|x| < 1,\ \Lambda(n, u) = \frac{1}{n^u} \sum_{d/n} \Lambda(d) \varphi_u\left(\frac{n}{d}\right),\quad s > 1\right), \tag{26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{1-s} F_{s-1}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n, s-1) x^n =$$

$$= \zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n} \frac{\log p}{1-p^{-s}}\right) \frac{x P'_n(x)}{P_n(x)}, \tag{27}$$

где

$$P_n(x) = \sum_{d/n} (1-x^d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \text{ — полином деления круга,}$$

№	a_n	a'_n	A_n
1	$n^{-\frac{z}{2}}$ $\mathrm{Re}(z) < 1$	$n^{\frac{s-z}{2}}\,\zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)$	$\varphi_{\frac{s-z}{2}}(n)\,\zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)$
2	$\Lambda(n)\,n^{-\frac{z}{2}}$ $\mathrm{Re}(z) > 1$	$a'_1 = -\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{s+z}{2}\right)$ $a'_n = 0$ если $\Lambda(n) = 0,$ $n > 1$ $a'_n = \log p\,\frac{p^{-\frac{\beta z}{2}}}{1 - p^{-\frac{s+z}{2}}},$ если $n = p^{\beta}$	$A_n = -\mu(n)\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{s+z}{2}\right) + \sum_{p/n} p^{-\frac{s-z}{2}}\frac{\log p}{1 - p^{-\frac{s+z}{2}}}\right),$ если $\mu(n) \neq 0,$ $A_n = -\mu\left(\frac{n}{q^{\alpha}}\right)\frac{q^{(\alpha-1)\frac{s-z}{2}} - q^{\alpha\cdot\frac{s-z}{2}}}{1 - q^{\frac{s+z}{2}}} - \log q,$ если $\mu\left(\frac{n}{q^{\alpha}}\right) \neq 0,\ \left(\frac{n}{q}, q\right) = 1,$ $\alpha > 1,\ q$ — простое число. $A_n = 0$ во всех остальных случаях.
3	$n^{\frac{s}{2}} z^n$ $\lvert z \rvert < 1$	$n^s\,\frac{z^n}{1 - z^n}$	$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^s\,\frac{z^d}{1 - z^d}$
4	$n^{\frac{s}{2}-1} z^n$ $\lvert z \rvert < 1$	$-n^{s-1}\log(1 - z^n)$	$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^s \log(1 - z^d)$
5	$\Lambda(n)\,n^{-\frac{s}{2}}$	$a'_1 = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ $a'_n = 0$ если $\Lambda(n) = 0,$ $n > 1$ $a'_n = \log p\,\frac{p^{-\frac{\beta s}{2}}}{1 - p^{-s}}$	$A_n = -\mu(n)\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n}\frac{\log p}{1 - p^{-s}}\right)$
6	$n^{-\frac{s}{2}+z} F_{s-z}(x^n)$ $F_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_u(n)}{n^u}x^n$ $\lvert x \rvert < 1$	$n^s\,\frac{x^n}{1 - x^n}$	$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^s\,\frac{x^d}{1 - x^d}$
7	$\frac{\mu(n)}{n^{\frac{z}{2}}}$ $\mathrm{Re}(z) > 1$	$\mu(n)\,n^{\frac{s-z}{2}}\,\zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)^{-1}\cdot$ $\cdot\prod_{p/n}\left(1 - p^{-\frac{s+z}{2}}\right)^{-1} =$ $= \zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)^{-1}\cdot$ $\cdot\,\mu(n)\,n^s\varphi_{\frac{s+z}{2}}(n)^{-1}$	$A_n = 0$, если n делится на куб простого числа $A_n = \zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)^{-1}\mu(P)\,\frac{Q^s}{\varphi_{\frac{s+z}{2}}(Q)}\cdot$ $\cdot\prod_{p/P}\frac{1 + p^{-\frac{z}{2}}\left(p^{\frac{s}{2}} - p^{-\frac{s}{2}}\right)}{1 - p^{-\frac{s+z}{2}}};$ если $n = PQ^2,\ (P, Q) = 1,\ \mu(P) \neq 0,$ $\mu(Q) \neq 0$

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} n^s x^n y^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_s(n)} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d^s x^d}{1-x^d} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d^s y^d}{1-y^d} \tag{28}$$
$$(s > 1,\ |x| < 1,\ |y| < 1),$$

$$\frac{\zeta(z_1+z_2)\,\zeta(2s)}{\zeta(s+z_1)\,\zeta(s+z_2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{s-z_1}(n)\,\varphi_{s-z_2}(n)}{\varphi_{2s}(n)} \quad \left(s > \frac{1}{2},\ z_1 > \frac{1}{2},\ z_3 > \frac{1}{2}\right), \tag{29}$$

$$\frac{\zeta(s)\,\zeta(z)\,\zeta(z-s)}{\zeta(2z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{4s-2z}(n)}{\varphi_s(n)\,\varphi_{2s-z}(n)} \quad (s > 1,\ z > 1). \tag{30}$$

Настоящая часть работы посвящена общим принципам развиваемого здесь метода.

Конкретные приложения полученных здесь результатов будут даны в части II.

Поступило
15. XII. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Плеснер А., Спектральная теория линейных операторов, Успехи математических наук, IX (1941), 3—125.

[2] Ингам А., Распределение простых чисел, М.—Л. 1936.

N. P. ROMANOFF. HILBERT SPACE AND THE THEORY OF NUMBERS

SUMMARY

In the present paper the author develops a new method of the theory of numbers based on application of some properties of Hilbert space to arithmetical questions. It is shown here that the orthonormalization of certain sequences in Hilbert space coincides with Möbius' inversion process, the prominent rôle of which in the theory of numbers is well known. The second important point is the connection between Euler's and Parceval's identities. The questions of the theory of numbers and the theory of Hilbert space become so closely interwoven with each other that we may speak of the arithmetics of Hilbert space. The author shows that a separable Hilbert space has a $\aleph_0$-parametric set of arithmetically characterized rotations, the application of which to both factors of the scalar product (f, g) gives rise to many arithmetical identities. We can get in this way many Ramanujan's and Cantor's identities as well as many others. Some instances of these identities are given in the text.

The paper contains only the formal outlines of the method itself; as to its application to the theory of distribution of primes to the completeness of functional sequences and many others questions they are to be published in the subsequent parts of this work.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 10 (1946), 35—46 Série mathématique

Ю. В. ЛИННИК

О ГУСТОТЕ НУЛЕЙ L-РЯДОВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе приводится доказательство одной леммы о нулях L-рядов, имеющей приложения в аддитивной теории простых чисел.

§ 1

В настоящей статье я даю подробное доказательство одной теоремы, из которой довольно просто выводится теорема Гольдбаха — Виноградова ([1], [2]) тем же путем контурного интегрирования, что и закон простых чисел. Теорема гласит:

Пусть $q \geqslant 1$ — целое число, $\chi(n)$ — примитивный характер $(\mathrm{mod}\, q)$, $L(w, \chi)$ — его L-ряд; пусть $w = \sigma + it$, $T \geqslant q^{50}$, $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, $\nu = \beta - \frac{1}{2} \geqslant 0$. Тогда число нулей ряда $L(w, \chi)$ в прямоугольнике $\beta \leqslant \sigma < 1$, $|t| \leqslant T$ будет

$$Q(\beta, T) < c_1 q^{2\nu} \cdot T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}} \ln^{10} T + c_2 q^{30}, \tag{1}$$

где c_1, c_2 — абсолютные константы.

§ 2

Вывод (1) не будет заключать каких-либо существенно новых идей, а будет лишь представлять собой модификацию и уточнение известного вывода E. C. Titchmarsh'а ([3]) для ζ-функции. И подобно тому, как E. C. Titchmarsh использует знаменитое «approximate functional equation» для ζ-функции, так и мы должны будем вывести и использовать «approximate functional equation» для L-рядов с переменным модулем q.

Zyoiti Suetuna в своей работе «Über die approximative Functionalgleichung für Dirichletsche L-Funktionen» ([4]) дал удобный способ вывода такого уравнения. Но его вывод относился к фиксированному модулю q и не охватывал всех нужных случаев. Поэтому мы используем его вывод в несколько измененной форме.

§ 3

Мы должны будем вывести следующую теорему об «approximate functional equation» для L-рядов.

Пусть χ — примитивный характер $(\mathrm{mod}\, q)$, $q \geqslant 1$, $s = \sigma + it$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| > c_3$, $x > c_3 q$; $y \geqslant c_3$; $2\pi xy = qt$.

Тогда

$$L(s,\chi)=$$
$$=\sum_{n<x}\chi(n)\,n^{-s}+2(2\pi)^{s-1}\cdot q^{\frac{1}{2}-s}\varepsilon(\chi)\,{\sin\atop\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\sum_{n<y}\bar\chi(n)\,n^{s-1}+$$
$$+R(q,t,\sigma,x,y), \tag{2}$$

где

$$|R(q,t,\sigma,x,y)|<c_4q^2(x^{-\sigma}+y^{\sigma-1}t^{\frac{1}{2}-\sigma})\ln t. \tag{3}$$

При этом

$$\varepsilon(\chi)\,{\sin\atop\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}\sin\dfrac{\pi s}{2} & \text{при}\quad \chi(-1)=1,\\ \dfrac{-i\tau(\chi)}{\sqrt{q}}\cos\dfrac{\pi s}{2} & \text{при}\quad \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

$$\tau(\chi)=\sum_{l=0}^{q-1}\chi(l)\,e^{\frac{2\pi il}{q}}.$$

Наши начальные преобразования почти не будут отличаться от выкладок Z. Suetuna ([4]). Мы приведем их для полноты изложения.

При $s>1$ имеем $n^{-s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty e^{-n\omega}\omega^{s-1}\,d\omega$; отсюда, если $\xi\geqslant 1$ — какое-либо целое число,

$$L(s,\chi)-\sum_{n<\xi}\chi(n)\,n^{-s}=\sum_{n\geqslant\xi}\chi(n)\,n^{-s}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty z^{s-1}\left(\sum_{n\geqslant\xi}\chi(n)\,e^{-nz}\right)dz.$$

Отсюда

$$L(s)-\sum_{n<\xi}\chi(n)\,n^{-s}=\frac{q^{-s}}{\Gamma(s)}\sum_{l=0}^{q-1}\chi(\xi+l)\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}z^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz. \tag{4}$$

Проведем разрез от 0 до ∞ по положительной реальной оси и пусть контур C состоит из частей: верхний берег разреза от ∞ до $z=\frac{1}{2}$, окружность $|z|=\frac{1}{2}$, $0\leqslant\operatorname{arc} z\leqslant 2\pi$, и нижний берег отрезка от $z=\frac{1}{2}$ до $z=\infty$. Если положим $\ln(-z)=\ln(-z)+i\operatorname{arc}(-z)=\ln|z|+i\operatorname{arc} z-\pi i$, $(-z)^{s-1}=e^{(s-1)\ln z}$, то получим

$$\int\limits_C\frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz=-2i\sin\pi s\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}z^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Из последней формулы и (4) получается

$$L(s)-\sum_{n<\xi}\chi(n)\,n^{-s}=\frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi q^{s}}\sum_{l=0}^{q-1}\chi(\xi+l)\int\limits_{C}\frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz. \tag{5}$$

Это верно для любого нецелого s. Подинтегральная функция имеет простые полосы $z=\pm 2\pi ni$, $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ вне контура C. Вокруг каждого такого полюса опишем кружок радиуса $\frac{1}{t}$.

Проведем новый контур: от $\infty+2\pi iy$ горизонтально до $2\pi iy$, оттуда по полукругу $|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$ до $(-2\pi iy)$ и затем горизонтально до $\infty-2\pi iy$.

Если этот контур не пересечет наших кружочков, то три его основные части:

C_1: от $\infty+2\pi iy$ до $2\pi iy$

C_3: полуокружность $|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$

C_5: от $-2\pi yi$ до $\infty-2\pi iy$

смогут служить для вычислений.

Если же он пересечет или коснется двух таких кружочков (симметрично расположенных), то назовем:

C_1 — часть контура от $\infty+2\pi iy$ до точки пересечения с кружочком $|z-2\pi ni|=\frac{1}{t}$;

C_2 — часть окружности кружочка, обращенная к началу координат, до пересечения с $|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$;

C_3 — часть полуокружности $|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$ от пересечения с кружочком $|z-2\pi ni|=\frac{1}{t}$ до пересечения с кружочком $|z+2\pi ni|=\frac{1}{t}$;

C_4 — часть окружности $|z+2\pi ni|=\frac{1}{t}$, обращенная к началу координат, от пересечения с C_3 до пересечения с горизонталью $\operatorname{Im} z=-2\pi y$;

C_5 — горизонталь от пересечения с C_4 до $\infty-2\pi iy$. Совокупность $C_1+C_3+C_5$ или, если есть C_2 и C_4, то $C_1+C_2+\ldots+C_5$, назовем C_0.

Между C_0 и C будут расположены полюсы функции $\frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}$ в точках $z=2\pi ni$, под условием: n — целое, $0<|n|\leqslant y_1$, где $y_1=[y]-1$, или $[y]$ в зависимости от того, содержит или не содержит контур C_0 части C_2 и C_4.

Подсчет вычетов в полюсах дает из (5)

$$L(s,\chi)=$$
$$=\sum_{n\leqslant\xi}\chi(n)\,n^{-s}+2\,(2\pi)^{s-1}q^{\frac{1}{2}-s}\varepsilon(\chi)\,{\sin \atop \cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\sum_{n\leqslant y_1}\overline{\chi}(n)\,n^{s-1}+$$
$$+iq^{-s}\Gamma(1-s)\sum_{l=0}^{q-1}\chi(\xi+l)\int\limits_{C_0}\frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Заметим, что для $|t|>1$

$$\left|2\cdot(2\pi)^{s-1}\cdot q^{\frac{1}{2}-s}\cdot\varepsilon(\chi)\,{\sin \atop \cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\right|<c_5\,q^{\frac{1}{2}-\sigma}\cdot t^{\frac{1}{2}-\sigma}. \tag{6}$$

Отсюда видно, что если во второй сумме правой части добавить член, отвечающей $n = y_1 + 1$, то получим ошибку, не превышающую $2c_5 \cdot q^{\frac{1}{2}-\sigma} \; t^{\frac{1}{2}-\sigma} \cdot y^{\sigma-1}$. Поэтому можно написать

$$L(s, \chi) =$$
$$= \sum_{n \leqslant \xi} \chi(n) n^{-s} + 2(2\pi)^{s-1} q^{\frac{1}{2}-s} \varepsilon(\chi) \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \sum_{n<y} \bar{\chi}(n) n^{s-1} +$$
$$+ iq^{-s}\Gamma(1-s) \sum_{l=0}^{q-1} \chi(\xi+l) \int_{C_0} \frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-s}} dz + Bqt^{\frac{1}{2}-s} \cdot y^{\sigma-1}, \tag{7}$$

где $|B| < c_5$. Вообще B, не всегда одно и то же, будет обозначать абсолютно ограниченную величину.

Теперь для вывода (2) нам нужно будет оценить

$$\int_{C_0} \frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-s}} dz.$$

§ 4

Рассмотрим сперва интеграл $\int\limits_{C_5}$. Полагая $z = u + iv$ и учитывая, что в начале C_5, $|1-e^{-z}| > \frac{c_6}{u+\frac{1}{t}}$, получим $(t > 0)$

$$\left|\int_{C_5} \frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-s}} dz\right| < c_7 \int_0^1 y^{\sigma-1} e^{-\frac{\pi}{2}t - \frac{\xi+l}{q}u} \frac{du}{u+\frac{1}{t}} +$$
$$+ c_8 \int_1^\infty y^{\sigma-1} e^{-\frac{\pi}{2}t - \frac{\xi+l}{q}u} du < c_9 y^{\sigma-1} e^{\frac{\pi t}{2}}. \tag{8}$$

Рассмотрим $\int\limits_{C_4}$ (если C_4 существует). В точке $z = -2\pi i$, где $n = y_1 + 1$, имеем $|(-z)^{s-1}| \leqslant c_{10} y^{\sigma-1} e^{-\frac{\pi}{2}t}$, ибо $\operatorname{arc}(-z) = \frac{\pi}{2}$. Если z'—точка C_4, то

$$|\ln(-z') - \ln(-z)| \leqslant \frac{1}{|z^{*}|} \cdot \frac{1}{t} < \frac{1}{ty},$$
$$|(-z')^{s-1}| \leqslant c_{11} y^{\sigma-1} e^{-\frac{\pi}{2}t + \frac{1}{y}} < e \cdot c_{11} y^{\sigma-1} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}t},$$
$$|e^{-\frac{\xi+l}{q}z}| < e^{\frac{\xi+l}{q} \cdot \frac{1}{t}};$$

длина контура меньше или равна $\frac{2\pi}{t}$; $|e^{-\frac{\xi+l}{q}z}| < e^{\frac{\xi+l}{q} \cdot \frac{1}{t}}$. Если будем считать, что $\frac{\xi+l}{q} < t$, то это $< c_{13}$. В результате,

$$\left|\int_{C_4}\right| < c_{14} y^{\sigma-1} e^{\frac{\pi}{2}t}. \tag{9}$$

§ 5

Оценим интеграл $\int\limits_{C_3}$. Здесь $-z=2\pi y e^{i\varphi}$, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$$|(-z)^{s-1}|<c_{15}y^{\sigma-1}e^{-t\varphi},\quad \left|e^{-\frac{\xi+l}{q}z}\right|=e^{-\frac{\xi+l}{q}\cos\varphi\cdot 2\pi y},$$

$$|1-e^{-z}|>c_{15}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{y\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right)\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{y}\right)\right),$$

$$|1-e^{-z}|>c_{15}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{y\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\right)\quad\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{y}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right),$$

$|1-e^{-z}|>c_{15}$ для остальных φ.

Теперь введем x под условием $\frac{2\pi xy}{q}=t$. Предположим, что расстояние x до ближайшего целого числа, $\operatorname{dist}(x)>\frac{1}{4}$, а потом снимем это ограничение. Число ξ пусть будет выбрано специально, как целое число под условием $x-q<\xi<\xi+q-1<x$ (ближайшее справа от $x-q$). В таком случае

$$t-2\pi\frac{\xi+l}{q}y=y\left(\frac{t}{y}-\frac{2\pi(\xi+l)}{q}\right)=\frac{2\pi y}{q}(x-(\xi+l))\geqslant\frac{2\pi y\operatorname{dist}(x)}{q}>\frac{\pi y}{2q}.$$

Из этих оценок выводим

$$\left|\int\limits_{C_3}\right|<c_{16}y^{\sigma}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{t\varphi}e^{-\frac{\xi+l}{q}\cdot 2\pi y\cos\varphi}\frac{d\varphi}{\frac{1}{t}+y\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}<c_{17}y^{\sigma-1}e^{\frac{\pi}{2}t}\cdot q\ln t. \quad (10)$$

§ 6

Интеграл $\left|\int\limits_{C_4}\right|$ оценивается так же, как $\left|\int\limits_{C_2}\right|$ с той лишь разницей, что что $\arg(-2\pi yi)=-\frac{\pi}{2}$. Получаем, как в § 4,

$$\left|\int\limits_{C_4}\right|<c_{18}y^{\sigma-1}e^{\frac{\pi}{2}t}. \quad (11)$$

Для оценки интеграла $\int\limits_{C_1}$ заметим, следуя остроумной идее Z. Suetuna ([4]), что

$$\frac{e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}=e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1}+\frac{e^{-\left(\frac{\xi+l}{q}+1\right)z}}{1-e^{-z}}(-z)^{s-1}.$$

Первая функция справа не имеет полюсов в $|z|>0$, и допускает удобные деформации контура. Для второй функции

$$\left|e^{-\left(\frac{\xi+l}{q}+1\right)z}\right|<e^{-\frac{1}{4q}u-\frac{x}{q}u}.$$

Здесь

$$z=u+2\pi iy,\quad \frac{\xi+l}{q}+1-\frac{x}{q}\geqslant\frac{1}{4q}.$$

Далее,

$$|(-z)^{s-1}| \leqslant y^{\sigma-1} \cdot e^{\frac{\pi}{2}t} \cdot e^{t \operatorname{arctg} \frac{u}{2\pi y}} \leqslant y^{\sigma-1} e^{\frac{\pi}{2}t} e^{\frac{x}{q}u},$$

$$|1-e^{-z}| > \left(\frac{1}{t}+u\right) \cdot c_{19} \quad (u \leqslant 1); \ |1-e^{-z}| > c_{19} \quad (u > 1).$$

Отсюда

$$\left|\int_{C_1} \frac{e^{-\left(\frac{\xi+l}{q}+1\right)z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}} dz\right| \leqslant c_{20} y^{\sigma-1} e^{\frac{\pi}{2}t} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{4q}} du +$$

$$+ c_{20} y^{\sigma-1} e^{\frac{\pi}{2}t} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{u}{4q}}}{\frac{1}{t}+u} du < c_{21} q y^{\sigma-1} e^{\frac{\pi}{2}t} \ln t. \tag{11a}$$

Остается оценить $\int_{C_1} e^{\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1} dz$.

Заменим контур C_1 на контур C_2, затем C_3, являющийся частью $C_3 : |z| = 2\pi y$, $\arg z \leqslant \pi$, затем часть отрицательной оси: C_3'' от $-2\pi y$ до 0 и C_3''' от 0 до ∞ по положительной оси. 0 обходится сколь угодно малым кружком, интеграл по коему сколь угодно мал.

Имеем

$$\left|\int_0^\infty e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1} dz\right| = \left|e^{-\pi i(s-1)} \left(\frac{\xi+l}{q}\right)^{-s} \Gamma(s)\right| < c_{22} e^{\frac{\pi}{2}t} x^{-\sigma} t^{\sigma-\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

$$\left|\int_{z=0}^{-2\pi y} e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1} dz\right| < \int_0^{2\pi y} v^{\sigma-1} e^{\frac{\xi+l}{q}v} dv < c_{23} \int_0^y r^{\sigma-1} e^{\frac{tr}{y}} dr < c_{24} e^{\frac{\pi}{2}t} y^{\sigma-1}. \tag{13}$$

Наконец, как и в § 5, получим

$$\left|\int_{C_3'} e^{-\frac{\xi+l}{q}z}(-z)^{s-1} dz\right| < c_{25} e^{\frac{\pi}{2}t} y^{\sigma-1} \cdot q. \tag{14}$$

Собирая теперь оценки (8) — (14), подставляя в (7) и учитывая, что $\Gamma(1-s)| < c_{26} t^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}$, получим (2).

§ 7

Нам нужно избавиться от ограничения $\operatorname{dist}(x) \geqslant \frac{1}{4}$. Допустим, что $x \geqslant y$. Тогда, так как $\frac{2\pi xy}{q} = t$, то $x \geqslant \sqrt{\frac{qt}{2\pi}}$. Изменение x на $O(1)$ влечет изменение y на величину $< c_{26}, \frac{qt}{x^2} < c_{27}$, что создает ошибку $c_{28} q^{\frac{1}{2}-\sigma} t^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}$. Итак, для $x \geqslant y$ формула (2) доказана, Чтобы доказать ее при $x < y$, заменим s на $1-s$, $L(s,\chi)$ на $L(1-s,\bar{\chi})$:

$$L(1-s,\bar{\chi}) = \sum_{n<x} \bar{\chi}(n) n^{s-1} + 2(2\pi)^{-s} q^{s-\frac{1}{2}} \varepsilon(\bar{\chi}) \frac{\cos}{\sin}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \sum_{n<y} \chi(n) n^{-s} +$$
$$+ R(q, -t, 1-\sigma, x, y).$$

Деля на коэффициент при второй сумме, получим

$$L(s,\chi)=\sum_{n<y}\chi(n)\,n^{-s}+2(2\pi)^{s-1}q^{\frac{1}{2}-s}\cdot\frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\sum_{n<x}\bar{\chi}(n)\,n^{s-1}+$$
$$+c_4\,\theta\left(x^{\sigma-1}t^{\frac{1}{2}-\sigma}+y^{-\sigma}\right)\ln t.$$

Здесь уже x и y поменялись ролями; $y<x$, так что (2) доказано полностью.

§ 8

Располагая «approximate functional equation» (²), мы начнем вывод (1) по методу E. C. Titchmarsh'a (³) и G. Hoheisel'я (⁶).

Для изучения нулей $L(s,\chi)$ вводим функцию G. Hoheisel'я (⁵).

$$\varphi_z(s)=L(s,\chi)\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\,\mu(n)\,n^{-s},$$

где z будет указан в дальнейшем. Она имеет в каждой области не меньше нулей, чем $L(s,\chi)$. Пусть $N(\varphi_z,\sigma_0,T)$ — число ее нулей в $\sigma>\sigma_0$, $2<t<T$. Если положим $\sigma_0=\frac{1}{2}+\nu$, $0\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{2}$, и введем функцию (⁵)

$$N^*\left(\varphi_z,\frac{1}{2}+0,T\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}+0}^{\infty}N(\varphi_z,\sigma,T)\,d\sigma,$$

то она допускает удобное интегральное представление. Именно, если определим (⁵)

$$\operatorname{arc}\varphi_z(\sigma+iT)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\{\operatorname{arc}\varphi_z(\sigma+it+i\varepsilon)+\operatorname{arc}\varphi_z(\sigma+it-i\varepsilon)\},$$

то получим (⁵)

$$2\pi N^*\left(\varphi_z,\frac{1}{2}+\nu,T\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}+\nu}^{\infty}\operatorname{arc}\varphi_z(\sigma+iT)\,d\sigma-\int\limits_{\frac{1}{2}+\nu}^{\infty}\operatorname{arc}\varphi_z(\sigma+2iT)\,d\sigma+$$
$$+\int\limits_{2}^{T}\ln\left|\varphi_z\left(\frac{1}{2}+\nu+it\right)\right|dt.$$

§ 9

Как и в (⁵), по методу Backlund'a, показываем для $z\leqslant T^2$, $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$,

$$|\operatorname{arc}\varphi_z(\sigma+iT)|<c_{27}\ln(qT)$$

и отсюда

$$2\pi N^*\left(\varphi_z,\frac{1}{2}+\nu,T\right)=\int\limits_{2}^{T}\ln\left|\varphi_z\left(\frac{1}{2}+\nu+it\right)\right|dt+R(q,T),$$
$$|R(q,T)|<c_{28}\ln(qT). \qquad (15)$$

Пусть $T_0 + q^{20}$, $N(\varphi_z, \sigma_0, T, T_0)_\infty$, число нулей $\varphi_z(s)$ в $\sigma \geqslant \sigma_0$, $T_0 \leqslant t < T$,

$$N^*(\varphi_z, \sigma_0, T, T_0) = \int\limits_{\frac{1}{2}+\nu}^{\infty} N(\varphi_z, \sigma, T, T_0)\, d\sigma.$$

Так как число нулей $\varphi_z(s)$ в $\sigma \geqslant \sigma_0$, $2 < t < T_0$ не может превзойти $c_{29} T_0 \ln(qT_0) < c_{29} q^{21}$, то из (15) получим

$$2\pi N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2}+\nu, T, T_0\right) = \int\limits_{T_0}^{T} \ln\left|\varphi_z\left(\frac{1}{2}+\nu+it\right)\right| dt + R_1(q, T), \tag{16}$$

$$R_1(q, T) < c_{30}(\ln(qT) + q^{21}). \tag{17}$$

Наконец, так как $N\left(\varphi_z, \frac{1}{2}+\nu, T, T_0\right)$ — невозрастающая функция ν, получим при $\nu \geqslant \frac{1}{\ln T}$

$$N\left(\varphi_z, \frac{1}{2}+\nu, T, T_0\right) \leqslant \ln T \cdot N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2}+\nu-\frac{1}{\ln T}, T\right). \tag{18}$$

Далее, из (17) выводим

$$2\pi N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2}+\nu, T, T_0\right) \leqslant \frac{T-T_0}{2} \ln\left(\frac{1}{T-T_0}\int\limits_0^T |\varphi_z|^2\, dt\right) + R_1(q, T). \tag{19}$$

Отсюда усматриваем, что для доказательства основной теоремы (1) достаточно показать, что при $T \geqslant q^{50}$ можно подобрать такой $z = z(T) < T^2$, что при $s = \frac{1}{2}+\nu+it$,

$$f_z(s) = \varphi_z(s) - 1, \quad \int\limits_{T_0}^{T} |f_z(s)|^2\, dt < c_{30} T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}} \ln^8 T. \tag{20}$$

§ 10

Имеем

$$f_z(s) = \varphi_z(s) - 1 = L(s, \chi) \sum_{n \leqslant z} \chi(n)\mu(n) n^{-s} - 1.$$

Используем здесь «approximate functional equation» (2). Полагая

$$F(s, \chi) = 2(2\pi)^{s-1} q^{\frac{1}{2}-s} \varepsilon(\chi) \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s),$$

так что при $t > 1$

$$|F(s, \chi)| < c_{31} q^{\frac{1}{2}-\sigma} t^{\frac{1}{2}-\sigma}, \tag{21}$$

получим ([3])

$$f_z(s) = \Phi_z(s) + F(s, \chi)\Psi_z(s) + R(s, q, x, y) \sum_{n \leqslant z} \chi(n)\mu(n) n^{-s}, \tag{22}$$

где

$$\Phi_z(s) = \sum_{n\leqslant x} \chi(n)\, n^{-s} \sum_{n\leqslant z} \chi(n)\, \mu(n)\, n^{-s} - 1,$$

$$\Psi_z(s) = \sum_{n\leqslant y} \bar{\chi}(n)\, n^{s-1} \sum_{n\leqslant z} \chi(n)\, \mu(n)\, n^{-s},$$

$$|R(s, q, x, y)| < c_{32}\, q^2 (x^{-\sigma} + y^{\sigma-1} t^{\frac{1}{2}-\sigma}) \ln t, \quad 2\pi xy = qt.$$

Предполагаем, что x зависит только от T, но не от t; тогда $y = \frac{qt}{2\pi x}$ есть функция t; z мы выбираем равным $\frac{x}{q}$. Имеем

$$\Phi_z(s) = \sum_{n=1}^{xz} a_n n^{-s},$$

причем $a_n = 0\ (n \leqslant z)$, и $|a_n| \leqslant \tau(n)$ (число делителей n) для $z < n \leqslant xz$. Отсюда

$$\int_{T_0}^{T} |\Phi_z(s)|^2 dt = (T - T_0) \sum_{n=1}^{xz} a_n^2 n^{-2\sigma} + \sum_{m,\, n=z}^{xz} a_m a_n (mn)^{-\sigma} \int_{T_0}^{T} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \leqslant$$

$$\leqslant T \sum_{n=z}^{xz} \{\tau(n)\}^2 n^{-2\sigma} + \sum_{\substack{m<n\leqslant xz\\ m,\, n}} \tau(m)\, \tau(n)\, (mn)^{-\sigma} \left|\ln\left(\frac{n}{m}\right)\right|^{-1};$$

При $\sigma = \frac{1}{2} + \nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{1}{2}$, получим, используя известные оценки S. Ramanujan'a [6],

$$\sum_{n=z}^{xz} \{\tau(n)\}^2 n^{-2\sigma} < c_{33}\, z^{1-2\sigma} \ln^5 (xz) < c_{34}\, z^{-2\nu} \ln^5 T, \tag{23}$$

$$\sum_{\substack{m,\, n\\ m<n\leqslant xz}} \tau(m)\, \tau(n)\, (mn)^{-\sigma} \left|\ln\left(\frac{n}{m}\right)\right|^{-1} < c_{35}\, (xz)^{2-2\sigma} \ln^5 (xz) <$$

$$< c_{36}\, (xz)^{1-2\nu} \ln^5 T, \tag{24}$$

$$\int_{T_0}^{T} |\Phi_z(s)|^2 dt < c_{37}\, (Tz^{-2\nu} + (xz)^{1-2\nu}) \ln^5 T. \tag{25}$$

Если $\frac{T}{2} > T_0$, то это и подавно верно для интеграла $\int_{T/2}^{T}$.

Далее, полагая

$$T_1 = \max\left(T_0, \frac{2\pi xm}{q}; \frac{2\pi xn}{q}\right), \quad Y = \frac{qT}{2\pi x},$$

получим

$$\int_{T_0}^{T} |\Psi_z(s)|^2 dt = \sum_{m<Y} m^{\sigma-1} \cdot \sum_{n<Y} n^{\sigma-1} \cdot \sum_{\nu\leqslant z} \mu(\nu)\nu^{-\sigma} \cdot \sum_{r\leqslant z} \mu(r) r^{-\sigma} \cdot$$

$$\cdot \int_{T_1}^{T} \bar{\chi}(mr)\chi(\nu n)\left(\frac{mr}{\nu n}\right)^{it} dt.$$

Пусть $\sum_1$ — сумма с числами, где $mr=\nu n$, $\sum_2$ — остальные, тогда

$$|\textstyle\sum_1| \leqslant T \displaystyle\sum_{mr=n\nu} m^{\sigma-1} n^{\sigma-1} \nu^{-\sigma} r^{-\sigma}.$$

Последняя сумма оценена у E. C. Titchmarsh'а (³):

$$|\textstyle\sum_1| \leqslant T \displaystyle\sum_{\nu<Y}{}' \nu^{2\sigma-2}\left\{\tau(\nu)^2 + T\cdot Y^{4\sigma-2}\sum_{Y\leqslant\nu\leqslant Yz}\nu^{-2\sigma}\{\tau(\nu)\}^2\right..$$

Согласно (23), это не превосходит

$$c_{38} T\cdot Y^{2\nu}\ln^5(Yz). \tag{26}$$

Далее (³), как и в (24),

$$|\textstyle\sum_2| \leqslant 2 \displaystyle\sum_{mr\neq n\nu} m^{\sigma-1}n^{\sigma-1}\nu^{-\sigma}r^{-\sigma}\left|\ln\frac{mr}{n\nu}\right|^{-2} <$$

$$< 2Y^{4\nu}\sum_{\substack{\mu,\,\nu<Yz\\ \mu<\nu}} \tau(\mu)\tau(\nu)(\mu\nu)^{-\sigma}\left|\ln\frac{\nu}{\mu}\right|^{-1} < c_{39}Y^{4\sigma}\cdot(Yz)^{1-2\nu}\cdot\ln^5 T. \tag{27}$$

Учитывая теперь, что $|F(s,\chi)| < c_{31} q^{\frac{1}{2}-\sigma} t^{\frac{1}{2}-\sigma}$; и рассматривая $\int_{T/2}^{T} + \int_{T/4}^{T/2} + \ldots + \int_{T_0}^{T/2r}$, получим окончательно*

$$\int_{T_0}^{T}\{|\Phi_z(s)|^2 + |F(s,\chi)\Psi_z(s)|^2\}dt < c_{40}T\ln^6 T\left(Y^{2\nu} + Y^{4\nu}(Yz)^{1-2\nu}\cdot\frac{1}{T} +\right.$$

$$\left. + z^{-2\nu} + (xz)^{1-2\nu}\cdot\frac{1}{T}\right) q^{-2\nu}T^{-2\nu}. \tag{28}$$

$\ln^6 T$ вместо $\ln^5 T$ получается от сложения $\int_{T/2}^{T} + \int_{T/4}^{T/2} + \ldots$

Теперь положим $x = T^{\frac{1}{2(1-\nu)}}$, $z = \frac{x}{q} = \frac{1}{q}T^{\frac{1}{2(1-\nu)}}$, $Y = \frac{qT}{2\pi x}$.

Тогда оценка (28) не превышает

$$c_{40}\, q^{2\nu} T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}} \ln^6 T; \tag{29}$$

---

* Передавая роль T числам $\frac{T}{2^k}$, $0 \leqslant k \leqslant r$.

Наконец,

$$\int_{T_0}^{T} \Big| \sum_{n<z} \chi(n)\mu(n)n^{-s} \Big|^2 |R(s,q,x,y)|^2\,dt \leqslant \int_{T/2}^{T} + \int_{T/4}^{T/2} + \ldots + \int_{T_0}^{T/2r} \leqslant$$

$$\leqslant c_{40}\, q^{2\nu}\cdot T^{1-\frac{\nu^{2}}{1-\nu}} \ln^6 T.^{*} \qquad (30)$$

Формулы (29) и (30) вместе доказывают (20), и тогда, по сказанному в § 9, (18) и (19) доказывают основную теорему (1).

Поступило
1. XI. 1945

ЛИТЕРАТУРА

1 Landau E., Vorlesungen über die Zahlentheorie, Bd. II. 1927.
2 Линник Ю. В., О возможности единого метода в некоторых вопросах «аддитивной» и «дистрибутивной» теории простых чисел, Доклады АН, 1945.
3 Titchmarsh E. C., Proc. Lond. Math. Soc. (2), 30 (1929), 319—321.
4 Suetuna Z., Japanese Journal of Math. (V), IX: 2 (1932), 111—116.
5 Hoheisel G., Sitzungsber. d. Preuss. Akad. Wiss., (1930), 72.
6 Ramanujan S., Collected Mathematical Papers.

* Например, $\int_{T/2}^{T} |\Sigma|^2 |R^2|\,dt \leqslant \sup|R|^2 \int_{T/2}^{T} |\Sigma|^2\,dt.$

U. V. LINNIK. ON THE DENSITY OF THE ZEROS OF L-SERIES

SUMMARY

The present paper contains the detailed proof of an auxiliary theorem by means of which the Goldbach-Vinogradow theorem can be deduced by the same method of contour integration, as the law of primes. The proof contains no essentially new ideas, being a combination of the arguments due to Z. Suetuna [4] and E. C. Titchmarsh [3]. Only the application to a new deduction of Vinogradow's three primes theorem is essential. The theorem holds:

Let $q \geqslant 1$ be an integer, $\chi(n)$ a primitive character $(\bmod q)$, $L(w, \chi)$ its L-series; let $w = \sigma + it$, $T \geqslant q^{50}$, $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, $\nu = \beta - \frac{1}{2} \geqslant 0$. Then the number of zeros of $L(w, \chi)$ in the rectangle $\beta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$, will be

$$Q(\beta, T) < c_1 q^{2\nu} \cdot T^{1 - \frac{\nu}{1-\nu}} \cdot \ln^{10} T + c_2 q^{30}. \tag{1}$$

The proof of (1) is based upon the approximate functional equation which is proved here in detail: for $s = \sigma + it$, $\sigma \in [0, 1]$, $x > c_3 q, y > c_3$, $2\pi xy = q|t|$ we have

$$L(s, \chi) = \sum_{n<x} \chi(n) n^{-s} + 2(2\pi)^{s-1} q^{\frac{1}{2}-s} \varepsilon(\chi) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \sum_{n<y} \bar{\chi}(n) n^{s-1} + R;$$

$$|R| < c_4 q^2 (x^{-\sigma} + y^{-\sigma} t^{\frac{1}{2}-\sigma}) \cdot \ln t.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 47—72 Série mathématique

А. Г. КУРОШ

ИЗОМОРФИЗМЫ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ. II

(*Представлено академиком* О. Ю. Шмидтом)

Работа представляет развитие работы автора (7). В ней доказываются теоремы об изоморфизме прямых разложений групп, обобщающие теоремы Ремака—Шмидта и Коржинека, и параллельные им теоремы о прямых разложениях колец. В работе строится также пример, показывающий невозможность сведения вопроса об изоморфизмах прямых разложений групп на случай абелевых групп.

Настоящая работа представляет собою развитие работы автора (7). Она опирается, впрочем, лишь на первые два параграфа этой работы и их содержание будет дальше предполагаться известным. В частности, свойства I — VIII прямых сумм во вполне дедекиндовых структурах будут цитироваться без ссылок на работу (7).

Основное содержание работы составляют далеко идущее обобщение теоремы Ремака — Шмидта (10) для групп с произвольной системой операторов (теорема 2) и обобщение теоремы Коржинека (3) (теоремы 3 и 4). В § 10 устанавливаются теоремы о двусторонних прямых разложениях колец, параллельные указанным теоретико-групповым теоремам. В основе доказательств всех этих теорем лежит метод, изложенный в §§ 1 — 3 и являющийся перенесением в теорию вполне дедекиндовых структор метода Крулля (4) — Коржинека (3); это перенесение заметно отличается от той теоретико-структурной трактовки метода Крулля, которую дал Оре (8). Одновременно достигаются некоторые усовершенствования этого метода и, в частности, обнаруживается, что его общая схема не требует никаких дополнительных ограничений типа условия минимальности. Непосредственным применением этого метода доказывается теоретико-структурная теорема 1, обобщающая (для случая прямых разложений с двумя слагаемыми) теорему 4 из работы автора (7).

Наконец, в § 11 строится пример группы, дающий отрицательный ответ на вопрос, не следует ли справедливость теоремы о центральном изоморфизме прямых разложений некоторой группы из справедливости аналогичной теоремы для центра этой группы.

§ 1

Рассматриваем структуру S, которую считаем вполне дедекиндовой и удовлетворяющей следующему условию, независимость которого от условия полной дедекиндовости может быть без труда показана:

(*) Если в S даны элементы x и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \cdots$, причем $xy_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$, то

$$x \sum_n y_n = 0.$$

Условию (*) удовлетворяет, очевидно, структура допустимых нормальных делителей всякой группы с любой системой операторов.

Пусть в S даны два прямых разложения единицы с двумя слагаемыми каждое,

$$1 = a_1 \dot{+} a_2 = b_1 \dot{+} b_2. \tag{1}$$

Условимся обозначать компоненту элемента x в прямом слагаемом a_i первого из разложений (1) через $x\varphi_i$; $i = 1, 2$, а его компоненту в прямом слагаемом b_j второго из разложений (1) — через $x\theta_j$, $j = 1, 2$ *.

ЛЕММА 1. *Для любого x из S*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = x\theta_1\varphi_2\theta_2$$

(справедливы также равенства, получающиеся из указанного переменой ролей θ_1 и θ_2, а также ролей θ и φ).

Действительно,

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = b_2 [a_1 (x\theta_1 + a_2) + b_1]$$

или, ввиду $x\theta_1 \leqslant b_1$ и условия дедекиндовости,

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = b_2 [x\theta_1 + a_1 (x\theta_1 + a_2) + b_1] = b_2 [(x\theta_1 + a_1)(x\theta_1 + a_2) + b_1];$$

элементы a_1 и a_2 входят сюда, однако, симметричным образом.

ЛЕММА 2. *Если $x \leqslant a_1$, то $x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1$, т. е. по отношению к элементам, содержащимся в a_1, отображения $\theta_1\varphi_1$ и $\theta_2\varphi_1$ перестановочны.*

Действительно, применяя несколько раз лемму 1, а также равенство $x = x\varphi_1$, получим

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1 = x\varphi_1\theta_2\varphi_2\theta_1\varphi_1 = x\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

§ 2

Рассмотрим теперь прямое слагаемое a_1 первого из разложений (1). Пусть $n_{11}^{(k)}$ будет сумма всех таких элементов x, содержащихся в a_1, что $x(\theta_2\varphi_1)^k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$; аналогично, через $n_{12}^{(k)}$ обозначим сумму всех таких x, $x \leqslant a_1$, что $x(\theta_1\varphi_1)^k = 0$. Согласно лемме VII о компоненте суммы

$$n_{11}^{(k)} (\theta_2\varphi_1)^k = 0, \quad n_{12}^{(k)} (\theta_1\varphi_1)^k = 0.$$

Ясно, что

$$n'_{1j} \leqslant n''_{1j} \leqslant \ldots \leqslant n_{1j}^{(k)} \leqslant \ldots, \quad j = 1, 2.$$

Обозначим сумму этой возрастающей последовательности через n_{1j}.

---

* Для дальнейшего эта символика более удобна, чем применявшиеся в работе [7] символы x^{a_i}, x^{b_j}.

Пусть, далее, $n_1^{(k)}$ будет сумма всех таких элементов x, содержащихся в a_1, что $x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k=0$. Тогда основа

$$n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k=0.$$

Элементы n_1', n_1'', ..., $n_1^{(k)}$, ... составляют возрастающую последовательность, сумму которой обозначим через n_1.

ЛЕММА 3. $n_{1j}^{(k)}\leqslant n_1^{(k)}$, $j=1,2$, $k=1,2,\ldots$

Пусть, например, $j=1$. Так как $n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k=0$, то, применяя лемму 2, получим

$$n_{11}^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k=n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k(\theta^1\varphi_1)^k=0\cdot(\theta_1\varphi_1)^k=0,$$

т. е. $n_{11}^{(k)}\leqslant n_1^{(k)}$.

ЛЕММА 4. *Если* $x\leqslant a_1$ *то при* $k=1,2,\ldots$ *имеет место включение*

$$x\leqslant x(\theta_1\varphi_1)^k+x(\theta_1\varphi_1)^{k-1}(\varphi_2\theta_1)+x(\theta_1\varphi_1)^{k-2}(\theta_2\varphi_1)^2+\ldots+x(\theta_2\varphi_1)^k. \quad (2)$$

Действительно, по лемме VI, имеет место включение

$$x\leqslant x\theta_1+x\theta_2,$$

а поэтому

$$x=x\varphi_1\leqslant(x\theta_1+x\theta_2)\varphi_1=x\theta_1\varphi_1+x\theta_2\varphi_1,$$

т. е. включение (2) доказано для случая $k=1$. Если оно уже доказано для данного k, то его доказательство для случая $k+1$ достигается заменой каждого из слагаемых правой части соотношения (2) суммой его образов при $\theta_1\varphi_1$ и $\theta_2\varphi_1$, что, как доказано, может лишь усилить неравенство, а затем применением леммы 2 и объединением одинаковых слагаемых.

ЛЕММА 5. $n_1^{(k)}\leqslant n_{11}^{(k)}+n_{12}^{(k)}$, $k=1,2,\ldots$

Мы знаем, что $n_1'\leqslant n_1'\theta_1\varphi_1+n_1'\theta_2\varphi_1$. Однако из $n_1'(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)=0$ следует

$$(n_1'\theta_1\varphi_1)\theta_2\varphi_1=0, \quad (n_1'\theta_2\varphi_1)\theta_1\varphi_1=0,$$

т. е. $n_1'\theta_1\varphi_1\leqslant n_{11}'$, $n_1'\theta_2\varphi_1\leqslant n_{12}'$. Лемма доказана, следовательно, для случая $k=1$. Пусть она уже доказана для $k-1$. Применим к элементу $n_1^{(k)}$ лемму 4:

$$n_1^{(k)}\leqslant n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k+n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^{k-1}(\theta_2\varphi_1)+n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^{k-2}(\theta_2\varphi_1)^2+\ldots$$
$$\ldots+n_1^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k. \quad (3)$$

Из $n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k=0$ следует $[n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k](\theta_2\varphi_1)^k=0$, т. е. $n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k\leqslant n_{11}^{(k)}$, и аналогично $n_1^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k\leqslant n_{12}^{(k)}$. Что же касается остальных слагаемых правой части соотношения (3), то все они обращаются в нуль уже при $(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k-1}$, т. е. содержатся в $n_1^{(k-1)}$, а поэтому, по индуктивному предположению, в $n_{11}^{(k-1)}+n_{12}^{(k-1)}$ и, следовательно, в $n_{11}^{(k)}+n_{12}^{(k)}$.

ЛЕММА 6. $n_{11}^{(k)}\cdot n_{12}^{(l)}=0$, $k,l=1,2,\ldots$

Пусть $x\leqslant n_{11}^{(k)}\cdot n_{12}^{(l)}$, т. е. $x(\theta_2\varphi_1)^k=x(\theta_1\varphi_1)^l=0$. Если $k=l=1$, то из $x\leqslant x\theta_1\varphi_1+x\theta_2\varphi_1$ и $x\theta_2\varphi_1=x\theta_1\varphi_1=0$ следует $x=0$. Будем теперь вести доказательство индукцией по сумме $k+l$. Если, например, $k>1$, то из $(x\theta_2\varphi_1)(\theta_2\varphi_1)^{k-1}=0$ и $(x\theta_2\varphi_1)(\theta_1\varphi_1)^l=x(\theta_1\varphi_1)^l(\theta_2\varphi_1)=0$ следует, по индуктивному предположению, $x\theta_2\varphi_1=0$, а отсюда и из $x(\theta_1\varphi_1)^l=0$ следует, в виду $1+l<k+l$, равенство $x=0$.

Из лемм 3, 5 и 6 вытекает

ЛЕММА 7. $n_1^{(k)} = n_{11}^{(k)} \dot{+} n_{12}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$

Теперь может быть доказана следующая основная лемма.

ЛЕММА 8. $n_1 = n_{11} \dot{+} n_{12}$.

Действительно, по лемме 7,

$$n_1 = \sum_{k=1}^{\infty} n_1^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (n_{11}^{(k)} + n_{12}^{(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} n_{11}^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} n_{12}^{(k)} = n_{11} + n_{12}.$$

С другой стороны, используя условие (*) и лемму 6, получаем

$$n_{11}^{(k)} \cdot n_{12} = n_{11}^{(k)} \sum_{l=1}^{\infty} n_{12}^{l} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а поэтому, снова в виду условия (*),

$$n_{11} \cdot n_{12} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} n_{11}^{(k)} \right) n_{12} = 0.$$

Ту роль, которую по отношению к прямому слагаемому a_1 играют элементы $n_{11}^{(k)}$, n_{11}, $n_{12}^{(k)}$, n_{12}, $n_1^{(k)}$, n_1, по отношению к слагаемому a_2 играют элементы $n_{21}^{(k)}$, n_{21}, $n_{22}^{(k)}$, n_{22}, $n_2^{(k)}$, n_2, а по отношению к слагаемому b_j, $j = 1, 2$, — элементы $m_{j1}^{(k)}$, m_{j1}, $m_{j2}^{(k)}$, m_{j2}, $m_j^{(k)}$, m_j. Таким образом, лемма 8 позволяет считать доказанными также следующие прямые разложения:

$$n_2 = n_{21} \dot{+} n_{22}, \quad m_j = m_{j1} \dot{+} m_{j2}, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

§ 3

ЛЕММА 9. $n_1 + n_2 = m_1 + m_2$.

Рассмотрим элемент $m_1^{(k)}$. Используя равенство $m_1^{(k)} (\varphi_1 \theta_1 \varphi_2 \theta_1)^k = 0$ и применяя несколько раз лемму 1, получим

$$(m_1^{(k)} \varphi_1)(\theta_1 \varphi_1 \theta_2 \varphi_1)^k = (m_1^{(k)} \varphi_1)(\theta_1 \varphi_2 \theta_2 \varphi_1)^k =$$
$$= (m_1^{(k)} \varphi_1)(\theta_1 \varphi_2 \theta_1 \varphi_1)^k = m_1^{(k)} (\varphi_1 \theta_1 \varphi_2 \theta_1)^k \varphi_1 = 0.$$

Этим доказано (так как $m_1^{(k)} \varphi_1 \leqslant a_1$), что $m_1^{(k)} \varphi_1 \leqslant n_1^{(k)}$. Аналогично этому $m_1^{(k)} \varphi_2 \leqslant n_2^{(k)}$. Отсюда и из $m_1^{(k)} \leqslant m_1^{(k)} \varphi_1 + m_1^{(k)} \varphi_2$ вытекает включение

$$m_1^{(k)} \leqslant n_1^{(k)} + n_2^{(k)}.$$

Такое же включение справедливо для $m_2^{(k)}$. С другой стороны, по соображениям симметрии,

$$n_i^{(k)} \leqslant m_1^{(k)} + m_2^{(k)}, \quad i = 1, 2.$$

Этим доказано равенство

$$n_1^{(k)} + n_2^{(k)} = m_1^{(k)} + m_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

из которого следует утверждение леммы.

Обозначим элемент, равный обеим частям равенства, составляющего формулировку леммы 9, через v,

$$v = n_1 + n_2 = m_1 + m_2. \tag{5}$$

Разложения (5) для элемента v будут прямыми, так как, например,

$n_1 \leqslant a_1$, $n_2 \leqslant a_2$. Применяя лемму 8, а также равенства (4), получим два продолжения этих прямых разложений,

$$v = n_{11} \dot{+} n_{12} \dot{+} n_{21} \dot{+} n_{22} = m_{11} \dot{+} m_{12} \dot{+} m_{21} \dot{+} m_{22}. \qquad (6)$$

Нашей ближайшей целью будет изучение разложений (6).

ЛЕММА 10. $n_{11}\theta_1 \leqslant m_{11}$.

Действительно, пусть $x \leqslant a_1$ и $x(\theta_2\varphi_1)^k = 0$, т. е. $x \leqslant n_{11}^{(k)}$. Тогда $x\theta_1 \leqslant b_1$ и, на основании леммы 1,

$$x\theta_1(\varphi_2\theta_1)^k = x\varphi_1\theta_1(\varphi_2\theta_1)^k = x\varphi_1\theta_2(\varphi_2\theta_1)^k = \ldots =$$
$$= x\varphi_1(\theta_2\varphi_1)^k\theta_1 = x(\theta_2\varphi_1)^k\theta_1 = 0,$$

т. е. $x\theta_1 \leqslant m_{11}$.

ЛЕММА 11. $n_{11}(m_{12} + m_2) = 0$.

Обозначим левую часть доказываемого равенства через x. Тогда, по лемме 10, $x\theta_1 \leqslant n_{11}\theta_1 \leqslant m_{11}$. С другой стороны,

$$x\theta_1 \leqslant (m_{12} + m_2)\theta_1 = m_{12}\theta_1 = m_{12},$$

так как $m_2\theta_1 = 0$. Таким образом,

$$x\theta_1 \leqslant m_{11} \cdot m_{12} = 0.$$

Отсюда $x\theta_1\varphi_1 = 0$, т. е., ввиду $x \leqslant n_{11} \leqslant a_1$, $x \leqslant n_{12}' \leqslant n_{12}$; следовательно,

$$x \leqslant n_{11} \cdot n_{12}' = 0.$$

ЛЕММА 12. $m_{11} \leqslant n_{11} + m_{22}$.

Пусть $x \leqslant m_{11}^{(k)}$, т. е. $x \leqslant b_1$ и $x(\varphi_2\theta_1)^k = 0$. Пусть сперва $k = 1$, т. е. $x\varphi_2\theta_1 = 0$. Из того, что компонента элемента $x\varphi_2$ в прямом слагаемом b_1 равна нулю, следует $x\varphi_2 \leqslant b_2$, а так как

$$(x\varphi_2)(\varphi_1\theta_2) = x(\varphi_2\varphi_1)\theta_2 = 0,$$

то $x\varphi_2 \leqslant m_{22}$. С другой стороны, по лемме 10 с переменой ролей первого и второго из разложений (1),

$$x\varphi_1 \leqslant m_{11}\varphi_1 \leqslant n_{11}.$$

Таким образом,

$$x \leqslant x\varphi_1 + x\varphi_2 \leqslant n_{11} + m_{22}.$$

Пусть теперь наше утверждение доказано для случая $k-1$ и пусть дано, что $x(\varphi_2\theta_1)^k = 0$. Известно, что $x \leqslant x\varphi_1 + x\varphi_2$, причем, снова по лемме 10, $x\varphi_1 \leqslant n_{11}$. С другой стороны,

$$x\varphi_2 \leqslant x\varphi_2\theta_1 + x\varphi_2\theta_2.$$

Так как $x\varphi_2\theta_1 \leqslant b_1$ и $(x\varphi_2\theta_1)(\varphi_2\theta_1)^{k-1} = 0$, то, по индуктивному предположению, $x\varphi_2\theta_1 \leqslant n_{11} + m_{22}$. Наконец, $x\varphi_2\theta_2 \leqslant b_2$ и, по лемме 1,

$$(x\varphi_2\theta_2)(\varphi_1\theta_2)^k = x(\varphi_2\theta_1)(\varphi_1\theta_2)^k = \ldots = x(\varphi_2\theta_1)^k(\varphi_1\theta_2) = 0,$$

т. е. $x\varphi_2\theta_2 \leqslant m_{22}$. Этим заканчивается доказательство леммы.

Целью всех предшествующих рассмотрений была следующая

ЛЕММА 13. *В прямых разложениях* (6) *слагаемые n_{11} и m_{11} (а также n_{12} и m_{21},* n_{21} и m_{12}, n_{22} и m_{22}) *взаимно замещают друг друга.*

Действительно, справедливость прямого разложения

$$v = n_{11} \dot{+} m_{12} \dot{+} m_{21} \dot{+} m_{22},$$

получающегося из второго из разложений (6) заменой слагаемого m_{11} через n_{11}, непосредственно вытекает из лемм 11 и 12. Имеет место, по соображениям симметрии, и прямое разложение

$$v = m_{11} \dot{+} n_{12} \dot{+} n_{21} \dot{+} n_{22},$$

т. е. утверждение леммы для пары слагаемых n_{11}, m_{11} доказано. Легко видеть, далее, что, например, слагаемые n_{12} и m_{21} соответствуют друг другу так же, как n_{11} и m_{11}. Действительно, элемент n_{11} содержится в a_1 и является суммой элементов, аннулируемых степенями отображения $\theta_2\varphi_1$; ему соответствует элемент m_{11}, содержащийся в b_1 и являющийся суммой элементов, аннулируемых степенями отображения $\varphi_2\theta_1$. Тогда элементу n_{12}, содержащемуся в a_1 и являющемуся суммой элементов, аннулируемых степенями отображения $\theta_1\varphi_1$, должен соответствовать элемент, содержащийся в b_2 и являющийся суммой элементов, аннулируемых степенями отображения $\varphi_2\theta_2$, т. е. элемент m_{21}.

Таким образом, лемма 13 позволяет утверждать существование прямо подобных продолжений для прямых разложений (1), если эти разложения таковы, что для них $v=1$, т. е. $n_i = a_i$, $i = 1, 2$ и $m_j = b_j$, $j = 1, 2$. В следующем параграфе будет рассмотрен один случай, когда эти предположения на самом деле имеют место.

§ 4

В работе автора ([7]) было введено понятие центра пары прямых разложений единицы во вполне дедекиндовой структуре: если

$$1 = \dot{\sum_{\alpha}} a_\alpha = \dot{\sum_{\beta}} b_\beta \tag{7}$$

и если $x\varphi_\alpha$ и $x\theta_\beta$ — компоненты элемента x соответственно в a_α и в b_β, то **центром** этой пары разложений будет элемент

$$z = \prod_{\alpha,\beta} (\overline{a}_\alpha + \overline{b}_\beta) = \sum_{\alpha,\beta} b_\beta\varphi_\alpha \cdot \overline{b}_\beta\varphi_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha\theta_\beta \cdot \overline{a}_\alpha\theta_\beta,$$

где, например, $\overline{a}_\alpha$ означает дополнение к элементу a_α в первом из разложений (7). Равенство элемента z нулю необходимо и достаточно для существования у разложений (7) общего продолжения.

Элемент z может быть переписан в следующем виде:

$$z = \sum_{\alpha,\beta} \overline{a}_\alpha \theta_\beta\varphi_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \overline{b}_\beta\varphi_\alpha\theta_\beta. \tag{8}$$

Действительно,

$$\overline{a}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha = a_\alpha[b_\beta(\overline{a}_\alpha + \overline{b}_\beta) + \overline{a}_\alpha] = a_\alpha(b_\beta + \overline{a}_\alpha)(\overline{a}_\alpha + \overline{b}_\beta) =$$
$$= a_\alpha(b_\beta + \overline{a}_\alpha) \cdot a_\alpha(\overline{b}_\beta + \overline{a}_\alpha) = b_\beta\varphi_\alpha \cdot \overline{b}_\beta\varphi_\alpha.$$

Так как, например, $\sum_{\beta} \overline{a}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha \leqslant a_\alpha$, то (8) можно переписать в виде двух прямых разложений, индуцируемых прямыми разложениями (7):

$$z = \dot{\sum_{\alpha}} \left(\sum_{\beta} \bar{a}_{\alpha} \theta_{\beta} \varphi_{\alpha} \right) = \dot{\sum_{\beta}} \left(\sum_{\alpha} \bar{b}_{\beta} \varphi_{\alpha} \theta_{\beta} \right).$$

Эти прямые разложения сами обладают центром, который мы обозначим через z'' (полагая $z' = z$) и назовем вторым центром пары разложений (7). Продолжая так далее, мы получим убывающую последовательность центров

$$z' = z \geqslant z'' \geqslant z''' \geqslant \ldots$$

пары прямых разложений (7).

Возвращаемся к рассмотрению прямых разложений (1) с *двумя* слагаемыми каждое.

ТЕОРЕМА 1. *Если последовательность центров пары прямых разложений* (1) *на конечном месте достигает нуля,* $z^{(n)} = 0$, *то эти разложения обладают прямо подобными продолжениями.*

Доказательство. Пусть прямые разложения k-ого центра $z^{(k)}$, индуцируемые прямыми разложениями (1), будут

$$z^{(k)} = z_{a_1}^{(k)} \dot{+} z_{a_2}^{(k)} = z_{b_1}^{(k)} \dot{+} z_{b_2}^{(k)}. \tag{9}$$

Докажем, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$a_1 (\theta_1 \varphi_1 \theta_2 \varphi_1)^k \leqslant z_{a_1}^{(k)}. \tag{10}$$

Действительно, по лемме 1,

$$a_1 \theta_1 \varphi_1 \theta_2 \varphi_1 = a_1 \theta_1 \varphi_2 \theta_2 \varphi_1 = (a_1 \theta_1 \varphi_2)\, \theta_1 \varphi_1 \leqslant a_2 \theta_1 \varphi_1 \leqslant z'_{a_1},$$

так как в нашем случае $z'_{a_1} = a_2 \theta_1 \varphi_1 + a_2 \theta_2 \varphi_1$. Если же формула (10) уже доказана для k, то ее справедливость для $k+1$ следует из того, что $z^{(k+1)}$ — первый центр для прямых разложений (9) элемента $z^{(k)}$, индуцируемых разложениями (1), а для элемента x, содержащегося в $z^{(k)}$, элементы $x\varphi_i$, $x\theta_j$ можно толковать, очевидно, как компоненты элемента x в прямых разложениях (9).

По условию теоремы, $z^{(n)} = 0$. Отсюда следует $z_{a_1}^{(n)} = 0$, т. е., согласно (10), $a_1 (\theta_1 \varphi_1 \theta_2 \varphi_1)^n = 0$, откуда $a_1 = n_1$. Аналогично, $a_2 = n_2$, $b_j = m_j$, $j = 1, 2$. Отсюда, в силу леммы 13, следует справедливость теоремы 1.

Сопоставим эту теорему с теоремой 4 из работы ([7]) автора. Правда, там рассматривались прямые разложения с любым, даже бесконечным, числом слагаемых и, кроме того, не использовалось условие (*). Однако условие, которое накладывалось там на центр данной пары разложений — в одном из разложений центр должен содержаться в одном из прямых слагаемых — представляет весьма частный случай предположения, что разложения центра, индуцируемые заданными прямыми разложениями единицы, обладают *общим* продолжением, т. е. что *второй центр* заданных разложений *равен нулю*. Задача объединения указанных двух теорем остается пока открытой.

§ 5

Сейчас результаты § 3 будут использованы для доказательства следующей теоремы о группах с произвольной системой операторов, являющейся обобщением теоремы Ремака—Шмидта:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть дана группа G с произвольной системой операторов, обладающая следующим свойством: если K и Z — соответственно коммутант и допустимый центр этой группы, то всякая подгруппа группы Z, на которую может быть операторно-гомоморфно отображена фактор-группа G/K, обладает (как группа с операторами) главным рядом. Тогда для двух любых прямых разложений группы G (причем число прямых множителей может быть и бесконечным) существуют центральноизоморфные продолжения.*

Из этой теоремы следует, в частности, *существование центрально изоморфных продолжений для прямых разложений такой группы* (с произвольной системой операторов), *допустимый центр которой или же фактор-группа по коммутанту сами обладают главным рядом.*

Доказательство. Продолжим сперва изучение прямых разложений (1) во вполне дедекиндовой структуре S (§§ 1—3). Будем считать, что n_i и m_j хотя и не обязательно совпадают с a_i и соответственно с b_j, но что они служат для них прямыми слагаемыми, т. е. что

$$a_i = n_i \dot{+} \bar{a}_i, \quad i = 1, 2; \qquad b_j = m_j \dot{+} \bar{b}_j, \quad j = 1, 2. \tag{11}$$

ЛЕММА 14. $\bar{a}_1(m_1 + b_2) = 0$, *а также* $\bar{a}_1(m_2 + b_1) = 0$.

Действительно, введем обозначение $\bar{a}_1(m_1 + b_2) = x$ и положим $x \neq 0$. Так как элемент $m_1 + b_2$ представлнет сумму элементов $c^{(k)} = m_1^{(k)} + b_2$, $k = 1, 2, \ldots$, то из $x \neq 0$ следует, ввиду (*), существование такого k, что $y = \bar{a}_1 c^{(k)} \neq 0$. Тогда

$$y(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k+1} \leqslant c^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k+1} = m_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k+1} + b_2(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k+1}.$$

Второе слагаемое правой части равно нулю, так как $b_2\theta_1 = 0$. С другой стороны, в силу леммы 1 и равенства $m_1^{(k)}\theta_1 = m_1^{(k)}$,

$$m_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k+1} = m_1^{(k)}(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^{k+1} = m_1^{(k)}(\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_1)^k\varphi_2\theta_1\varphi_1 = 0.$$

Таким образом, $y(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k+1} = 0$, а так как $y \leqslant a_1$, то $y \leqslant n_1$ и поэтому, ввиду (11), $y \leqslant n_1\bar{a}_1 = 0$. Из этого противоречия вытекает, что $x = 0$. Второе утверждение леммы доказывается таким же путем, если принять в расчет равенство

$$a_1(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k+1} = a_1(\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{k+1}.$$

Перейдем к содержащемуся в формулировке теоремы теоретико-групповому случаю, причем ограничимся сперва рассмотрением прямых разложений группы G с *двумя* множителями каждое,

$$G = A_1 \times A_2 = B_1 \times B_2. \tag{12}$$

Символы φ_i и θ_j будут теперь применяться для обозначения компоненты элемента или подгруппы в A_i и соответственно в B_j. Роль, которую в §§ 1—3 играли элементы n_{i1}, n_i, m_j и т. д., будут теперь играть (допустимые) подгруппы, обозначаемые соответственно N_{i1}, N_i, M_j и т. д.

ЛЕММА 15. *Убывающие последовательности подгрупп*

$$\left.\begin{array}{ll} A_i \supseteq A_i\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i \supseteq \ldots \supseteq A_i(\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i)^k \supseteq \ldots, & i=1, 2, \\ B_j \supseteq B_i\varphi_1\theta_i\varphi_2\theta_i \supseteq \ldots \supseteq B_j(\varphi_1\theta_i\varphi_2\theta_i)^k \supseteq \ldots, & j=1, 2 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

обрываются, т. е. существует такое n, что

$$\left.\begin{array}{ll} A_i(\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i)^n = A_i(\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i)^{n+1} = \ldots = \overline{A}_i, & i=1, 2, \\ B_j(\varphi_1\theta_i\varphi_2\theta_i)^n = B_i(\varphi_1\theta_i\varphi_2\theta_i)^{n+1} = \ldots = \overline{B}_i, & j=1, 2. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Отображения $\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i$ и $\varphi_1\theta_i\varphi_2\theta_j$ будут для $\overline{A}_i$ и, соответственно, для $\overline{B}_j$ изоморфными отображениями на себя.

Действительно, применяя к нашему случаю формулу (10), при $k=1$ мы получим, что, например, подгруппа $A_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ содержится в центре пары прямых разложений (12), т. е. содержится в допустимом центре группы G и, следовательно, будет абелевой. Таким образом, эту подгруппу можно рассматривать как гомоморфный образ фактор-группы прямого множителя A_1 по его коммутанту и, следовательно, как гомоморфный образ фактор-группы самой группы G по ее коммутанту. Отсюда, по условию теоремы, вытекает *существование в подгруппе $A_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ главного ряда*. Обрыв убывающих последовательностей допустимых подгрупп (13), т. е. существование подгрупп $\overline{A}_i$ и $\overline{B}_j$, теперь очевиден. С другой стороны, из (14) вытекает, например, равенство

$$\overline{A}_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = \overline{A}_1.$$

Если бы гомоморфное отображение $\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ было для $\overline{A}_1$ не изоморфным, то, как известно, мы нашли бы в $\overline{A}_1$ бесконечную возрастающую последовательность (допустимых) подгрупп, что противоречит, однако, существованию в $A_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ главного ряда.

ЛЕММА 16. $A_1 = N_1 \times \overline{A}_1$.

Ясно, что N_1, а также и $\overline{A}_1$ (как подгруппа центра), будут нормальными делителями в A_1. Далее, если пересечение $N_1 \cap \overline{A}_1$ содержит отличный от 1 элемент x, то из $x \subset N_1$ следует существование такого k, что $x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k = 1$. Таким образом, отображение $(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k$ оказывается для подгруппы $\overline{A}_1$ не взаимно однозначным, что противоречит, однако, предшествующей лемме. Отсюда следует, что $N_1 \cap \overline{A}_1 = E$. Пусть, наконец, a_1 будет произвольный элемент из A_1. Тогда $a_1(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^n \subset \overline{A}_1$, а так как $\overline{A}_1(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^n = \overline{A}_1$, то существует такой элемент $\overline{a}_1$ из $\overline{A}_1$, что

$$\overline{a}_1(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^n = a_1(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^n.$$

Отсюда

$$(\overline{a}_1^{-1}a_1)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^n = 1,$$

т. е. $\overline{a}_1^{-1}a_1 \subset N_1$ и, следовательно, $a_1 \subset \{N_1, \overline{A}_1\}$.

ЛЕММА 17. $\overline{B}_1 \subset \{\overline{A}_1, B_2\}$, *а также* $\overline{B}_2 \subset \{\overline{A}_1, B_1\}$.

В самом деле, пусть x — произвольный элемент из $\overline{B}_1$. Тогда в $\overline{B}_1$ существует такой элемент y, что $y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = x$, а в B_1 — такой элемент b_1, что $b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^n = y$. Записывая поочередно соответствующие элементы через компоненты в первом и во втором из разложений (12), получим

$$y\varphi_1 = y\varphi_1\theta_1 \cdot y\varphi_1\theta_2 = y\varphi_1\theta_1\varphi_1 \cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2 \cdot y\varphi_1\theta_2 = \\ = y\varphi_1\theta_1\varphi_1 \cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 \cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2 \cdot y\varphi_1\theta_2;$$

отсюда

$$x = y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = (y\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{-1} \cdot y\varphi_1 \cdot (y\varphi_1\theta_2)^{-1} \cdot (y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2)^{-1}.$$

Два последних множителя правой части принадлежат, очевидно, к B_2. Покажем, что два первых множителя, принадлежащие к A_1, содержатся в $\overline{A}_1$. При этом будут использованы леммы 1 и 2 по отношению к элементам группы, а не к элементам структуры, т. е. не к подгруппам. Поэтому некоторые элементы мы будем снабжать штрихами, что следует понимать как указание на то, что данный элемент заменился, быть может, некоторым другим элементом, но из той же допустимой подгруппы*. Таким образом,

$$y\varphi_1 = b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^n\varphi_1 = (b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^n = (b_1\varphi_1)'(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^n \subset \overline{A}_1,$$
$$y\varphi_1\theta_1\varphi_1 = b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^n\varphi_1\theta_1\varphi_1 = (b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^n\theta_1\varphi_1 = \\ = (b_1\varphi_1)'(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^n\theta_1\varphi_1 = [(b_1\varphi_1)'\theta_1\varphi_1](\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1)^n \subset \overline{A}_1.$$

Второе утверждение леммы доказывается таким же путем.

Результаты § 3 и лемма 16 позволяют утверждать существование для прямых разложений (12) следующих продолжений:

$$G = N_{11} \times N_{12} \times \overline{A}_1 \times N_{21} \times N_{22} \times \overline{A}_2 = \\ = M_{11} \times M_{12} \times \overline{B}_1 \times M_{21} \times M_{22} \times \overline{B}_2. \qquad (15)$$

Мы уже знаем из леммы 13, что прямые множители N_{11} и M_{11}, а также N_{12} и M_{21}, N_{21} и M_{12}, N_{22} и M_{22} взаимно замещают друг друга в прямых разложениях (6) для подгруппы V, а поэтому и в прямых разложениях (15) для группы G. С другой стороны, леммы 14 и 17 показывают, что любой из прямых множителей $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ второго из разложений (15) может быть замещен подгруппой $\overline{A}_1$, а поэтому, по соображениям симметрии, и подгруппой $\overline{A}_2$; справедливо, конечно, и соответствующее утверждение с переменой ролей первого и второго из разложений (12). Отсюда следует центральный изоморфизм прямых разложений (15).

§ 6

Рассмотрим теперь два прямых разложения группы G с любым *конечным* числом множителей,

$$G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_l, \qquad (16)$$

---

* Ниже, в § 9, будут указаны соответствующие уточнения лемм 1 и 2. Сейчас в этом нет необходимости.

и будем индукцией по сумме $k+l$ доказывать существование для разложений (16) таких центрально изоморфных продолжений, что *каждое* A_i, $i=1, 2, \ldots, k$, *заменяется произведением* l *множителей, каждое* B_j, $j=1, 2, \ldots, l$, *произведением* k *множителей* (некоторые из них могут, впрочем, равняться E), *причем центрально изоморфное соответствие между этими множителями устанавливается так, что никакие два множителя, входящие в разложение какого-либо* A_i, *не сопоставляются множителям из разложения одного и того же* B_j.

Это утверждение справедливо при $k+l=4$: оно очевидно при $k=1, l=3$ и при $k=3, l=1$, а при $k=l=2$ следует из доказанного выше. Действительно, разложения (15) можно превратить в центрально изоморфные продолжения разложений (12), удовлетворяющие поставленным выше условиям, объединяя, например, $\overline{A}_1$ с N_{11}, $\overline{A}_2$ с N_{22}, $\overline{B}_1$ с M_{21} и $\overline{B}_2$ с M_{22}.

Пусть $k+l>4$ и пусть для всякой группы, удовлетворяющей условиям теоремы 2, и для всех пар ее прямых разложений с меньшим, чем $k+l$, общим числом прямых множителей, наше утверждение уже доказано. Если, например, $k>2$, то введем обозначение

$$A_{k-1}^{*}=A_{k-1}\times A_{k}. \tag{17}$$

Тогда прямые разложения

$$G=A_1\times A_2\times\cdots\times A_{k-1}^{*}=B_1\times B_2\times\cdots\times B_l$$

обладают, по предположению, центрально изоморфными продолжениями

$$G=(A_{11}\times\cdots\times A_{1l})\times(A_{21}\times\cdots\times A_{2l})\times\cdots\times(A_{k-1,1}^{*}\times\cdots\times A_{k-1,l}^{*})=$$
$$=(B_{11}\times\cdots\times B_{1,k-1})\times(B_{21}\times\cdots\times B_{2,k-1})\times\cdots\times(B_{l1}\times\cdots\times B_{l,k-1}).$$

Так как группа A_{k-1}^{*}, как прямой множитель группы G, также удовлетворяет условиям теоремы 2 и $2+l<k+l$, то два прямых разложения группы A_{k-1}^{*}, а именно (17) и

$$A_{k-1}^{*}=A_{k-1,1}^{*}\times\cdots\times A_{k-1,l}^{*},$$

обладают центрально изоморфными продолжениями

$$A_{k-1}^{*}=(A_{k-1,1}\times\cdots\times A_{k-1,l})\times(A_{k1}\times\cdots\times A_{kl})=$$
$$=(A_{k-1,1,1}^{*}\times A_{k-1,1,2}^{*})\times\cdots\times(A_{k-1,l,1}^{*}\times A_{k-1,l,2}^{*}).$$

Если $A_{k-1,j}^{*}\simeq B_{j,k-1}$, $j=1, 2, \ldots, l$, и если этот центральный изоморфизм ставит в соответствие прямому разложению $A_{k-1,j}^{*}=A_{k-1,j,1}^{*}\times A_{k-1,j,2}^{*}$ прямое разложение $B_{j,k-1}=B_{j,k-1,1}\times B_{j,k-1,2}$, то, очевидно, прямые разложения

$$G=(A_{11}\times\cdots\times A_{1l})\times(A_{21}\times\cdots\times A_{2l})\times\ldots$$
$$\cdots\times(A_{k-1,1}\times\cdots\times A_{k-1,l})\times(A_{k1}\times\cdots\times A_{kl})=$$
$$=(B_{11}\times\cdots\times B_{1,k-1,1}\times B_{1,k-1,2})\times(B_{21}\times\cdots\times B_{2,k-1,1}\times B_{2,k-1,2})\times\cdots$$
$$\cdots\times(B_{l1}\times\cdots\times B_{l,k-1,1}\times B_{l,k-1,2})$$

будут искомыми центрально изоморфными продолжениями разложений (16).

§ 7

Для окончания доказательства теоремы 2 нам остается рассмотреть случай прямых разложений с *бесконечным* числом множителей. Предварительно введем следующее новое понятие:

Некоторую группу (с произвольной системой операторов) будем называть F-группой, если отображение в единицу является единственным операторно-гомоморфным отображением фактор-группы этой группы по ее коммутанту внутрь ее допустимого центра. В частности, F-группой будет всякая группа без центра, а также всякая группа, совпадающая со своим коммутантом.

Справедлива следующая*

ЛЕММА 18. *Два любых прямых разложения произвольной F-группы обладают общим продолжением.*

В самом деле, пусть даны два прямых разложения F-группы G,

$$G = \dot{\prod_{\alpha}} A_\alpha = \dot{\prod_{\beta}} B_\beta .$$

Ввиду теоремы 3 (7) достаточно доказать, что центр этой пары разложений равен E. В нашем случае, в силу соотношения (8), он равен $\prod\limits_{\alpha,\beta} A_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha$. Однако всякая подгруппа $\overline{A}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha$ лежит в центре группы G и, будучи абелевым гомоморфным образом прямого множителя A_α, будет служить гомоморфным образом фактор-группы самой группы G по ее коммутанту. Отсюда, так как G — F-группа, следует $\overline{A}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha = E$.

Обобщением леммы Головина (2) является следующая

ЛЕММА 19. *Пусть даны два прямых разложения некоторой группы G с произвольной системой операторов,*

$$G = \dot{\prod_{\alpha}} A_\alpha \times \dot{\prod_{\gamma}} C_\gamma = \dot{\prod_{\beta}} B_\beta \times \dot{\prod_{\delta}} D_\delta . \tag{18}$$

Если подгруппы

$$C = \dot{\prod_{\gamma}} C_\gamma, \quad D = \dot{\prod_{\delta}} D_\delta$$

являются F-группами и если прямые разложения

$$G = \dot{\prod_{\alpha}} A_\alpha \times C = \dot{\prod_{\beta}} B_\beta \times D$$

обладают центрально изоморфными продолжениями, то центрально изоморфными продолжениями обладают и заданные прямые разложения (18).

---

* Для случая прямых разложений с конечным числом множителей см. Фиттинг (9) теорема 6.

Доказательство этой леммы опирается на лемму 18, а в остальном является дословным повторением доказательства леммы Головина, приведенного в § 27 книги автора ([6]), и поэтому мы его опускаем.

ЛЕММА 20. *Если группа G удовлетворяет условиям теоремы 2, то из любого прямого разложения этой группы можно так удалить конечное число прямых множителей, что произведение оставшихся множителей будет F-группой.*

Пусть, в самом деле, дано произвольное прямое разложение группы G. Покажем, что в этом разложении содержится лишь *конечное* число таких множителей, в допустимый центр каждого из которых можно нетривиальным образом гомоморфно отобразить фактор-группы *бесконечного* числа прямых множителей заданного разложения по их коммутантам. Действительно, в противном случае можно было бы указать *счетную* систему прямых множителей, фактор-группы которых по коммутантам нетривиально отображаются в допустимые центры *различных* прямых множителей. Это приводит, однако, в противоречие с условиями теоремы 2, к существованию гомоморфного отображения фактор-группы всей группы G по ее коммутанту на такую подгруппу ее допустимого центра, которая является прямым произведением счетного множества подгрупп и поэтому не может обладать главным рядом.

Удалим из заданного прямого разложения те множители (в конечном числе), о которых шла речь в предыдущем абзаце, и покажем, что теперь вообще можно указать лишь конечное число множителей, фактор-группы которых по коммутантам допускают нетривиальное гомоморфное отображение внутрь допустимого центра какого-либо из (оставшихся) множителей. В самом деле, если бы таких множителей было бесконечно много, то, так как в допустимый центр каждого из оставшихся множителей может теперь нетривиально отображаться лишь конечное число указанных фактор-групп, мы снова могли бы указать счетную систему прямых множителей, фактор-группы которых по коммутантам нетривиально отображаются в допустимые центры различных прямых множителей, что опять противоречит условиям теоремы 2. Если мы удалим и эти множители (в конечном числе), то произведение оставшихся множителей уже будет, как легко видеть, F-группой.

Леммы 19 и 20 сводят общий случай теоремы 2 на рассмотренный в предшествующем параграфе случай разложений с конечным числом прямых множителей. Этим заканчивается доказательство теоремы 2.

§ 8

Сейчас мы докажем теорему, представляющую собой обобщение теоремы Коржинека, причем будем рассматривать лишь группы без операторов (напоминаем, что **п е р и о д и ч е с к о й** называется группа, все элементы которой имеют конечный порядок, и что периодическая абелева группа однозначно разлагается в прямое произведение своих примарных компонент, т. е. максимальных подгрупп, порядки всех элементов которых суть степени одного и того же простого числа):

ТЕОРЕМА 3. *Пусть группа G обладает следующим свойством: если K и Z будут соответственно ее коммутант и центр, то всякая подгруппа группы Z, на которую может быть гомоморфно отображена фактор-группа G/K будет периодической, причем ее примарные компоненты удовлетворяют условию минимальности. Тогда два любых прямых разложения группы G с конечным числом множителей обладают центрально изоморфными продолжениями**.

Из этой теоремы, в частности, следует существование центрально изоморфных продолжений для прямых разложений (с конечным числом множителей) такой группы G, которая удовлетворяет одному из следующих условий:

1° Центр Z периодичен и его примарные компоненты удовлетворяют условию минимальности (уже здесь содержится теорема Коржинека).

2° Фактор-группа G/K периодична и ее примарные компоненты удовлетворяют условию минимальности.

3° Группа G/K периодична, а примарные компоненты максимальной периодической подгруппы группы Z удовлетворяют условию минимальности.

4° Группа Z периодична, а группа G/K имеет конечный ранг и примарные компоненты ее максимальной периодической подгруппы удовлетворяют условию минимальности.

Существенную роль в доказательстве теоремы 3 играет следующая лемма, относящаяся к произвольной группе G и обобщающая теорему 2,5 из работы Коржинека ([3]):

ЛЕММА 21. *В группе G задан эндоморфизм χ, причем совокупность элементов, отображающихся в единицу при степенях этого эндоморфизма, составляет нормальный делитель N. Пусть фактор-группа G/N будет периодической абелевой группой, причем все ее примарные компоненты удовлетворяют условию минимальности. Пусть, с другой стороны, среди максимальных подгрупп группы G, отображающихся при χ изоморфно на себя, имеется нормальный делитель H. Тогда $G = N \times H$.*

Доказательство этой леммы ведется по существу так же, как и доказательство теоремы 2,5 Коржинека. Ясно, прежде всего, что $N \cap H = E$ и что прямое произведение $N \times H = Q$ является нормальным делителем в G, отображающимся в себя при эндоморфизме χ, причем фактор-группа G/Q будет, как и G/N, периодической абелевой и ее примарные компоненты удовлетворяют условию минимальности. Предположим, что Q отлично от G, и приведем это к противоречию.

По предположению фактор-группа $\bar{G} = G/Q$ отлична от E, а поэтому отлична от E хотя бы одна из ее примарных компонент, т. е. можно

---

* Подобно тому, как теорема Коржинека справедлива и для групп с операторами, если только всякая подгруппа допустимого центра сама допустима, наша теорема 3 также может быть распространена на такие операторные группы, в которых каждая из тех подгрупп центра, о которых идет речь в формулировке теоремы, удовлетворяет условию, что *все* ее подгруппы допустимы. Проверка этого предоставляется читателю.

указать такое простое число p, что подгруппа $\bar{G}_p$, состоящая из всех элементов порядка p группы $\bar{G}$, отлична от E. Так как, на основании сказанного выше, в примарной (по p) компоненте группы $\bar{G}$ выполняется условие минимальности, то *подгруппа $\bar{G}_p$ будет конечной*.

Если $x \subset G$ и $x \not\subset Q$, *то и* $x\chi \not\subset Q$. Действительно, из $x\chi \subset Q$ следует $x\chi = nh$, где $n \subset N$, $h \subset H$. Существует, по определению H, такой элемент $h' \subset H$, что $h'\chi = h$ и, следовательно, $(xh'^{-1})\chi = n \subset N$. Отсюда, ввиду определения N, вытекает, однако, что $xh'^{-1} = n' \subset N$, т. е. $x = n'h' \subset Q$.

Отсюда, а также из конечности подгруппы $\bar{G}_p$ и ее полной характеристичности в группе $\bar{G}$, следует, что *отображение $\bar{\chi}$, переводящее всякий элемент $\bar{a} = Qx$ группы $\bar{G}_p$ в элемент*

$$\bar{a}\chi = (Qx)\chi = Q\chi \cdot x\chi = Q \cdot x\chi,$$

будет для $\bar{G}_p$ изоморфным отображением на себя.

Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_l$ — база подгруппы $\bar{G}_p$. Выбираем в этих смежных классах по Q представители a_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, а в произвольном элементе $\bar{a}$ группы $\bar{G}_p$,

$$\bar{a} = \bar{a}_1^{d_1}\bar{a}_2^{d_2} \ldots \bar{a}_l^{d_l}; \quad 0 \leqslant d_i < p,$$

представителем считаем элемент $a = a_1^{d_1}a_2^{d_2} \ldots a_l^{d_l}$. Из $\bar{a}^p = 1$ следует $a^p \subset Q$, т. е.

$$a^p = nh, \tag{19}$$

где $n \subset N$, $h \subset H$, причем существует такой показатель s_a, что

$$n\chi^{s_a} = 1. \tag{20}$$

С другой стороны, если a' — представитель смежного класса, в котором лежит элемент $a\chi$, то

$$a\chi = n'h'a', \tag{21}$$

где $n' \subset N$, $h' \subset H$, причем существует такой показатель t_a, что

$$n'\chi^{t_a} = 1. \tag{22}$$

Наконец, так как фактор-группа G/N абелева, то

$$a_i^{-1}a_j^{-1}a_ia_j = n_{ij} \subset N, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant l, \tag{23}$$

причем существует такой показатель r_{ij}, что

$$n_{ij}\chi^{r_{ij}} = 1. \tag{24}$$

Пусть число k будет наибольшим среди всех чисел s_a, t_a и r_{ij}. Если a — любой из представителей, то положим

$$a\chi^k = b;$$

в частности, $a_i\chi^k = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Из $a = a_1^{d_1}a_2^{d_2} \ldots a_l^{d_l}$, очевидно, следует, что

$$b = b_1^{d_1}b_2^{d_2} \ldots b_l^{d_l}, \quad 0 \leqslant d < p, \tag{25}$$

причем из доказанной выше изоморфности отображения χ для группы

$\overline{G}_p$ вытекает, что элементы b снова будут представителями всех смежных классов, составляющих эту группу.

Ввиду (19) и (20)

$$b^p = a^p\chi^k = (nh)\chi^k = h\chi^k \subset H. \tag{26}$$

С другой стороны, на основании (21) и (22)

$$b\chi = a\chi^{k+1} = (n'h'a')\chi^k = h'\chi^k \cdot a'\chi^k = h''b', \tag{27}$$

где $h'' \subset H$, $b' = a'\chi^k$.

Покажем, что элементы b перестановочны между собою, причем, ввиду (25), это достаточно проверить для элементов b_i. Действительно, на основании (23) и (24)

$$b_i^{-1}b_j^{-1}b_ib_j = (a_i^{-1}a_j^{-1}a_ia_j)\chi^k = n_{ij}\chi^k = 1.$$

Отсюда, а также из (25) и (26) вытекает, что произведение двух элементов b, а также элемент, обратный для некоторого элемента b, могут быть записаны в виде произведения некоторого элемента из H на некоторый элемент b. Таким образом, *подгруппа H' группы G, порожденная подгруппой H и всеми элементами b, состоит из элементов вида hb.*

Из (27) и изоморфности отображения $\overline{\chi}$ для $\overline{G}_p$ вытекает, что χ отображает подгруппу H' на себя, притом изоморфно: из $(hb)\chi = 1$ следовало бы $b\chi \subset H$, что возможно лишь при $b = 1$. Мы приходим, следовательно, к противоречию с предположением, что H — максимальная подгруппа группы G, отображающаяся при χ изоморфно на себя. Этим заканчивается доказательство леммы 21.

§ 9

Докажем еще одну лемму, относящуюся к произвольной группе G и обобщающую лемму 2,2 из работы Коржинека ([3]).

ЛЕММА 22. *Пусть в группе G дан эндоморфизм χ. Если среди максимальных подгрупп группы G, отображающихся при χ изоморфно на себя, есть нормальный делитель H, являющийся периодической абелевой группой, все примарные компоненты которой удовлетворяют условию минимальности, то H будет единственной максимальной подгруппой группы G, отображающейся при χ изоморфно на себя.*

Действительно, пусть F — произвольная подгруппа группы G, отображающаяся при χ на себя изоморфно. Если $F' = H \cap F$, то F' будет, очевидно, отображаться при χ изоморфно внутрь себя, причем даже на себя, так как иначе в одной из примарных компонент группы H существовала бы бесконечная убывающая цепочка подгрупп. Если, далее, $\overline{H} = \{H, F\}$, то при χ подгруппа $\overline{H}$ будет отображаться на себя. Это отображение будет даже изоморфным. Действительно, всякий элемент из $\overline{H}$ можно записать в виде hf, где $h \subset H$, $f \subset F$. Если теперь $(hf)\chi = 1$, то $h\chi = (f^{-1})\chi \subset (H \cap F) = F'$. Отсюда, на основании доказанного выше, следует, что и h и f принадлежат к F', а так как F' ото-

бражается при χ на себя изоморфно, то из $h\chi = (f^{-1})\chi$ следует $h = f^{-1}$, т. е. $hf = 1$. Таким образом, учитывая, что подгруппа H максимальна и отображается при χ на себя изоморфно, мы получаем $\bar{H} = H$, т. е. $F \subseteq H$.

Перейдем теперь к рассмотрению группы G, удовлетворяющей условиям теоремы 3, и ее прямых разложений

$$G = A_1 \times A_2 = B_1 \times B_2 \tag{28}$$

с двумя множителями каждое. Будем считать, что символы φ_i, θ_j, N_{ij}, N_i, M_j и т. д. имеют тот же смысл, что и в § 5, и прежде всего уточним леммы 1 и 2, так как мы должны будем применять их к элементам группы G.

ЛЕММА 1′. *Для любого элемента x группы G*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = (x^{-1})\,\theta_1\varphi_2\theta_2$$

(*справедливы также равенства, получающиеся из указанного переменой ролей θ_1 и θ_2, а также θ и φ*).

Действительно, так как

$$x\theta_1 = x\theta_1\varphi_1 \cdot x\theta_1\varphi_2,$$

то

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 \cdot x\theta_1\varphi_2\theta_2 = (x\theta_1\varphi_1 \cdot x\theta_1\varphi_2)\,\theta_2 = x\theta_1\theta_2 = 1.$$

ЛЕММА 2′. *Если элемент x содержится в подгруппе A_1, то*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

Доказательство такое же, как для леммы 2, причем следует учесть, что в ходе доказательства леммой 1′ придется воспользоваться четыре раза.

ЛЕММА 23. $A_1 = N_1 \times \bar{A}_1$, *где $\bar{A}_1$ — максимальная подгруппа группы A_1, отображающаяся на себя изоморфно при эндоморфизме*

$$\chi = \theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = \theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1 \tag{29}$$

группы A_1.

Прежде всего, равенство (29) непосредственно вытекает из леммы 2′. Далее, фактор-группа A_1/N_1' изоморфна $A_1\chi$, т. е., согласно (10), изоморфна подгруппе центра группы A_1. Так как гомоморфное отображение подгруппы A_1 на $A_1\chi$ можно расширить до гомоморфного отображения всей группы G на $A_1\chi$ и так как подгруппа $A_1\chi$ абелева, то в соответствии с условиями теоремы можно утверждать, что фактор-группа A_1/N_1' — периодическая абелева группа, все примарные компоненты которой удовлетворяют условию минимальности. Тем более этим свойством обладает фактор-группа A_1/N_1, изоморфная фактор-группе группы A_1/N_1'. С другой стороны, все максимальные подгруппы A_1, отображающиеся при χ изоморфно на себя (а существование таких подгрупп доказывается обычным трансфинитным процессом), должны содержаться в подгруппе $A_1\chi$ и поэтому будут нормальными делителями. Применяя лемму 22, мы убеждаемся, что такая подгруппа будет единственной; обозначим

ее через $\overline{A}_1$. Применяя, наконец, к группе A_1 и эндоморфизму χ лемму 21, мы приходим к прямому разложению

$$A_1 = N_1 \times \overline{A}_1.$$

Аналогичный результат имеет место и для других множителей прямых разложений (28), т. е.

$$A_2 = N_2 \times \overline{A}_2, \quad B_j = M \times \overline{B}_j, \quad j = 1, 2,$$

где $\overline{A}_2$ и $\overline{B}_j$ — максимальные подгруппы групп A_2 и, соответственно, B_j, отображающиеся изоморфно на себя при эндоморфизмах $\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = \theta_2\varphi_2\theta_1\varphi_2$ и, соответственно, $\varphi_1\theta_j\varphi_2\theta_j = \varphi_2\theta_j\varphi_1\theta_j$.

ЛЕММА 24. $\overline{B}_j\varphi_i \subseteq \overline{A}_i, \quad \overline{A}_i\theta_j \subseteq \overline{B}_j, \quad i, j = 1, 2.$

Достаточно доказать лишь одно из включений, например, $\overline{B}_1\varphi_1 \subset \overline{A}_1$. Мы знаем, что

$$\overline{B}_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = \overline{B}_1 \tag{30}$$

и что отображение $\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1$ изоморфно для $\overline{B}_1$; следовательно, φ_1 отображает подгруппу $\overline{B}_1$ изоморфно внутрь A_1. Применяя к обеим частям равенства (30) отображение φ_1, получаем

$$(\overline{B}_1\varphi_1)\,\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1 = \overline{B}_1\varphi_1;$$

иными, словами, подгруппа $\overline{B}_1\varphi_1$ группы A_1 отображается при эндоморфизме $\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1$ на себя, причем даже изоморфно, так как $\theta_1\varphi_2\theta_1$, ввиду (30), отображает подгруппу $\overline{B}_1\varphi_1$ изоморфно на $\overline{B}_1$, а φ_1, как мы знаем, отображает $\overline{B}_1$ изоморфно на $\overline{B}_1\varphi_1$. Однако, применяя дважды лемму 1′, мы получаем

$$\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1 = \theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1,$$

а поэтому подгруппа $\overline{B}_1\varphi_1$ должна содержаться в единственной максимальной подгруппе группы A_1, отображающейся при $\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ изоморфно на себя, т. е. в $\overline{A}_1$.

ЛЕММА 25. $\overline{B}_1 \subset \{\overline{A}_1, B_2\}$, *а также* $\overline{B}_2 \subset \{\overline{A}_1, B_1\}$.

В самом деле, если x — произвольный элемент из $\overline{B}_1$, а y — такой элемент из $\overline{B}_1$, что $y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = x$, то, как и при доказательстве леммы 17, мы придем к равенству

$$x = (y\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{-1} \cdot y\varphi_1 \cdot (y\varphi_1\theta_2)^{-1} \cdot (y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2)^{-1}.$$

Два последних множителя правой части принадлежат, очевидно, к B_2. Множитель $y\varphi_1$ содержится в $\overline{A}_1$ (ввиду леммы 24). Наконец, применяя трижды лемму 24, находим, что $y\varphi_1 \subset \overline{A}_1$, и, значит, $y\varphi_1\theta_1 \subset \overline{B}_1$, а следовательно, $y\varphi_1\theta_1\varphi_1 \subset \overline{A}_1$.

Теперь, опираясь на результаты § 3 и на леммы 23, 14 и 25, можно утверждать существование центрально изоморфных продолжений

$$G = N_{11} \times N_{12} \times \overline{A}_1 \times N_{21} \times N_{22} \times \overline{A}_2 = M_{11} \times M_{12} \times \overline{B}_1 \times M_{21} \times M_{22} \times \overline{B}_2$$

для заданных прямых разложений (28) группы G. Для завершения доказательства теоремы 3 остается рассмотреть случай двух прямых разложений с любым конечным числом множителей, для чего следует лишь повторить рассуждения § 6.

Теорема 3 доказана.

Заметим, что задача распространения теоремы 3 на случай прямых разложений с бесконечным числом множителей остается пока открытой. Ввиду этого представляет интерес следующая теорема, справедливая для любых прямых разложений и обобщающая как теорему 2 (для случая групп без операторов), так и теорему Коржинека с обобщением Головина ([2]).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть группа G обладает следующим свойством: если K и Z будут соответственно ее коммутантом и центром, то всякая подгруппа группы Z, на которую может быть гомоморфно отображена фактор-группа G/K, удовлетворяет условию минимальности. Тогда два любых прямых разложения группы G (причем число прямых множителей может быть и бесконечным) обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Для разложений с конечным числом прямых множителей эта теорема следует из теоремы 3, а ее справедливость для прямых разложений с бесконечным числом множителей устанавливается методами § 7, применимыми и к нашему случаю. Действительно, в формулировке леммы 20 слова: «Если группа G удовлетворяет условиям теоремы 2, то ...» можно, как легко видеть, заменить словами:
«Если группа G удовлетворяет условиям теоремы 4, то ...».

§ 10

В работе автора ([7]) показано, что для всех теорем об изоморфизмах прямых разложений групп, которые к тому времени были доказаны, справедливы параллельные им теоремы о двусторонних прямых разложениях колец, причем роль центра группы играет в этих теоремах *идеал $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля*, а центральный изоморфизм заменяется *$\mathfrak{N}$-изоморфизмом*. Это же можно утверждать и по отношению к теоретико-групповым теоремам, доказанным в настоящей работе. Мы начнем с теоремы, параллельной теореме 3.

Будем рассматривать кольцо R, *умножение в котором не предполагается ни коммутативным, ни ассоциативным*. Роль коммутанта будет играть теперь R^2 — квадрат кольца R, т. е. двусторонний идеал, порожденный произведениями всевозможных пар элементов кольца; очевидно, что R^2 — минимальный идеал кольца R, в фактор-кольце по которому произведение любых двух элементов равно нулю. Справедлива следующая теорема (следует помнить, что всякая аддитивная подгруппа идеала $\mathfrak{N}$ является двусторонним идеалом в R):

ТЕОРЕМА 5. *Пусть кольцо R обладает следующим свойством: всякая аддитивная подгруппа идеала $\mathfrak{N}$, на которую может быть гомоморфно отображено фактор-кольцо R/R^2, является периодической,*

причем ее примарные компоненты удовлетворяют условию минимальности. Тогда два любых двусторонних прямых разложения кольца R с конечным числом слагаемых обладают $\mathfrak{N}$-изоморфными продолжениями.

Доказательство этой теоремы не отличается по существу от доказательства теоремы 3. Результаты §§ 1—3, а также лемма 14, относящиеся к случаю вполне дедекиндовых структур, применимы, в частности, и к структуре двусторонних идеалов кольца. Что же касается лемм 21—25, то их перенесение на случай колец не представляет затруднений; следует лишь помнить, что теперь роль абелевых групп играют кольца, в которых произведение любых двух элементов равно нулю, и, вообще, перестановочным элементам соответствуют элементы, произведение которых равно нулю. При проведении конца доказательства придется воспользоваться следующим результатом из работы автора ([7]): двусторонние идеалы кольца, прямо подобные в структуре всех двусторонних идеалов этого кольца, будут $\mathfrak{N}$-изоморфными.

Следующая теорема, параллельная теореме 4, обобщает теорему 10 из работы автора ([7]):

ТЕОРЕМА 6. *Пусть кольцо R обладает следующим свойством: всякая аддитивная подгруппа идеала $\mathfrak{N}$, на которую может быть гомоморфно отображено фактор-кольцо R/R^2, удовлетворяет условию минимальности. Тогда два любых двусторонних прямых разложения кольца R (причем число прямых слагаемых может быть и бесконечным) обладают $\mathfrak{N}$-изоморфными продолжениями.*

Для случая разложений с конечным числом слагаемых эта теорема вытекает из теоремы 5. Ее справедливость в общем случае доказывается повторением рассуждений из § 7, причем роль F-группы теперь играет F-к о л ь ц о, т. е. такое кольцо R, что отображение в нуль это единственное гомоморфное отображение его фактор-кольца R/R^2 внутрь идеала $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля.

§ 11

Известна следующая теорема Бэра ([1]): тогда и только тогда два любых прямых разложения счетной периодической абелевой группы обладают изоморфными продолжениями, если эта группа разложима в прямое произведение циклических групп и групп типа p^{∞}. Периодическая абелева группа, все примарные компоненты которой удовлетворяют условию минимальности, заведомо обладает таким разложением ([5]), причем по каждому простому числу в нем будет лишь конечное число множителей. Естественно возникает вопрос о возможности обобщения теорем 3 и 5 путем замены в их формулировках предположения, что примарные компоненты подгруппы центра (соответственно, идеала $\mathfrak{N}$) удовлетворяют условию минимальности, требованием, что эта подгруппа разложима в прямое произведение циклических групп и групп типа p^{∞}, причем при сохранении требования периодичности указанной подгруппы это обобщение было бы окончательным. Пока не удалось, однако, ни доказать соответствующие теоремы, ни построить противоречащие примеры.

При отказе от требования периодичности указанной подгруппы уже трудно ожидать справедливости какой-либо теоремы типа теоремы 3. Так, сейчас будет построен пример некоммутативной группы, обладающей неизоморфными прямыми разложениями с неразложимыми множителями, хотя и центр этой группы, и ее фактор-группа по коммутанту обладают конечным числом образующих.

Рассмотрим группу A с образующими a_1 и a_2 и одним определяющим соотношением $a_1^2=a_2^2$. Это будет свободное произведение двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой, а поэтому, как известно, центром группы A будет подгруппа $\{a\}$, где $a=a_1^2=a_2^2$ и, кроме того, эта группа не содержит отличных от 1 элементов конечного порядка. Следовательно, группа A не разложима в прямое произведение: если бы такое разложение существовало, то центр $\{a\}$ целиком содержался бы в одном из множителей, а тогда компонента каждого из элементов a_1, a_2 во втором множителе была бы не выше второго порядка.

Рассмотрим, с другой стороны, группу B с образующими b_1 и b_2 и определяющим соотношением $b_1^3=b_2^3$. Эта группа имеет своим центром подгруппу $\{b\}$, где $b=b_1^3=b_2^3$, не содержит элементов конечного порядка, отличных от 1, и, наконец, подобно группе A неразложима в прямое произведение.

Искомая группа G есть прямое произведение групп A и B,

$$G=A\times B. \tag{31}$$

Центр этой группы — прямое произведение двух бесконечных циклических групп $\{a\}$ и $\{b\}$, фактор-группа по коммутанту — прямое произведение двух бесконечных и двух конечных циклических групп. Построим новое прямое разложение группы G, не изоморфное с разложением (31).

Для этого положим

$$\left.\begin{array}{l} c=a^3b^{-2}, \quad d=a^{-1}b, \\ c_1=aa_1b^{-1}, \quad c_2=aa_2b^{-1}, \quad c_3=ab^{-1}b_1, \quad c_4=ab^{-1}b_2. \end{array}\right\} \tag{32}$$

Пусть $C=\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $D=\{d\}$. Так как из (32) вытекают равенства

$$a_1=c_1d, \quad a_2=c_2d, \quad b_1=c_3d, \quad b_2=c_4d,$$

то $G=\{C, D\}$. Далее, элементы из C перестановочны с элементами из D, так как D входит в центр группы G. Докажем, что пересечение подгрупп C и D равно E. Из (32) следует, что

$$c_1^2=c_2^2=c_3^3=c_4^3=c,$$

а также, что каждый из элементов c_1, c_2 перестановочен с каждым из элементов c_3, c_4. Опираясь на эти результаты и на принадлежность элемента c к центру группы, можно утверждать, что всякий элемент x из подгруппы C можно записать в виде произведения некоторой степени элемента c на слово длины l_1, $l_1\geqslant 0$, в котором чередуются первые степени элементов c_1 и c_2, и на слово длины l_2, $l_2\geqslant 0$, в котором чередуются первые и вторые степени элементов c_3 и c_4. Заменяя в этой

записи элементы c_1, c_2, c_3 и c_4 их выражениями из (32), мы придем к записи элемента x в виде произведения элемента из центра на слово длины l_1, в котором чередуются первые степени элементов a_1 и a_2, и на слово длины l_2, в котором чередуются первые и вторые степени элементов b_1 и b_2. Таким образом, элемент x может принадлежать к центру группы G лишь в том случае, если $l_1 = l_2 = 0$, т. е. если x — степень элемента c. Отсюда следует, что

$$C \cap D = \{c\} \cap D = E.$$

Этим доказано существование прямого разложения

$$G = C \times D. \tag{33}$$

Так как центром подгруппы C служит подгруппа $\{c\}$, то неразложимость подгруппы C доказывается так же, как выше для подгрупп A и B. Таким образом, (31) и (33) выражают неизоморфные прямые разложения группы G с неразложимыми множителями.

Соответствующий пример для случая колец пока не построен.

Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 22. X. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baer R., The decomposition of enumerable, primary, abelian groups into direct summands, Quart. J. (Oxford), 6 (1935), 217—221.

[2] Головин О. Н., Множители без центров в прямых разложениях групп, Мат. сб., 6 (1939), 423—426.

[3] Kořinek V., Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sous-groupes. Čas. mat. fis., 66 (1937), 261—286; 67 (1938), 209—210.

[4] Krull W., Über verallgemeinerte endliche abelsche Gruppen, Math. Zeitschr., 23 (1925), 161—196.

[5] Курош А. Г., Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, Math. Ann., 106 (1932), 107—113.

[6] Курош А. Г., Теория групп, Гостехиздат, М.—Л., 1944.

[7] Курош А. Г., Изоморфизмы прямых разложений, Известия АН, серия матем., 7 (1943), 185—202.

[8] Ore O., Direct decompositions, Duke Math. J., 2 (1936), 581—596.

[9] Fitting H., Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Math. Zeitschr., 41 (1936), 380—395.

[10] Шмидт О. Ю., Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math. Zeitschr., 29 (1928), 34—41.

A. KUROSH. ISOMORPHISMS OF DIRECT DECOMPOSITIONS. II

SUMMARY

The present paper is based upon the first two paragraphs of the author's earlier parer [7], where, in particular, *completely Dedekind structures, the center of a pair of direct decompositions, and the ideal* $\mathfrak{N}$ *of complete null divisors* are defined.

§§ 1—3

In these paragraphs Krull's—Kořinek's method (see [4] and [3]) is extended to completely Dedekind structures; the method itself is somewhat improved thereby. A completely Dedekind structure S is considered which satisfies the condition

(*) if x and $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \dots \leqslant y_n \leqslant \dots$

are elements of S such that $xy_n = 0$ for $n = 1, 2, \dots$, then $x \sum_n y_n = 0$.

Suppose that two direct decompositions of the unit in S are given:

$$1 = a_1 \dotplus a_2 = b_1 \dotplus b_2. \tag{1}$$

The component of an element x in the direct summand a_i (resp. b_j) is denoted by $x\varphi_i$ (resp. $x\theta_j$), $i = 1, 2$; $j = 1,2$.

LEMMA 1. *For any* x *in* S

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = x\theta_1\varphi_2\theta_2.$$

LEMMA 2. *If* $x \leqslant a_1$, *then*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

Suppose $n_{11}^{(k)}$ is the sum of all the elements $x \leqslant a_1$, for which $x(\theta_2\varphi_1)^k = 0$, $n_{12}^{(k)}$ is the sum of all $x \leqslant a_1$ with $x(\theta_1\varphi_1)^k = 0$, $k = 1,2, \dots$ The sum (over k) of all $n_{1j}^{(k)}$ is denoted by n_{1j}, $j = 1,2$. Let further $n_1^{(k)}$ be the sum of all $x \leqslant a_1$ such that $x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k = 0$. The sum of all $n_1^{(k)}$ is denoted by n_1.

LEMMA 3. $n_{1j}^{(k)} \leqslant n_1^{(k)}$, $j = 1,2$, $k = 1,2, \dots$

LEMMA 4. *If* $x \leqslant a_1$, *then*

$$x \leqslant x(\theta_1\varphi_1{}^k) + x(\theta_1\varphi_1)^{k-1}(\theta_2\varphi_1) + x(\theta_1\varphi_1)^{k-2}(\theta_2\varphi_1)^2 + \dots + x(\theta_2\varphi_1)^k$$
for $k = 1, 2, \dots$

LEMMA 5. $n_1^{(k)} \leqslant n_{11}^{(k)} + n_{12}^{(k)}$, $k = 1,2, \dots$

LEMMA 6. $n_{11}^{(k)} \cdot n_{12}^{(l)} = 0$, $k, l = 1, 2, \dots$

LEMMA 7. $n^{(k)} = n_{11}^{(k)} \dotplus n_{12}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$

LEMMA 8. $n_1 = n_{11} \dotplus n_{12}$.

We denote by n_{21}, n_{22}, n_2 (resp. m_{j_1}, m_{j_2}, m_j) the elements playing the same rôle with respect to a_2 (resp. b_j) as n_{11}, n_{12}, n_1 do with respect to a_1.

LEMMA 9. $n_1 + n_2 = m_1 + m_2$.

If we put $v=n_1+n_2=m_1+m_2$, then Lemma 8 implies the existence of the direct decompositions

$$v=n_{11}\dot{+}n_{12}\dot{+}n_{21}\dot{+}n_{22}=m_{11}\dot{+}m_{12}\dot{+}m_{21}\dot{+}m_{22}. \qquad (6)$$

LEMMA 10. $n_{11}\theta_1 \leqslant m_{11}$.

LEMMA 11. $n_{11}(m_{12}+m_2)=0$.

LEMMA 12. $m_{11}\leqslant n_{11}+m_{22}$.

LEMMA 13. *The summands* n_{11} *and* m_{11} *in* (6) (*as well as* n_{12} *and* m_{21}, n_{21} *and* m_{12}, n_{22} *and* m_{22}) *may be substituted for one another.*

§ 4

The center z of a pair of direct decompositions

$$1=\dot{\sum_{\alpha}} a_\alpha=\dot{\sum_{\beta}} b_\beta \qquad (7)$$

may be put in the form:

$$z=\sum_{\alpha,\beta}\bar{a}_\alpha\,\theta_\beta\,\varphi_\alpha=\sum_{\alpha,\beta}\bar{b}_\beta\,\varphi_\alpha\,\theta_\beta,$$

where for instance, $\bar{a}_\alpha$ is the complement of a_α in the first dicomposition (1). The decompositions (7) induce two direct decompositions of $z=z'$ which themselves possess a center z''; this is *the second center* of the pair of decompositions (7). Continuing the process, we obtain a descending *sequence of centers* of the pair of decompositions (7).

Basing upon the results of §§ 1—3 we prove

THEOREM 1. *If the sequence of centers of the pair of direct decompositions* (1) *attains the null at a finite step,* $z^{(n)}=0$, *then these decompositions possess directly similar refinements.*

This theorem applied, however, to direct decompositions each having but two summands is connected with Theorem 4 of the author's paper (7): under the conditions of the latter $z^{(2)}=0$.

§§ 5—7

The following generalization of the Remak—Schmidt theorem is here proved:

THEOREM 2. *Let a group* G *be given with an arbitrary system of operators. Suppose* G *has the following property: if* K *and* Z *are the commutant and the admissible center of* G, *respectively, then every subgroup of* Z *which may be an operator-homomorphic image of the factor-group* G/K *possesses, as a group with operators, the principal series. Then for any two direct decompositions of the group* G (*possibly with infinitely many direct factors*) *there exist centrally isomorphic refinements.*

In particular, it follows from this theorem that *there exist centrally isomorphic refinements of direct decompositions of a group such that its admissible center or the factor-group by the commutant have principal series.*

§§ 8—9

For the groups without operators (as well as for the group with operators under a restriction similar to that which guarantees the validity of Kořinek's theorem) the following generalization of Kořinek's theorem takes place:

THEOREM 3. *Suppose a group G has the property: if K and Z are the commutant and the center, respectively, of G, then every subgroup of Z onto which the factor-group G/K can be mapped homomorphically is periodic and its primary components satisfy the minimality condition. Then any two direct decompositions of the group G with finite numbers of factors possess centrally isomorphic refinements.*

Hence follows, in particular, the existence of isomorphic refinements of direct decompositions (with a finite number of factors) of [groups which satisfy one of the following conditions:

1) The center Z is periodic and the minimality condition is fulfilled for its primary components.

2) The factor-group G/K is periodic and the minimality [condition is fulfilled for its primary components.

3) The group G/K is periodic and the minimality condition is fulfilled for the primary components of the maximal periodic subgroup of the group Z.

4) The group Z is periodic, while the group G/K is of finite rank and the minimality condition is fulfilled for the primary components of its maximal periodic subgroup.

The following theorem is a generalization of Korinek's theorem strengthened by Golovin([2]):

THEOREM 4. *Suppose a group G has the following property: if K and Z are the commutant and the center of G, respectively, then every subgroup of Z onto which the factor-group G/K can be mapped homomorphically satisfies the minimality condition. Then any two direct decompositions of the group G (possible with infinitely many factors) possess centrally isomorphic refinements.*

§ 10

In the case of rings in which the multiplication is supposed to be neither commutative nor associative the following theorems are valid. Their proofs are quite parallel to those of Theorems 3 and 4 (note that in the factor-ring of a ring R by its square R^2 the product of any two elements is null; on the other hand, every additive subgroup of the ideal $\mathfrak{N}$ of complete null divisors is a twosided ideal in R):

THEOREM 5. *Let a ring R possess the property that every additive subgroup of the ideal $\mathfrak{N}$ onto which the factor-ring R/R^2 can be mapped homomorphically is periodic and its primary components satisfy the minimality condition. The any two two-sided direct decompositions of the ring R with finite numbers of summands possess $\mathfrak{N}$-isomorphic refinements.*

THEOREM 6 (*generalization of Theorem 10 of the author's paper* [7]). *Let a ring R possess the property that every additive subgroup of the ideal $\mathfrak{N}$ onto which the factor-ring R/R^2 can be mapped homomorphically satisfies the minimality condition. Then any two two-sided direct decompositions of the ring R (possibly with infinitely many direct summands) possess $\mathfrak{N}$-isomorphic refinements.*

§ 11

We give an example of non-commutative group having non-isomorphic direct decompositions with indecomposable factors, though both the center and the factor-group by the commutant have finite numbers of generators:

The group G is the direct product of groups A and B, where A is the group with generators a_1, a_2 and the generating relation $a_1^2 = a_2^2$, B is the group with generators b_1, b_2 and the generating relation $b_1^3 = b_2^3$. If we denote

$$a = a_1^2 = a_2^2, \quad b = b_1^3 = b_2^3$$

and put

$$c_1 = aa_1b^{-1}, \quad c_2 = aa_2b^{-1}, \quad c_3 = ab^{-1}b_1, \quad c_4 = ab^{-1}b_2 \quad d = a^{-1}b,$$

then the group G is also the direct product of the subgroups $C = \{c_1, c_2, c_3; c_4\}$ and $D = \{d\}$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946) 73—96 Série mathématique

С. С. БЮШГЕНС

ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

(*Представлено академиком* **Н. Н. Лузиным**)

Предметом работы является изучение методом Картана (подвижного репера с введением форм Пфаффа) поля единичных векторов касательных к линиям произвольной конгруенции.

В работе устанавливаются важнейшие характерные линии поля, выводятся основные инварианты поля, дается их геометрическое истолкование и решаются некоторые задачи о геометрической структуре поля.

Введение

Дифференциальная теория комплекса прямых до настоящего времени развита еще недостаточно и многие вопросы структуры комплекса мало освещены. Одна из причин этого лежит, быть может, в том, что самое понятие комплекса несколько искусственно и мало связано с конкретными приложениями. Что касается понятия векторного поля, то оно хотя и связано с понятием комплекса, но представляется более плодотворным и интересным с точки зрения приложений.

Геометрию трехмерного векторного поля можно построить аналогично классической теории поверхностей; в сущности говоря, самая теория поверхностей есть теория двухмерного векторного поля, именно поля нормалей рассматриваемой поверхности.

Многие концепции теории поверхностей (сопряженные направления, асимптотические направления, линии кривизны, геодезические линии и пр.) строятся на основе той или другой их связи с нормалью поверхности и вследствие этого могут быть обобщены в произвольном векторном поле.

Уже давно целый ряд геометров (Lie, Lilienthal, Voss, Rogers, Darboux, Синцов, Inziger, Knoll, Бланк и др.) обратили внимание на линии, удовлетворяющие уравнению

$$A(x, y, z)\,dx + B(x, y, z)\,dy + C(x, y, z)\,dz = 0$$

или, что то же самое, на линии, ортогональные к линиям конгруенции

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}.$$

Для поля векторов $(A : B : C)$ были установлены линии кривизны, сопряженные направления, асимптотические направления, геодезиче-

ские линии и был получен ряд геометрических свойств. Но эта область слишком обширна и богата, чтобы ее можно было исчерпать; остается еще много вопросов о геометрической структуре векторного поля, ожидающих своего решения.

Предлагаемая монография имеет своей целью наметить пути изучения векторного поля методом Картана (подвижного репера), выяснить инварианты поля и разрешить некоторые вопросы геометрии поля, с которыми автор столкнулся в своих работах по приложениям теории поля.

§ 1. Подвижной репер

Предположим, что в трехмерном пространстве мы имеем подвижной репер трех ортов I_1, I_2, I_3; для векторного перемещения точки $\overline{M}$ будем иметь

$$d\overline{M} = \omega_0^\alpha I_\alpha \tag{1}$$

и

$$dI_k = \omega_k^\alpha I_\alpha. \tag{2}$$

Все формы Пфаффа ω_k^m связаны условиями интегрируемости уравнений (1) и (2) или уравнениями структуры

$$(\omega_k^m)' = \omega_k^\alpha \omega_\alpha^m; \tag{3}$$

в последних соотношениях с левой стороны мы имеем внешние производные форм Пфаффа, а с правой стороны их внешние произведения, которые для простоты будем обозначать без всякой метки, как обычные произведения.

Так как векторы I_1, I_2, I_3 являются ортами, то

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= 0, \quad \omega_2^3 = -\omega_3^2 = p, \\ \omega_2^2 &= 0, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3 = q, \\ \omega_3^3 &= 0, \quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = r \end{aligned}$$

и уравнения (3) могут быть приведены к следующим:

$$\left.\begin{aligned} (\omega_0^1)' &= r\omega_0^2 - q\omega_0^3, \quad p' = rq, \\ (\omega_0^2)' &= p\omega_0^3 - r\omega_0^1, \quad q' = pr, \\ (\omega_0^3)' &= q\omega_0^1 - p\omega_0^2, \quad r' = qp. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 \neq 0;$$

принимая формы $\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3$ за основные, положим

$$p = p_\alpha\omega_0^\alpha, \quad q = q_\alpha\omega_0^\alpha, \quad r = r_\alpha\omega_0^\alpha. \tag{5}$$

Вектор

$$\overline{\omega} = pI_1 + qI_2 + rI_3 \tag{6}$$

является, очевидно, обобщенным вектором Дарбу, т. е. вектором элементарного (мгновенного) вращения репера (I_1, I_2, I_3) для выбранного перемещения $d\overline{M}$.

Вектор $\bar{\omega}$ связан, конечно, с выбранным репером, но мы увидим ниже (§ 16), что его проекция

$$\bar{\theta} = pI_1 + qI_2 \qquad (7)$$

на плоскость, ортогональную к I_3 не зависит от поворота репера около оси I_3. Таким образом, направление, нормальное одновременно и к вектору I_3 и к вектору Дарбу, не зависит от выбора пары (I_1, I_2).

§ 2. Семейство ортогональных поверхностей

Пусть (I_3) будет данное векторное поле; будем говорить, что поле допускает семейство ортогональных поверхностей, если в каждой точке какой-либо поверхности этого семейства соответствующий вектор I_3 поля ортогонален к этой поверхности.

Перемещение, нормальное вектору поля, должно удовлетворять уравнению

$$I_3 d\bar{M} = 0 \qquad (8)$$

или

$$\omega_0^3 = 0. \qquad (8')$$

Последнее уравнение, вообще говоря, определяет кривые, ортогональные векторам поля. Если уравнение (8′) вполне интегрируемо, то мы имеем семейство поверхностей, ортогональных векторам поля. В этом последнем случае необходимо

$$(\omega_0^3)' \, \omega_0^3 = 0;$$

развертывая это условие с помощью уравнений (4), мы получим

$$p\omega_0^2\omega_0^3 + q\omega_0^3\omega_0^1 = 0 \qquad (9)$$

или

$$p_1 + q_2 = 0. \qquad (9')$$

Таково необходимое и достаточное условие для существования семейства поверхностей, ортогональных векторам данного поля.

§ 3. Линии кривизны поля

Перемещение точки, ортогональное соответствующему вектору поля, удовлетворяет условию

$$\omega_0^3 = 0. \qquad (10)$$

Перемещение точки, ортогональное соответствующему вектору Дарбу, должно удовлетворять условию

$$\bar{\omega}\, d\bar{M} = 0$$

или

$$(p)(\omega_0^1) + (q)(\omega_0^2) + (r)(\omega_0^3) = 0, \qquad (11)$$

(круглые скобки обозначают здесь обычные произведения формы Пфаффа),

Назовем линией кривизны векторного поля такую линию, которая в каждой своей точке ортогональна и к вектору поля и к соответствующему вектору Дарбу. Линии кривизны поля (I_3) должны, следовательно, удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0^3 = 0, \\ &(p)\ (\omega_0^1) + (q)\,(\omega_0^2) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

первое из этих уравнений линейно и второе квадратично относительно форм Пфаффа. Итак, мы можем сказать:

Поле векторов имеет две конгруенции линий кривизны.

При условии (10) и (11) вектор $\overline{\omega}$ будет перпендикулярен к векторам I_3 и $I_3 + dI_3$, поэтому векторы dM, I_3, $I_3 + dI_3$ компланарны, откуда следует, что:

Вдоль линии кривизны поля векторы поля образуют развертывающуюся поверхность.

Действительно, развертывающиеся поверхности векторного поля должны удовлетворять условию

$$d\overline{M} I_3 dI_3 = 0 \qquad (13)$$

или

$$(p)\,(\omega_0^1) + (q)\,(\omega_0^2) = 0. \qquad (13')$$

Таким образом, линия, нормальная к векторам поля и располагающаяся на развертывающейся поверхности поля, будет определяться уравнениями

$$\omega_0^3 = 0,$$
$$(p)\,(\omega_0^1) + (q)\,(\omega_0^2) = 0,$$

которые тождественны уравнениям (12). Итак, линию кривизны поля можно определить как такую линию, нормальную к векторам поля, вдоль которой векторы поля образуют развертывающуюся поверхность.

Развертывая второе из уравнений (12), имея в виду первое из них, получим

$$p_1\,(\omega_0^1)^2 + (p_2 + q_1)\,(\omega_0^1)\,(\omega_0^2) + q_2\,(\omega_0^2)^2 = 0. \qquad (14)$$

Предположим, что вектор I_1 как раз имеет направление $d\overline{M}$ одной из линий кривизны в данной точке; тогда условие $\omega_0^2 = 0$ должно удовлетворять уравнению (14) и, следовательно,

$$p_1 = 0. \qquad (15)$$

В этом случае линии кривизны второй конгруенции определяются уравнениями

$$\omega_0^3 = 0,$$
$$(p_2 + q_1)\,\omega_0^1 + p_2\,\omega_0^2 = 0;$$

второе из них можно представить в виде

$$\{(p_2 + q_1)\,I_1 + q_2 I_2\}\,d\overline{M} = 0.$$

Следовательно, в выбранной точке направление второй линии кривизны будет

$$\{(p_2 + q_1)\,I_1 + q_2 I_2\} \times I_3$$

или окончательно

$$-(p_2 + q_1)\,I_2 + q_2 I_1.$$

Полученный результат показывает, что линии кривизны поля в общем случае неортогональны. Они будут ортогональны в случае

$$q_2 = 0; \tag{16}$$

но при условиях (15) и (16) уравнение (9′) удовлетворено и, следовательно, поле векторов имеет семейство ортогональных поверхностей. Наоборот, из условий (9′) и (15) следует условие (16). Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Ортогональность линий кривизны векторного поля является необходимым и достаточным условием существования семейства ортогональных поверхностей поля.*

Если существует семейство ортогональных поверхностей поля, то, очевидно, линии кривизны поля располагаются на поверхностях этого семейства и для последних являются классическими линиями кривизны.

Обратно, если существует семейство поверхностей, на которых располагаются обе конгруенции линий кривизны поля, то это семейство поверхностей будет семейством ортогональных поверхностей поля.

Несомненно существуют семейства поверхностей, содержащих одну из конгруенций линий кривизны векторного поля. Пусть (I_1) — поле касательных к линиям кривизны одной конгруенции, располагающимся на поверхностях некоторого семейства (S). Нормаль поверхности S в какой-либо ее точке будет

$$\overline{N} = I_2 \sin \sigma + I_3 \cos \sigma,$$

а уравнение самого семейства (S) напишется в виде

$$\overline{N} d\overline{M} = \omega_0^2 \sin \sigma + \omega_0^3 \cos \sigma = 0. \tag{17}$$

Полученное уравнение должно быть вполне интегрируемо, следовательно

$$(\omega_0^2 \sin \sigma + \omega_0^3 \cos \sigma)' (\omega_0^2 \sin \sigma + \omega_0^3 \cos \sigma) = 0$$

или

$$\begin{gathered}(d\sigma - p)\, \omega_0^2 \omega_0^3 - \sin^2 \sigma\, r \omega_0^1 \omega_0^2 - \cos^2 \sigma\, q \omega_0^3 \omega_0^1 + \\ + \sin \sigma \cos \sigma\, (q \omega_0^1 \omega_0^2 + r \omega_0^3 \omega_0^1) = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Если мы найдем σ, удовлетворяющее последнему условию, то уравнение (17) и определит нам искомое семейство поверхностей.

Векторное поле должно быть специальным полем, если конгруенция его линий кривизны должна быть конгруенцией линий кривизны на поверхностях некоторого семейства. В самом деле, тогда

$$dM \overline{N} d\overline{N} = 0 \tag{19}$$

вдоль линий кривизны этой конгруенции, т. е. при условиях

$$\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0;$$

теперь σ должно удовлетворять двум условиям: (18) и (19), которые принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &(d\sigma - p)\, \omega_0^2 \omega_0^3 = 0, \\ &\sin^2 \sigma\, r \omega_0^1 \omega_0^2 + \cos^2 \sigma\, q \omega_0^3 \omega_0^1 - \sin \sigma \cos \sigma\, (q \omega_0^1 \omega_0^2 + r \omega_0^3 \omega_0^1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и должны быть совместны для искомого поля.

Пусть векторы

$$I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \sin\varphi_1,$$
$$I_1 \cos\varphi_2 + I_2 \sin\varphi_2$$

дают направления линий кривизны поля, тогда уравнения

$$\frac{\omega_0^1}{\cos\varphi_1} = \frac{\omega_0^2}{\sin\varphi_1},$$
$$\frac{\omega_0^1}{\cos\varphi_2} = \frac{\omega_0^2}{\sin\varphi_2}$$

будут уравнениями линий кривизны. Из уравнения (14) можно, таким образом, заключить, что

1) *условие*

$$p_1 + q_2 = 0$$

необходимо и достаточно для ортогональности линий кривизны поля,

2) *условие*

$$p_2 + q_1 = 0$$

обозначает, что направления линий кривизны симметрично располагаются относительно вектора I_1 выбранного репера.

§ 4. Семейство Ламе

Пусть семейство (8) будет семейством Ламе, т. е. семейством, входящим в тройно-ортогональную систему поверхностей. Примем (I_1) и (I_2) за два поля векторов касательных к линиям кривизны поверхностей семейства (8). Тогда поле (I_1) должно допускать семейство ортогональных поверхностей; следовательно, уравнение

$$I_1 d\overline{M} \equiv \omega_0^1 = 0$$

должно быть вполне интегрируемо, т. е. необходимо, чтобы

$$(\omega_0^1)' \, \omega_0^1 = 0$$

или

$$r_3 = 0. \tag{21}$$

Поле векторов (I_2) также должно иметь семейство ортогональных поверхностей; это семейство определяется уравнением

$$I_2 d\overline{M} \equiv \omega_0^2 = 0, \tag{22}$$

условие полной интегрируемости которого

$$(\omega_0^2)' \, \omega_0^2 = 0$$

сводится, таким образом, к условию (21). Обратно, если поле (I_1) допускает семейство ортогональных поверхностей, то осуществляется условие (21), но тогда и поле (I_2) также допускает семейство ортогональных поверхностей и, следовательно, семейство (8) есть семейство Ламе.

Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы данное семейство поверхностей было семейством Ламе, необходимо и достаточно, чтобы касательные к линиям одной из конгруенций линий кривизны этого семейства поверхностей образовали поле, допускающее семейство ортогональных поверхностей.*

§ 5. Линии винчения репера поля

Для выбранного подвижного репера поля будем искать такие перемещения, которые параллельны соответствующим векторам Дарбу; для таких перемещений мы имеем

$$\frac{p}{\omega_0^1}=\frac{q}{\omega_0^2}=\frac{r}{\omega_0^3} \tag{23}$$

или

$$\left.\begin{aligned}(p_1-s)\,\omega_0^1+p_2\omega_0^2+p_3\omega_0^3=0,\\ q_1\omega_0^1+(q_2-s)\,\omega_0^2+q_3\omega_0^3=0,\\ r_1\omega_0^1+r_2\omega_0^2+(r_3-s)\,\omega_0^3=0,\end{aligned}\right\} \tag{23'}$$

откуда следует, что

$$\begin{vmatrix} p_1-s & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2-s & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3-s \end{vmatrix}=0. \tag{24}$$

Будем называть **линией винчения** выбранного репера поля такую линию, вдоль которой каждая касательная параллельна соответствующему вектору Дарбу; вдоль линии винчения репер вращается около этой самой линии.

Из полученных выше уравнений следует, что:

Для каждого выбранного репера векторного поля существуют три конгруенции линий винчения.

В качестве простейшего примера исследуем, в каких случаях эти три направления винчения совпадают соответственно с ортами репера. Если направления винчения будут I_1, I_2, I_3, тогда уравнения (23′) должны иметь решения:

$$\begin{gathered}\omega_0^2=\omega_0^3=0,\\ \omega_0^3=\omega_0^1=0,\\ \omega_0^1=\omega_0^2=0.\end{gathered}$$

Следовательно, должны иметь место условия:

$$\begin{gathered}p_1-s_1=q_1=r_1=0,\\ p_2=q_2-s_2=r_2=0,\\ p_3=q_3=r_3-s_3=0,\end{gathered}$$

откуда следует, что

$$p\equiv s_1\omega_0^1,\quad q\equiv s_2\omega_0^2,\quad r\equiv s_3\omega_0^3. \tag{25}$$

Подставляя эти формы в условия структуры (5), получим

$$\begin{aligned}ds_1\omega_0^1&=(-s_2s_3+s_3s_1+s_1s_2)\,\omega_0^2\,\omega_0^3,\\ ds_2\omega_0^2&=(s_2s_3-s_3s_1+s_1s_2)\,\omega_0^3\,\omega_0^1,\\ ds_3\omega_0^3&=(s_2s_3+s_3s_1-s_1s_2)\,\omega_0^1\,\omega_0^2.\end{aligned}$$

Умножая эти соотношения внешним образом соответственно на формы ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3, найдем

$$
\begin{aligned}
-s_2s_3+s_3s_1+s_1s_2&=0,\\
s_2s_3-s_3s_1+s_1s_2&=0,\\
s_2s_3+s_3s_1-s_1s_2&=0
\end{aligned}
$$

или, что то же самое,

$$s_2s_3=s_3s_1=s_1s_2=0. \tag{26}$$

Таким образом, мы должны исследовать три возможных случая:

$$
\begin{aligned}
&1)\ s_1=s_2=0, \quad s_3\neq 0,\\
&2)\ s_2=s_3=0, \quad s_1\neq 0,\\
&3)\ s_1=s_2=s_3=0;
\end{aligned}
$$

(случай $s_3=s_1=0$, $s_2\neq 0$ опущен, как случай, симметричный второму).

В первом случае имеем

$$
\begin{gathered}
p\equiv q\equiv 0, \quad r\equiv s_3\omega_0^3, \quad ds_3\omega_0^3=0,\\
(\omega_0^1)'=s_3\omega_0^3\,\omega_0^2\neq 0, \quad (\omega_0^2)'=-s_3\omega_0^3\,\omega_0^1\neq 0,\\
dI_1=rI_2, \quad dI_2=-rI_1, \quad dI_3=0.
\end{gathered}
$$

Легко видеть, что в этом случае все векторы поля (I_3) имеют постоянное направление, следовательно, поле (I_3) допускает семейство ортогональных поверхностей, именно пучок параллельных плоскостей, ортогональных I_3; в каждой плоскости мы можем взять два любых семейства ортогональных линий, огибаемых векторами поля (I_1) и поля (I_2).

Во втором случае векторы поля (I_1) имеют постоянное направление, а два другие поля (I_2) и (I_3) огибают в каждой из плоскостей, ортогональных к I_1, два любых ортогональных семейства линий.

Наконец, в третьем случае векторы каждого поля имеют соответствующее постоянное направление и мы получим тройно-ортогональную систему плоскостей.

§ 6. Асимптотические линии поля

Пусть для какого-нибудь перемещения $\bar\theta$ будет составляющей вектора Дарбу в плоскости, нормальной к вектору поля I_3, т. е.

$$\bar\theta=pI_1+qI_2. \tag{27}$$

Назовем **асимптотической линией поля** такую линию, нормальную к векторам поля, вдоль которой каждое перемещение коллинеарно соответствующему вектору $\bar\theta$.

Асимптотические линии поля определяются уравнениями:

$$
\left.\begin{aligned}
&\omega_0^3=0,\\
&\frac{p}{\omega_0^1}=\frac{q}{\omega_0^2}
\end{aligned}\right\} \tag{28}
$$

или

$$
\left.\begin{aligned}
&\omega_0^3=0,\\
&q_1(\omega_0^1)^2+(q_2-p_1)(\omega_0^1)(\omega_0^2)-p_2(\omega_0^2)^2=0;
\end{aligned}\right\} \tag{28'}
$$

очевидно:

Для данного векторного поля мы имеем вообще две конгруенции асимптотических линий.

Для какой-нибудь поверхности асимптотические линии ее поля нормалей являются ее асимптотическими линиями в классическом смысле.

Применяя способ, использованный в § 3, мы можем установить:

1) *Условие*

$$p_2 - q_1 = 0$$

является необходимым и достаточным условием ортогональности асимптотических линий.

2) *Условие*

$$p_1 - q_2 = 0$$

обозначает, что асимптотические направления симметричны относительно вектора I_1 выбранного репера.

Если асимптотические линии гармонически разделяют линии кривизны, то

$$-p_1 p_2 - \frac{1}{2}(p_2 + q_1)(q_2 - p_1) + q_1 q_2 = 0$$

или

$$(p_1 + q_2)(q_1 - p_2) = 0.$$

Условие

$$p_1 + q_2 = 0$$

обозначает, что линии кривизны ортогональны; условие

$$p_2 - q_1 = 0$$

обозначает ортогональность асимптотических линий. Итак,

Линии кривизны поля гармонически разделяются его асимптотическими линиями только в одном из двух случаев, когда та или другая из этих систем образует ортогональную систему.

Пусть точка M описывает некоторую линию, ортогональную к векторам поля (I_3) и пусть

$$\frac{d^2\bar{M}}{ds^2} = \frac{\nu}{\rho}, \quad \left(I_3 \frac{dM}{ds} = 0 \right)$$

будет ее вектор кривизны, тогда

$$\frac{\bar{\nu} I_3}{\rho} = -\frac{d\bar{M} dI_3}{ds^2} = \frac{(p)\,\omega_0^2 - (q)\,\omega_0^1}{ds^2}, \tag{29}$$

откуда следует, что асимптотическая линия поля есть такая линия, вдоль которой бинормаль всегда совпадает с соответствующим вектором поля.

Из соотношения (29) легко видеть, что для векторного поля справедлива теорема, аналогичная теореме Менье.

Пусть

$$\frac{1}{R} = \frac{-q_1(\omega_0^1)^2 + (p_1 - q_2)(\omega_0^1)(\omega_0^2) + p_2(\omega_0^2)^2}{(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2} \tag{30}$$

будет кривизной линии, главная нормаль которой совпадает с вектором поля (I_3); это выражение мы назовем **нормальной кривизной поля** в данной его точке.

Экстремальные значения нормальной кривизны поля определяются уравнением

$$\frac{1}{R^2}+\frac{q_1-p_2}{R}-p_2q_1-\frac{1}{4}(p_1-q_2)^2=0,$$

следовательно

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=p_2-q_1,\\ K_g&=\frac{1}{R_1R_2}=p_1q_2-p_2q_1-\frac{1}{4}(p_1+q_2)^2.\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

Первую из этих величин назовем средней кривизной поля, вторую — гауссовой кривизной поля.

Направления, имеющие экстремальные значения нормальной кривизны, определяются уравнением

$$\frac{p_1-q_2}{2}(\omega_0^1)^2+(p_2+q_1)(\omega_0^1)(\omega_0^2)-\frac{p_1-q_2}{2}(\omega_0^2)^2=0.\qquad(32)$$

Нетрудно видеть, что эти направления всегда ортогональны и, вообще говоря, отличны от направлений линий кривизны. Направления (32) совпадают с направлениями линий кривизны только в случае

$$p_1+q_2=0,$$

т. е. когда векторное поле допускает семейство ортогональных поверхностей.

§ 7. Геодезические линии поля

Если главная нормаль линии в каждой ее точке совпадает с соответствующим вектором поля, мы будем называть такую линию геодезической линией поля; очевидно геодезическая линия поля всегда ортогональна векторам поля. Геодезическая линия должна удовлетворять условиям

$$(ds)\,d^2\overline{M}-(d\overline{M})\,d^2s=mI_3,$$
$$\omega_0^3=0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}&(\omega_0^2)\,d\omega_0^1-(\omega_0^1)\,d\omega_0^2-(r)\{(\omega_0^1)^2+(\omega_0^2)^2\}=0,\\ &\omega_0^3=0;\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

(в первом уравнении все произведения форм являются обыкновенными произведениями).

Пусть σ — угол геодезической линии с вектором I_1, тогда уравнения геодезической линии примут вид

$$\left.\begin{aligned}\omega_0^3&=0,\\ d\sigma+r&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

Из этих последних уравнений легко заключить, что условие

$$r_1=0$$

обозначает, что поле (I_1) огибает в данном векторном поле (I_3) конгруенцию геодезических линий; аналогично при условии

$$r_2 = 0$$

поле (I_2) будет огибать в векторном поле (I_3) конгруенцию геодезических линий.

§ 8. Омбиликальные точки поля

Формула (30) дает поле кривизны геодезической линии данного направления. Если в какой-либо точке поля кривизна геодезических линий будет одинакова по всем направлениям, разумеется — нормальным вектору поля, то такую точку мы назовем омбиликальной точкой поля. Легко видеть, что омбиликальные точки поля должны удовлетворять условиям:

$$p_2 + q_1 = 0, \quad p_1 - q_2 = 0; \tag{35}$$

таким образом омбиликальные точки поля, вообще говоря, располагаются на некоторой линии, именно омбиликальной линии поля.

Уравнения (35) могут сводиться к одному; тогда поле будет иметь некоторую омбиликальную поверхность. Наконец, уравнения (35) могут выполняться тождественно, тогда всякая точка пространства будет омбиликальной точкой поля и такое векторное поле мы можем назвать омбиликальным полем.

§ 9. Сопряженные направления поля

Назовем направление $\delta\overline{M}$ односторонне сопряженным dM, если оно ортогонально к двум последовательным векторам I_3 и $I_3 + dI_3$, иначе говоря, если $\delta\overline{M}$ удовлетворяет условиям

$$I_3\delta\overline{M} = 0, \quad dI_3\delta M = 0.$$

Эти условия дают

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0^3 = 0, \\ &\{q(d)\}\,\omega_0^1(\delta) - \{p(d)\}\,\omega_0^2(\delta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Если сопряженные направления совпадают, они обращаются в асимптотические направления.

Уравнения (36) показывают, что в общем случае направления односторонне сопряженные не будут симметричными. Направления односторонне сопряженные будут симметричны только при условии

$$p_1 + q_2 = 0,$$

т. е. в случае, когда векторное поле допускает семейство ортогональных поверхностей. Тогда сопряженные направления располагаются на поверхности этого семейства и будут на них сопряженными в классическом смысле.

Следуя другому пути, мы можем определить два сопряженных направления как такие два направления, ортогональные к векторам поля, которые гармонически разделяются двумя асимптотическими направлениями. Тогда будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} q_1\omega_0^1(d)\,\omega_0^1(\delta)+(q_2-p_1)\{\omega_0^1(d)\,\omega_0^2(\delta)+\omega_0^2(d)\,\omega_0^1(\delta)\}-p_2\omega_0^2(d)\,\omega_0^2(\delta)=0, \\ \omega_0^3(d)=0, \quad \omega_0^3(\delta)=0; \end{array}\right\} \qquad (37)$$

здесь в первом уравнении все произведения форм Пфаффа суть обыкновенные произведения. Эти сопряженные направления всегда симметричны, т. е. они будут двухсторонне сопряженные. Если они совпадают, то обращаются в асимптотические направления. Если векторное поле имеет семейство ортогональных поверхностей, то двухсторонне сопряженные направления поля будут сопряженными на этих поверхностях в классическом смысле.

§ 10. Полная кривизна поля

Пусть $d_1\overline{M}$ и $d_2\overline{M}$ — два любых перемещения, ортогональных вектору поля I_3 в какой-либо его точке; отношение объемов параллелепипедов, построенных на тройке I_3, $I_3+d_1I_3$, $I_3+d_2I_3$ и на тройке I_3, d_1M, $d_2\overline{M}$, назовем **полной кривизной поля** K_t в выбранной точке.

Таким образом полная кривизна будет

$$K_t=\frac{I_3\,(I_3+d_1I_3)\,(I_3+d_2I_3)}{I_3d_1\overline{M}\,d_2\overline{M}}; \qquad (38)$$

развертывая это выражение, получим

$$K_t=\frac{pq}{\omega_0^1\omega_0^2} \quad (\omega_0^3=0), \qquad (39)$$

или

$$K_t=p_1q_2-p_2q_1.$$

Полученный результат устанавливает независимость K_t от двух выбранных перемещений.

Если векторное поле допускает семейство ортогональных поверхностей, то полная кривизна поля будет полной кривизной этих поверхностей в обычном смысле.

Предположим, что полная кривизна векторного поля во всех его точках равна нулю; выбирая за I_1 направление одной из линий кривизны, будем иметь

$$p_1=0.$$

Тогда условие

$$K_t=0$$

даст нам

$$p_2q_1=0$$

и нам придется исследовать два случая: 1) $p_1=p_2=0$ и 2) $p_1=q_1=0$. Покажем, что эти два случая эквивалентны и отличаются друг от друга только выбором репера. В самом деле, в случае $p_1=p_2=0$ уравнение линий кривизны будет

$$(\omega_0^2)\,(q_1\omega_0^1+q_2\omega_0^2)=0,$$

а уравнение асимптотических линий примет вид

$$(\omega_0^1)\,(q_1\omega_0^1+q_2\omega_0^2)=0.$$

Эти уравнения показывают, что одно из направлений линий кривизны ортогонально некоторому асимптотическому направлению, а второе совпадает со вторым асимптотическим направлением.

В случае $p_1 = q_1 = 0$, уравнение линий кривизны примет вид

$$(\omega_0^2)(p_2\omega_0^1 + q_2\omega_0^2) = 0,$$

уравнение же асимптотических направлений будет

$$(\omega_0^2)(q_2\omega_0^1 - p_2\omega_0^2) = 0.$$

В этом случае опять одно направление линий кривизны совпадает с некоторым асимптотическим направлением, второе же направление линий кривизны ортогонально второму асимптотическому направлению.

Указанное расположение линий кривизны и асимптотических направлений характеризует векторное поле с нулевой полной кривизной.

Векторное поле с нулевой полной кривизной мы получим, в частности, если возьмем поле, допускающее семейство ортогональных поверхностей, состоящее из развертывающихся поверхностей; на последних линии кривизны и асимптотические линии, имеют, очевидно, указанное расположение.

§ 11. Неопределенность линий кривизны или асимптотических

Предположим, что линии кривизны поля неопределенны, тогда

$$p_1 = 0, \quad p_2 + q_1 = 0, \quad q_2 = 0$$

и так как здесь $p_1 + q_2 = 0$, то поле допускает семейство ортогональных поверхностей; линии кривизны этих поверхностей будут линиями кривизны поля.

Следовательно семейство ортогональных поверхностей поля состоит из сфер, если $K_t \neq 0$, или из плоскостей, если $K_t = 0$.

Исследуем далее случай неопределенности асимптотических линий; это будет при условиях:

$$q_1 = 0, \quad q_2 - p_1 = 0, \quad p_2 = 0$$

и тогда линии кривизны изобразятся уравнением

$$p_1\{(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2\} = 0.$$

Отсюда следует, что при $K_t = 0$ поле имеет неопределенные линии кривизны и потому допускает семейство ортогональных поверхностей, состоящее из плоскостей; если же $K_t \neq 0$, то поле не допускает семейства ортогональных поверхностей и его линии кривизны будут мнимыми.

Разберем подробнее этот последний случай, когда $K_t \neq 0$.

Пусть

$$\bar{\theta}_0 = p_3 I_1 + q_3 I_2$$

будет вектором $\bar{\theta}$ для перемещения вдоль I_3; выберем I_1 в плоскости $(I_3, \bar{\theta}_0)$, тогда

$$q_3 = 0.$$

При этих условиях уравнения структуры дадут

$$\left.\begin{aligned} dp_1\omega_0^1 + dp_3\omega_0^3 + (p_3^2 - p_1^2)\,\omega_0^2\omega_0^3 - 2p_1p_3\omega_0^1\omega_0^2 = 0, \\ dp_1\omega_0^2 - p_3r_2\omega_0^3\omega_0^2 - (p_1^2 + p_3r_1)\,\omega_0^3\omega_0^1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

откуда, во-первых,

$$p_1^2 + p_3r_1 = 0$$

и затем

$$dp_1\omega_0^1\omega_0^3 - 2p_1p_3\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0.$$

Таким образом, мы должны принять

$$\left.\begin{aligned} dp_1 &= -2p_1p_3\omega_0^2 + p_3r_2\omega_0^3, \\ dp_3 &= p_3r_2\omega_0^1 + (p_1^2 - p_3^2)\,\omega_0^2 + \mu\omega_0^3; \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

внешнее дифференцирование этих уравнений дает

$$r_2 = 0, \quad \mu = 0, \quad p_1 + r_3 = 0,$$

после чего уравнение структуры

$$r' = qp$$

будет удовлетворено условиями

$$r_1 = -\frac{p_1^2}{p_3}, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = -p_1.$$

Из уравнений (41) следует

$$(p_1^2 - p_3^2)\,dp_1 + 2p_1p_3dp_3 = 0.$$

Таким образом, мы можем принять

$$p_1 = \frac{\cos^2\varphi}{C}, \quad p_3 = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{C}, \quad \omega_0^2 = \frac{C\,d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

где C — произвольное постоянное. Легко видеть, что

$$r'r = qpr = (p_1^2 + p_3r_1)\,p_1\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0,$$
$$(\omega_0^1)'\,\omega_0^1 = (r\omega_0^2 - q\omega_0^3)\,\omega_0^1 = 0.$$

Итак, формы ω_0^1 и r будет формами класса два; полагая по этой причине

$$\omega_0^1 = a\,d\theta, \quad r = b\,d\psi,$$

получим

$$(da - a\operatorname{ctg}\varphi\,d\varphi)\,d\theta = 0,$$
$$(db + b\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi)\,d\psi = 0,$$

откуда

$$a = f_1(\theta)\sin\varphi, \quad b = f_2(\psi)\cos\varphi;$$

после приведения параметров мы можем принять

$$\omega_0^1 = \sin\varphi\,d\theta, \quad r = \cos\varphi\,d\psi.$$

Уравнения

$$dI_1 = rI_2 - qI_3, \quad dI_2 = pI_3 = rI_1, \quad dI_3 = qI_1 - pI_2$$

легко можно проинтегрировать. Пусть i, j, k будут тремя неподвижными ортами и

$$\xi = i\cos\psi + j\sin\psi,$$
$$\eta = -i\sin\psi + j\cos\psi,$$

тогда получим

$$I_1 = \eta \cos\varphi - k \sin\varphi,$$
$$I_2 = -\xi,$$
$$I_3 = \eta \sin\varphi + k \cos\varphi.$$

Уравнение

$$d\overline{M} = \omega_0^\alpha I_\alpha$$

также легко интегрируемо и дает

$$M = -(\theta + C\psi)\, k - C\xi \operatorname{tg}\varphi.$$

Положим

$$\overline{M} = xi + yj + zk,$$

тогда

$$x = -C\cos\psi \operatorname{tg}\varphi, \quad y = C \operatorname{tg}\varphi \sin\psi, \quad z = -(\theta + C\psi)$$

и, следовательно,

$$x^2 + y^2 = C^2 \operatorname{tg}^2\varphi = R^2,$$

так что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{C}.$$

Итак, получаем семейство круговых цилиндров, имеющих одну и ту же неподвижную ось oz; для какой-нибудь точки $\overline{M}$ пространства мы должны взять вектор I_3 поля в касательной плоскости цилиндра под углом $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{C}$ к образующей цилиндра. Наиболее общее решение получится произвольным перемещением в пространстве указанной системы.

§ 12. Поле вращения

По аналогии с поверхностями вращения мы назовем векторное поле полем вращения, если все его векторы пересекают неподвижную ось. Нетрудно аналитически определить поле вращения. Пусть $\bar{c}$ — неподвижная ось поля и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — некоторый неподвижный репер ортов. Начальную точку вектора поля мы определяем цилиндрическими координатами, положив,

$$\overline{M} = \bar{a}R\cos\theta + \bar{b}R\sin\theta + \bar{c}z.$$

Возьмем репер, связанный с плоскостью $(\overline{M}, \bar{c})$, именно репер

$$I' = \bar{a}\cos\theta + \bar{b}\sin\theta, \quad I'' = -\bar{a}\sin\theta + \bar{b}\cos\theta, \quad \bar{c} = \bar{c},$$

тогда

$$dI' = I''d\theta, \quad dI'' = -I'd\theta, \quad d\bar{c} = 0.$$

Вектор поля, как пересекающий $\bar{c}$, мы возьмем в виде

$$I_3 = I'\cos\varphi + \bar{c}\sin\varphi$$

и два других вектора подвижного репера в виде

$$I_1 = (I'\sin\varphi - \bar{c}\cos\varphi)\cos\sigma + I''\sin\sigma,$$
$$I_2 = -(I'\sin\varphi - \bar{c}\cos\varphi)\sin\sigma + I''\cos\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{M}I' = R, \quad \overline{M}I'' = 0, \quad \overline{M}\bar{c} = z \tag{42}$$

и далее

$$\left.\begin{aligned} &I_1I' = \sin\varphi\cos\sigma, && I_1I'' = \sin\sigma, && I_1\bar{c} = -\cos\varphi\cos\sigma,\\ &I_2I' = -\sin\varphi\sin\sigma, && I_2I'' = \cos\sigma, && I_2\bar{c} = \cos\varphi\sin\sigma,\\ &I_3I' = \cos\varphi, && I_3I'' = 0, && I_3\bar{c} = \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Дифференцируя формулы (42), мы получим

$$\left.\begin{aligned} dR &= \omega_0^1\sin\varphi\cos\sigma - \omega_0^2\sin\varphi\sin\sigma + \omega_0^3\cos\varphi,\\ dz &= -\omega_0^1\cos\varphi\cos\sigma + \omega_0^2\cos\varphi\sin\sigma + \omega_0^3\sin\varphi,\\ Rd\theta &= \omega_0^1\sin\sigma + \omega_0^2\cos\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Дифференцирование формул (43) дает

$$\left.\begin{aligned} p &= -\sin\sigma\, d\varphi - \cos\sigma\cos\varphi\, d\theta,\\ q &= -\cos\sigma\, d\varphi + \sin\sigma\cos\varphi\, d\theta,\\ r &= d\sigma + \sin\varphi\, d\theta \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &q\cos\sigma + p\sin\sigma = -d\varphi,\\ &q\sin\sigma - p\cos\sigma = \cos\varphi\, d\theta,\\ &(p\cos\sigma - q\sin\sigma)\sin\varphi + r\cos\varphi = \cos\varphi\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{45'}$$

Исключая из уравнений (44) и (45) параметры R, z, φ, ψ, σ, получим характеристические условия для поля вращения в нашей системе референций. Примем для простоты $\sigma = 0$, что обозначает, что мы берем вектор I_1 в плоскости $(I_3, \bar{c})$; тогда

$$\left.\begin{aligned} dR &= \omega_0^1\sin\varphi + \omega_0^3\cos\varphi,\\ dz &= -\omega_0^1\cos\varphi + \omega_0^3\sin\varphi,\\ Rd\theta &= \omega_0^2, \end{aligned}\right\} \tag{44*}$$

$$p = -\cos\varphi\, d\theta, \quad q = -d\varphi, \quad r = \sin\varphi\, d\theta. \tag{45*}$$

Внешнее дифференцирование двух первых уравнений (44*) и уравнений (45*) даст или тождества или соотношения, удовлетворяющиеся в силу установленных уравнений. Исключая $d\theta$, получим

$$\frac{\omega_0^2}{R} = -\frac{p}{\cos\varphi} = \frac{r}{\sin\varphi},$$

откуда, во-первых,

$$\frac{\cos\varphi}{R} = -p_2, \quad \frac{\sin\varphi}{R} = r_2 \tag{46}$$

и затем

$$p_1 = p_3 = r_1 = r_3 = 0. \tag{47}$$

Из уравнений (46) получим

$$\left.\begin{aligned} dp_2 + r_2q &= -p_2r_2\omega_0^1 + p_2^2\omega_0^3,\\ dr_2 - p_2q &= -r_2^2\omega_0^1 + p_2r_2\omega_0^3, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

откуда можем заключить, что

$$\left.\begin{aligned} &(dp_2 + r_2q)\,\omega_0^1\omega_0^3 = 0,\\ &(dr_2 - p_2q)\,\omega_0^1\omega_0^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Условия (47) и (49) необходимы, если поле есть поле вращения. Утверждаем, что эти условия будут и достаточными для того, чтобы поле было полем вращения, в котором векторы I_3 и I_1 пересекают неподвижную ось. В самом деле, из уравнений структуры

$$p' = rq, \quad r' = qp$$

в силу условий (47) и (49) мы получим уравнения (48); вводя в последние функции φ, R вместо p_2 и r_2, найдем

$$dR = \omega_0^1 \sin \varphi + \omega_0^3 \cos \varphi,$$
$$d\varphi = -q.$$

Так как

$$(\omega_0^2)' \, \omega_0^2 = p\omega_0^3\omega_0^2 - r\omega_0^1\omega_0^2 = 0,$$

то можно положить

$$\omega_0^2 = M d\theta,$$

откуда

$$dM d\theta = \frac{M}{R} (\omega_0^1 \sin \varphi + \omega_0^3 \cos \varphi) \, d\theta$$

или

$$\left(\frac{dM}{M} - \frac{dR}{R}\right) d\theta = 0.$$

Итак,

$$M = R f(\theta),$$

но функцию $f(\theta)$ мы можем свести к единице, следовательно,

$$\omega_0^2 = R d\theta.$$

Наконец, нетрудно установить, что выражение

$$-\omega_0^1 \cos \varphi + \omega_0^3 \sin \varphi$$

в наших условиях является полным дифференциалом, поэтому можно положить

$$dz = -\omega_0^1 \cos \varphi + \omega_0^3 \sin \varphi.$$

Таким образом, при условиях (47) и (49) мы восстановим всю систему (44*) и (45*), которая определяет поле вращения с специальным подвижным репером.

Перейдем теперь к геометрическому истолкованию указанных условий. Условие $p_1 = 0$ обозначает, что поле (I_1) в поле (I_3) огибает конгруенцию линий кривизны; условие $r_1 = 0$ указывает, что эта конгруенция является также конгруенцией геодезических линий поля (I_3).

Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА. *В векторном поле вращения векторы, перпендикулярные к векторам поля и пересекающие неподвижную ось, огибают конгруенцию линий кривизны, которые одновременно будут и геодезическими линиями.*

По аналогии с поверхностями вращения я предлагаю линии кривизны этой конгруенции называть меридианами поля вращения.

Условия $p_3 = r_3 = 0$ указывают, что вектор Дарбу $\bar{\omega}$ для перемещения репера (I_1, I_2, I_3) вдоль I_3 имеет направление по вектору I_2.

Пусть

$$\theta_2 = p_2 I_1 + r_2 I_3$$

будет составляющей вектора Дарбу в плоскости, перпендикулярной к I_2, для перемещения репера (I_1, I_3, I_3) вдоль I_2. Тогда

$$d\bar{\theta}_2 = (dp_2 + r_2 q)\, I_1 + (dr_2 - p_2 q)\, I_3$$

и при условии (49) мы получим

$$d\bar{\theta}_2 \omega_0^1 \omega_0^3 = 0.$$

Таким образом, условия (49) обозначают, что вектор $\bar{\theta}$ остается постоянным вдоль каждой линии, огибаемой векторами поля (I_2).

Сопоставляя все сказанное выше, мы можем окончательно сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы векторное поле было полем вращения, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *одна конгруенция линий кривизны поля должна состоять из геодезических линий;*

2) *если I_3 — вектор поля и I_1 — касательная к одной из указанных линий кривизны, то вектор Дарбу репера (I_1, I_2, I_3) для перемещения вдоль I_3 должен иметь направление I_2;*

3) *составляющая вектора Дарбу на плоскости, перпендикулярной I_2 для перемещения репера (I_1, I_2, I_3) вдоль I_2, должна оставаться постоянной вдоль каждой линии, огибаемой полем (I_2).*

§ 13. Поле специального комплекса

Будем теперь искать условия, при которых векторное поле принадлежит специальному комплексу прямых, т. е. комплексу касательных некоторой поверхности.

Пусть I_3, как всегда, будет вектором поля и

$$\bar{M}^* = \bar{M} + tI_3 \tag{50}$$

будет точкой, в которой вектор I_3 касается поверхности $(\bar{M}^*)$. Возьмем I_1 параллельно нормали поверхности $(\bar{M}^*)$ в соответствующей точке. Тогда за репер поверхности $(\bar{M}^*)$ мы можем взять репер

$$\left.\begin{aligned} I_1^* &= I_2 \cos\sigma + I_3 \sin\sigma, \\ I_2^* &= -I_2 \sin\sigma + I_3 \cos\sigma, \\ I_3^* &= I_1. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Будем отмечать крышками формы Пфаффа для поверхности $(\bar{M}^*)$; тогда, дифференцируя соотношения (50), получим

$$\tilde{\omega}_0^1 = (\omega_0^2 - tp)\cos\sigma + (\omega_0^3 + dt)\sin\sigma,$$
$$\tilde{\omega}_0^2 = -(\omega_0^2 - tp)\sin\sigma + (\omega_0^3 + dt)\cos\sigma,$$

$$\tilde{\omega}_0^3 = \omega_0^1 + tq,$$
$$\tilde{p} = q\cos\sigma + p\sin\sigma,$$
$$\tilde{q} = -q\sin\sigma + p\cos\sigma,$$
$$\tilde{r} = d\sigma + p.$$

Для того чтобы формы с крышками были формами некоторой поверхности по отношению к указанному реперу, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. $\tilde{\omega}_0^3 \equiv \omega_0^1 + tq = 0$,

2. Две формы (например, формы $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$) должны зависеть только от двух переменных, т. е. должны быть вполне интегрируемы.

3. Все остальные формы должны быть линейно зависимы от двух предыдущих.

Первое условие дает

$$1 + tq_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0. \tag{52}$$

Второе условие, равносильное соотношениям

$$\tilde{p}'\tilde{p} = 0, \quad \tilde{q}'\tilde{q} = 0,$$

приводит лишь к одному условию

$$(d\sigma + p)\, qr = 0.$$

Наконец, третье условие равносильно соотношениям

$$\tilde{\omega}_0^1\tilde{p}\tilde{q} = 0, \quad \tilde{\omega}_0^2\tilde{p}\tilde{q} = 0, \quad \tilde{r}\tilde{p}\tilde{q} = 0,$$

которые приводят к двум новым уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}(\omega_0^2 - tp)\, qr = 0,\\ (\omega_0^3 + dt)\, qr = 0.\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Легко установить, что первое из них преобразуется в уравнение

$$(q_1 + p_2)\, r_3 - p_3 r_2 = 0, \tag{54}$$

а второе удовлетворяется тождественно значением $t = -\frac{1}{q_1}$. Что касается уравнения (54), то оно просто следствие уравнения структуры

$$q' = pr.$$

Таким образом, окончательно, мы имеем только два условия для поля с выбранным репером, именно

$$q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

Уравнение $q_2 = 0$ характеризует просто выбор репера; вектор I_2 должен иметь направление по линии кривизны поля. Условие же $q_3 = 0$ показывает, что вектор Дарбу $\overline{\omega}_0$ для перемещения репера вдоль I_3 должен быть перпендикулярен к вектору I_2.

Итак,

Для того чтобы векторное поле принадлежало специальному комплексу, необходимо и достаточно, чтобы для репера из направления

вектора I_3 поля и направления I_2 линии кривизны вектор Дарбу при перемещении вдоль I_3 был ортогонален направлению I_2.

§ 14. Ортогональные семейства поверхностей конгруенции

При выборе репера для какой-либо конгруенции линий весьма важно установить, в каком случае мы можем выбрать два ортогональных семейства поверхностей, пересекающихся по линиям конгруенции.

Если это возможно, то пусть векторы

$$I_1 \cos\sigma + I_2 \sin\sigma, \quad -I_1 \sin\sigma + I_2 \cos\sigma$$

будут нормалями двух соответствующих поверхностей указанных семейств; уравнения этих последних будут

$$\omega_0^1 \cos\sigma + \omega_0^2 \sin\sigma = 0, \quad -\omega_0^1 \sin\sigma + \omega_0^2 \cos\sigma = 0.$$

Эти уравнения должны быть вполне интегрируемы, поэтому

$$(\omega_0^1 \cos\sigma + \omega_0^2 \sin\sigma)' \, (\omega_0^1 \cos\sigma + \omega_0^2 \sin\sigma) = 0,$$
$$(-\omega_0^1 \sin\sigma + \omega_0^2 \cos\sigma)' \, (-\omega_0^1 \sin\sigma + \omega_0^2 \cos\sigma) = 0$$

или

$$-(d\sigma + r)\,\omega_0^1\omega_0^2 - \cos^2\sigma\, q\omega_0^3\omega_0^1 + \sin\sigma\cos\sigma\,(q\omega_0^2\omega_0^3 + p\omega_0^3\omega_0^1) - \sin^2\sigma\, p\,\omega_0^2\omega_0^3 = 0,$$
$$(d\sigma + r)\,\omega_0^1\omega_0^2 + \sin^2\sigma\, q\,\omega_0^3\omega_0^1 + \sin\sigma\cos\sigma\,(q\omega_0^2\omega_0^3 + p\omega_0^3\omega_0^1) + \cos^2\sigma\, p\omega_0^2\omega_0^3 = 0.$$

Отсюда получим два окончательных уравнения

$$\left.\begin{aligned} &(p_1 - q_2)\cos 2\sigma + (p_2 + q_1)\sin 2\sigma = 0, \\ &\left(d\sigma + r + \frac{p_1 + q_2}{2}\,\omega_0^3\right)\omega_0^1\omega_0^2 = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

величина σ, определяемая первым уравнением, должна удовлетворять второму.

Таким образом, конгруенция линий, через которую можно провести два семейства ортогональных поверхностей, является некоторою специальною конгруенцией, удовлетворяющей определенным условиям.

Пусть ψ_1 и ψ_2 — углы асимптотических направлений с вектором I_1, тогда

$$\operatorname{tg} 2\sigma = -\frac{p_1 - q_2}{p_2 + q_1} = \operatorname{tg}(\psi_1 + \psi_2),$$

следовательно, нормали поверхностей двух искомых семейств являются биссектрисами асимптотических направлений. Итак:

Если через линии данной конгруенции можно провести два семейства ортогональных поверхностей, то поле биссектрис асимптотических линий должно допускать семейство ортогональных поверхностей и это последнее будет одним из искомых семейств.

Первое из уравнений (55) пропадает, если

$$p_1 - q_2 = 0, \quad p_2 + q_1 = 0$$

и тогда конгруенция допускает бесчисленное множество пар семейств ортогональных поверхностей.

§ 15. Конгруенция линий кривизны

Предположим, что нам дана некоторая конгруенция линий и (I_3) — поле их касательных. Посмотрим, в каком случае существует

семейство поверхностей, на которых линии конгруенции будут линиями кривизны.

Пусть

$$\bar{N} = I_1 \cos \sigma + I_2 \sin \sigma$$

будет нормалью поверхности S искомого семейства. Тогда уравнение семейства (S) будет

$$\omega_0^1 \cos \sigma + \omega_0^2 \sin \sigma = 0;$$

оно должно быть вполне интегрируемо, следовательно,

$$(\omega_0^1 \cos \sigma + \omega_0^2 \sin \sigma)' (\omega_0^1 \cos \sigma + \omega_0^2 \sin \sigma) = 0$$

или

$$(d\sigma + r)\, \omega_0^1 \omega_0^2 + \cos^2 \sigma q \omega_0^3 \omega_0^1 + \sin^2 \sigma p \omega_0^2 \omega_0^3 -$$
$$- \sin \sigma \cos \sigma (q \omega_0^2 \omega_0^3 + p \omega_0^3 \omega_0^1) = 0.$$

С другой стороны, для перемещения

$$\omega_0^1 = \omega_0^2 = 0$$

мы должны иметь

$$d\bar{M}\bar{N}d\bar{N} = 0,$$

следовательно,

$$(d\sigma + r)\, \omega_0^1 \omega_0^2 = 0.$$

Таким образом, для искомой функции σ имеем два уравнения

$$\left. \begin{array}{l} q_2 \cos^2 \sigma - (p_2 + q_1) \cos \sigma \sin \sigma + p_1 \sin^2 \sigma = 0, \\ (d\sigma + r)\, \omega_0^1 \omega_0^2 = 0. \end{array} \right\} \quad (56)$$

Первое из этих уравнений показывает, что $I_3 \times \bar{N}$ есть одно из направлений линий кривизны поля (I_3).

Чтобы получить геометрическое истолкование второго уравнения, предположим, что $\sigma = 0$, тогда

$$r_3 = 0,$$

откуда следует, что поле (I_1) должно допускать семейство ортогональных поверхностей. Итак,

Конгруенция линий будет конгруенцией линий кривизны некоторого семейства поверхностей, если поле векторов, нормальных конгруенции и касательных к одному семейству линий кривизны данной конгруенции допускает семейство ортогональных поверхностей.

§ 16. Инварианты поля

В нашей системе референции векторное поле дано, когда заданы коэффициенты p_i, q_i, r_i, как функции тех переменных, от которых зависят формы ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3. Но, сохраняя I_3 как вектор поля, мы можем выбранный репер (I_1, I_2, I_3) поворачивать около оси I_3 так, что не все указанные коэффициенты существенны для поля; существенными явятся инварианты поворота репера.

Возьмем вместо репера (I_1, I_2, I_3) новый репер

$$\tilde{I}_1 = I_1 \cos \sigma + I_2 \sin \sigma, \quad \tilde{I}_2 = -I_1 \sin \sigma + I_2 \cos \sigma, \quad \tilde{I}_3 = I_3;$$

тогда соответствующие новые формы Пфаффа будут

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0^1 &= \omega_0^1 \cos\sigma + \omega_0^2 \sin\sigma, & \tilde{p} &= p\cos\sigma + q\sin\sigma, \\ \tilde{\omega}_0^2 &= -\omega_0^1 \sin\sigma + \omega_0^2 \cos\sigma, & \tilde{q} &= -p\sin\sigma + q\cos\sigma, \\ \tilde{\omega}_0^3 &= \omega_0^3, & \tilde{r} &= d\sigma + r. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты форм p и q имеют пять инвариантов (алгебраических). Эти инварианты мы можем получить среди совместных инвариантов квадратичных форм:

$$\begin{aligned} (d\overline{M})^2 &= (\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2, \\ d\overline{M} I_3 dI_3 &= (p)\,\omega_0^1 + (q)\,\omega_0^2, \\ d\overline{M} dI_3 &= (q)\,\omega_0^1 - (p)\,\omega_0^2; \end{aligned}$$

их совместные инварианты будут коэффициентами двух уравнений:

$$\begin{vmatrix} p_1 - s & \frac{p_2+q_1}{2} & \frac{p_3}{2} \\ \frac{p_2+q_1}{2} & q_2 - s & \frac{q_3}{2} \\ \frac{p_3}{2} & \frac{q_3}{2} & -s \end{vmatrix} = 0$$

и

$$\begin{vmatrix} q_1 - s & \frac{q_2-p_1}{2} & \frac{q_3}{2} \\ \frac{q_2-p_1}{2} & -p_2 - s & -\frac{p_3}{2} \\ \frac{q_3}{2} & -\frac{p_3}{2} & -s \end{vmatrix} = 0.$$

Таким способом мы получим шесть совместных инвариантов указанных форм, именно

$$\begin{aligned} i_1 &= p_1 + q_2, & i_4 &= p_3^2 + q_3^2, \\ i_2 &= p_2 - q_1, & i_5 &= p_1 q_3^2 - (p_2+q_1)\,q_3 p_3 + q_2 p_3^2, \\ i_3 &= p_1 q_2 - p_2 q_1, & i_6 &= p_2 q_3^2 + (p_1 - q_2)\,q_3 - q_1 p_3^2; \end{aligned}$$

все эти инварианты связаны одним соотношением

$$i_3 i_4^2 = i_1 i_4 i_5 + i_2 i_4 i_6 - i_5^2 - i_6^2.$$

Таким образом, остается пять независимых инвариантов, которые и будут искомыми инвариантами поля.

Обращение в нуль i_1 обозначает, что линии кривизны поля ортогональны или что поле имеет семейство ортогональных поверхностей.

Инвариант i_2 есть средняя кривизна поля; его обращение в нуль обозначает, что асимптотические линии ортогональны.

Инвариант i_3 есть полная кривизна поля. Инвариант i_4 есть квадрат проекции $\overline{\omega}$ (вектора Дарбу для перемещения вдоль вектора поля) на плоскость, ортогональную к вектору поля.

Обращение в нуль i_5 есть признак распадения формы $d\overline{M} I_3 dI_3$ на два линейных множителя; геометрически это значит, что направление нормальное к $\overline{\omega}_0$ (в плоскости перпендикулярной I_3) дает одно из направлений линий кривизны.

Наконец, обращение в нуль i_6 есть признак распадения квадратичной формы $d\overline{M}dI_3$ на два линейных множителя; геометрически это значит, что направление, перпендикулярное к $\overline{\omega}_0$, — одно из асимптотических направлений.

Из указанных выше формул следует

$$\tilde{p}\tilde{I}_1+\tilde{q}\tilde{I}_2=pI_1+qI_2,$$

т. е. составляющая вектора Дарбу на плоскости, ортогональной к вектору поля I_2, не зависит от выбранной пары I_1, I_2.

Московский гидромелиоративный институт имени В. Р. Вильямса

Поступило 20.VII.1944.

S. S. BUSCHEGUENNCE. LA GÉOMÉTRIE DU CHAMP DE VECTEURS

RÉSUMÉ

La monographie présente a pour but à traiter le problème du champ de vecteurs par la méthode de Cartan de repère mobile, à compléter les définitions des conceptions fondamentales et enfin à résoudre une suite des problèmes sur la structure du champ.

Soit J_3 le champ donné et J_1, J_2, J_3 un repère des orthes. Si nous désignons par (6) le vecteur de Darboux pour le repère choisi, alors la projection (7) de ω sur le plan, perpendiculaire à I_3 est indépendante de la rotation du repère autour de l'axe I_3. Je nomme la ligne de courbure d'un champ telle ligne, qui dans chaque de ses points est orthogonale au vecteur du champ ainsi qu'au vecteur correspondant de Darboux. Une ligne de courbure est ainsi une ligne normale aux vecteurs du champ le long de laquelle les vecteurs du champ forment une surface développable.

Pour que le champ de vecteurs admet une famille des surfaces orthogonales, il est nécessaire et suffisant que les lignes de courbure du champ seraient orthogonales. Pour qu'une famille des surfaces soit une famille de Lamé il faut et il suffit que les tangentes aux lignes de l'une congruence des lignes de courbure de la famille forment un champ de vecteurs admettant une famille des surfaces orthogonales. Appelons la ligne asymptotique du champ une ligne orthogonale aux vecteurs du champ et le long de laquelle chaque déplacement est parallèle au vecteur correspondant $\overline{\theta}$. Les lignes de courbure au champ sont harmoniquement divisées par des lignes asymptotiques dans deux cas, quand l'une ou l'autre de ces systèmes forme un système orthogonal. Pour un champ de vecteurs nous avons un théorème analogue au théorème de Meusnier et des autres formules analogues pour des courbures variées. Si la normale principale d'une ligne coïncide à chaque point avec le vecteur correspondant du champ, nous l'appelons *ligne géodésique* du champ. Les équations de géodésiques prennent la forme (33) ou la forme (34). On peut detérminer les directions conjuguées du champ de deux manières différentes *unilatéralement conjugué* et *bilatéralement conjugué*.

Si les lignes de courbure du champ sont indéterminées, le champ admed une famille des surfaces orthogonales, consistante des plans parallèles ou des sphères. Les lignes asymptotiques sont indéterminées dans deux cas: le champ a une famille des plans orthogonales ou le champ n'admet une famille des surfaces, ortnogonales et les lignes de courbure sont imaginaires. Dans ce cas nous avons une famille des cylindres circulaires ayant même axe fixe.

Член редколлегии проф. *Б. И. Сегал*

Подписано к печати 30/III 1946 г. А 00252
Объем 6 печ. л. 10 уч.-изд. л. Тираж 2500 экз.
Цена 9 руб. Заказ 98

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров РСФСР.
Москва, Трехпрудный, 9.

Содержание

Sommaire

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 19.
Adresse de la rédaction: B. Kaloujskaja, 19, Moscou

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 97—104 Série mathématique

В. М. ДАРЕВСКИЙ

О ВНУТРЕННЕ СОВЕРШЕННЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Устанавливаются некоторые результаты, касающиеся регулярных методов суммирования. Из этих результатов вытекает, что всякий метод Toeplitz'a, совместный со всеми не более сильными, чем он, регулярными методами, эквивалентен обыкновенной сходимости.

Объект нашего исследования — регулярные методы суммирования с помощью бесконечных матриц, так называемые методы Toeplitz'a.

Множество всех последовательностей, суммируемых методом A, называется полем этого метода и обозначается, обычно, через A^*. Если методы A и B таковы, что $A^* \subseteq B^*$, то говорят, что метод B не слабее метода A, а метод A не сильнее метода B. Если $A^* = B^*$, то методы A и B назовем равносильными.

Результат суммирования методом A последовательности x будем обозначать через $A(x)$.

Если для любой последовательности $x \in A^* B^*$, $A(x) = B(x)$, то методы A и B называют совместными.

Методы одновременно равносильные и совместные назовем эквивалентными.

Обозначим через E метод, задаваемый матрицей (e_{mn}), элементы которой равны 1, если $m = n$, и равны 0, если $m \neq n$.

Методы, эквивалентные E, назовем тривиальными. Наконец, будем называть регулярный метод суммирования внешне совершенным, если он совместен со всеми не более слабыми, чем он, регулярными методами, и внутренне совершенным, если этот метод совместен со всеми не более сильными, чем он, регулярными методами.

Реверсивные внешне совершенные методы были изучены рядом авторов (1). Такие методы не обязаны быть тривиальными.

Требование внутреннего совершенства сильнее требования внешнего совершенства. В самом деле, пусть A — внутренне совершенный метод. Если регулярный метод B не слабее метода A, то существует такой метод C, что $C^* = A^*$ и $C(x) = B(x)$ для любого $x \in A^*$ (2). Так как методы A и B — регулярные, то и метод C — регулярный. Но метод C

не сильнее метода A, поскольку $C^* = A^*$, и, следовательно, $A(x) = C(x) = B(x)$ для любого $x \in A^*$. Последнее равенство означает, что внутренне совершенный метод A обязан быть внешне совершенным. Естественно выяснить, каковы внутренне совершенные методы. Ответ на этот вопрос мы получим с помощью двух теорем, имеющих самостоятельный интерес (первая из этих теорем является частным случаем одной теоремы Mazur'a и Orlicz'a, опубликованной ими без доказательства (2)).

ТЕОРЕМА 1. *Если регулярный метод суммирует какую-нибудь расходящуюся последовательность, то он суммирует некоторую неограниченную последовательность.*

Доказательство. Пусть известно, что регулярный метод $A = (a_{mn})$ суммирует расходящуюся последовательность $\{u_n\}$ к величине u. Если последовательность $\{u_n\}$ — неограниченная, то доказательство отпадает. Допустим поэтому, что последовательность $\{u_n\}$ — ограниченная. В таком случае последовательность $x = \{x_n\} = \{u_n - u\}$ будет также ограниченной и трансформируется методом A в сходящуюся к нулю последовательность $\{y_m\}$.

Выделим из последовательностей индексов $\{m\}$ и $\{n\}$ подпоследовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ следующим образом. Выберем m_1 так, чтобы для всех $m \geqslant m_1$ имело место неравенство

$$|y_m| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n\right| < 1,$$

и выберем такое $n_1 > 1$, чтобы

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |a_{mn}| < 1 \quad (m = 1, 2, \ldots, m_1).$$

Далее, считая, что m_{k-1} и n_{k-1} $(k > 1)$ определены, выберем такое $m_k > m_{k-1}$, чтобы для всех $m \geqslant m_k$ выполнялись неравенства

$$|y_m| < \frac{1}{k}, \quad \sum_{n=1}^{n_{k-1}} |a_{mn}| < \frac{1}{k}$$

и такое $n_k > n_{k-1}$, чтобы

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} |a_{mn}| < \frac{1}{2^{k-1}k} \quad (m = 1, 2, \ldots, m_k).$$

С помощью последовательности индексов $\{n_k\}$ последовательность $\{x_n\}$ может быть разбита на зоны. Будем считать, что зона с номером k состоит из элементов $x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \ldots, x_{n_k}$, полагая $n_0 + 1 = 1$.

Так как последовательность $\{x_n\}$ расходящаяся, то из нее можно выделить такую бесконечную подпоследовательность $\{x'_n\}$, что $|x'_n| > c > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Элементы этой подпоследовательности будут

содержаться в некоторых сколь угодно далеких зонах последовательности $\{x_n\}$ и, следовательно, если мы умножим все элементы зоны с номером $k\,(k=1, 2, \ldots)$ на $\sqrt{k}$, то получим, вместо ограниченной последовательности $\{x_n\}$, неограниченную последовательность $\{\xi_n\}$.

Покажем, что $\{\xi_n\}$ трансформируется методом A в сходящуюся к нулю последовательность $\{\eta_m\}$. Тем самым теорема будет доказана.

Пусть $m_k \leqslant m < m_{k+1}\,(k>1)$. Тогда

$$\eta_m = \sum_{n=1}^{n_{k-1}} a_{mn}\xi_n + \sqrt{k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{mn}x_n + \sqrt{k+1}\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{mn}x_n + \\ + \sqrt{k+2}\sum_{n=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} a_{mn}x_n + \cdots$$

и, следовательно,

$$|\eta_m| < \frac{N}{\sqrt{k}} + \sqrt{k}\left|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_{k+1}} a_{mn}x_n\right| + (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\,NM + \\ + \frac{N}{2^k}\left(\frac{\sqrt{k+2}}{k+1} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{k+3}}{k+2} + \frac{1}{2^2}\,\frac{\sqrt{k+4}}{k+3} + \cdots\right), \qquad (1)$$

где $N = \sup\limits_n |x_n| < \infty$, $M = \sup\limits_m \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$.

Но

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 0,$$

а

$$\frac{1}{2^k}\left(\frac{\sqrt{k+2}}{k+1} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{k+3}}{k+2} + \frac{1}{2^2}\,\frac{\sqrt{k+4}}{k+3} + \cdots\right) < \frac{1}{2^{k-1}}\sqrt{\frac{2}{k+1}}.$$

Далее,

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_{k+1}} a_{mn}x_n = y_m - \sum_{n=1}^{n_{k-1}} a_{mn}x_n - \sum_{n=n_{k+1}+1}^{\infty} a_{mn}x_n,$$

откуда

$$\left|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_{k+1}} a_{mn}x_n\right| < \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2^k}\,\frac{1}{k+1}\right)N.$$

Таким образом, каждый из четырех членов, стоящих в правой части неравенства (1), стремится к нулю при $k\to\infty$, и так как $k\to\infty$, когда $m\to\infty$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\eta_m = 0$.

Видоизменяя, с помощью диагонального процесса, построение последовательностей $\{m_k\}$, $\{n_k\}$, приходим к теореме Mazur'a и Orlicz'a, о которой мы уже упоминали.

ТЕОРЕМА Mazur'a и Orlicz'a. *Пусть дана последовательность регулярных методов A_1, A_2, A_3, ... Если каждый из этих методов суммирует расходящуюся последовательность $\{u_n\}$ к одной и той же величине u, то существует неограниченная последовательность, которая суммируется любым методом A_λ ($\lambda=1, 2, \ldots$) к величине u.*

Доказательство. Считая, что последовательность $\{u_n\}$ ограниченная (в противном случае доказательства не требуется), рассмотрим последовательность $\{x_n\}=\{u_n-u\}$, которая трансформируется методом $A_\lambda=(a_{mn}^{(\lambda)})$, ($\lambda=1, 2, \ldots$), в сходящуюся к нулю последовательность $\{y_m^{(\lambda)}\}$.

Выделим из последовательностей индексов $\{m\}$ и $\{n\}$ подпоследовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ следующим образом. Выберем m_1 так, чтобы для всех $m \geqslant m_1$ имело место неравенство

$$|y_m^{(1)}| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(1)} x_n\right| < 1$$

и выберем такое $n_1>1$, чтобы

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |a_{mn}^{(1)}| < 1 \qquad (m=1, 2, \ldots, m_1).$$

Далее, считая, что m_{k-1} и n_{k-1} $(k>1)$ определены, выберем такое $m_k>m_{k-1}$, чтобы для всех $m \geqslant m_k$ выполнялись неравенства

$$|y_m^{(\lambda)}| < \frac{1}{k}, \quad \sum_{n=1}^{n_{k-1}} |a_{mn}^{(\lambda)}| < \frac{1}{k} \qquad (\lambda=1, 2, \ldots, k)$$

и такое $n_k>n_{k-1}$, чтобы

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} |a_{mn}^{(\lambda)}| < \frac{1}{2^{k-1}k} \qquad (\lambda=1, 2, \ldots, k; m=1, 2, \ldots, m_k).$$

Разобьем с помощью последовательности индексов $\{n_k\}$ последовательность $\{x_n\}$ на зоны так же, как в доказательстве теоремы 1, и таким же образом, как там, построим неограниченную последовательность $\{\xi_n\}$.

Последовательность $\{\xi_n\}$ трансформируется методом A_λ ($\lambda=1, 2, \ldots$) в сходящуюся к нулю последовательность $\{\eta_m^{(\lambda)}\}$. В самом деле, фиксируем из чисел натурального ряда какое-нибудь число λ и положим, что $m_k \leqslant m < m_{k+1}$ $(k>\lambda)$. Тогда оценка, которая была проведена в доказательстве теоремы 1 для величины η_m, может быть без изменения проведена и для величины $\eta_m^{(\lambda)}$, с заменой величин a_{mn} и y_m, соответственно, на $a_{mn}^{(\lambda)}$ и $y_m^{(\lambda)}$. Так как неограниченная последовательность $\{\xi_n+u\}$ будет суммироваться любым методом A_λ ($\lambda=1, 2, \ldots$) к величине u, то теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Какова бы ни была неограниченная последовательность $x=\{x_n\}$, всегда можно указать регулярный метод A, который суммирует $\{x_n\}$ к любому наперед заданному числу ξ, причем $A^*=L(x+E^*)$ ($L(x+E^*)$ — линейная оболочка множества $x+E^*$).*

Доказательство. Напишем тождество

$$\{x_n\}\equiv\{u_n\}+\{u'_n\},$$

где

$$u_n=x_n-\xi, \quad u'_n=\xi \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как последовательность $\{u_n\}$ неограниченная, то можно указать такую ее подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, для которой выполняются условия:

1. $u_{n_k}\neq 0$ $(k=1, 2, \ldots)$.
2. Для любого $m\leqslant n_k$

$$\left|\frac{u_m}{u_{n_{k+1}}}\right|<\frac{1}{k} \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Определим теперь матрицу $A=(a_{mn})$ следующим образом. В строке с номером m, $n_{k-1}+1\leqslant m\leqslant n_k$, $(k=1, 2, \ldots; n_0=0)$, все элементы матрицы равны нулю, за исключением элемента $a_{mm}=1$ и элемента $a_{mn_{k+1}}$, который определяется из равенства

$$u_m+a_{mn_{k+1}}u_{n_{k+1}}=0. \tag{2}$$

На основании этого равенства и условия 2 имеем

$$|a_{mn_{k+1}}|<\frac{1}{k} \quad (n_{k-1}+1\leqslant m\leqslant n_k;\ k=1, 2, \ldots).$$

Следовательно, метод A — регулярный.

Ясно, что метод A трансформирует последовательность $\{u_n\}$ в последовательность, состоящую сплошь из нулей, и так как метод A — регулярный, то последовательность $\{x_n\}$ суммируется им к ξ.

Пусть $\{v_n\}$ — какая-нибудь последовательность, суммируемая методом A. Тогда

$$v_m+a_{mn_{k+1}}v_{n_{k+1}}=e_m \quad (n_{k-1}+1\leqslant m\leqslant n_k; k=1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $\{e_m\}$ — сходящаяся последовательность. Равенство (3) с помощью равенства (2) может быть написано следующим образом:

$$v_m-\frac{v_{n_{k+1}}}{u_{n_{k+1}}}u_m=e_m \quad (n_{k-1}+1\leqslant m\leqslant n_k; k=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Полагая в равенстве (4) $m=n_k$, получаем

$$\frac{v_{n_{k+1}}}{u_{n_{k+1}}}=\frac{v_{n_k}}{u_{n_k}}-\frac{e_{n_k}}{u_{n_k}} \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$v_m - \frac{v_{n_1}}{u_{n_1}} u_m = e_m - \left(\frac{e_n}{u_{n_1}} + \frac{e_{n_2}}{u_{n_2}} + \cdots + \frac{e_{nk}}{u_{nk}} \right) u_m \tag{6}$$

$$(n_{k-1} + 1 \leqslant m \leqslant n_k, \quad k = 1, 2, \ldots).$$

В силу условия 2, ряд

$$\frac{e_{n_1}}{u_{n_1}} + \frac{e_{n_3}}{u_{n_2}} + \cdots \tag{7}$$

— абсолютно сходящийся.

Обозначим сумму ряда (7) через s. Тогда равенство (6) можно записать в виде

$$v_m + \left(s - \frac{v_{n_1}}{u_{n_1}} \right) u_m = e_m + \varepsilon_m, \tag{8}$$

где

$$\varepsilon_m = u_m \left(\frac{e_{n_{k+1}}}{u_{n_{k+1}}} + \frac{e_{n_{k+2}}}{u_{n_{k+2}}} + \cdots \right) \quad (n_{k-1} + 1 \leqslant m \leqslant n_k;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что

$$|\varepsilon_m| < \frac{M}{k} U_k,$$

где

$$M = \sup_k |e_{nk}| < \infty, \text{ а } U_k = |u_{n_{k+1}}| \left(\frac{1}{|u_{n_{k+1}}|} + \frac{1}{|u_{n_{k+2}}|} + \cdots \right).$$

Так как $k \to \infty$ вместе с m и так как, в силу условия 2, U_k монотонно убывает при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$. Следовательно, полагая

$$\frac{v_{n_1}}{u_{n_1}} - s = \alpha, \quad \left(s - \frac{v_{n_1}}{u_{n_1}} \right) \xi + e_m + \varepsilon_m = \delta_m,$$

получаем, что

$$v_m = \alpha x_m + \delta_m \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

где $\{\delta_m\}$ — сходящаяся последовательность.

Итак, всякая последовательность $\{v_m\}$, суммируемая методом A, принадлежит $L(x + E^*)$. Обратное очевидно. Теорема тем самым доказана.

Следует заметить, что если x — ограниченная расходящаяся последовательность, то не существует регулярного метода A, поле которого $A^* = L(x + E^*)$. Это следует из теоремы 1 (поскольку $L(x + E^*)$ не содержит неограниченных последовательностей), а также из того, что множество $L(x + E^*)$ сепарабельно в пространстве ограниченных последовательностей, а множество всех ограниченных последовательностей, суммируемых регулярным методом, когда оно $\neq E^*$, — несепарабельно в указанном пространстве [2], [3].

Из теорем 1, 2 непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. *Из всех регулярных методов суммирования внутренне совершенными являются только тривиальные.*

В самом деле, если какой-нибудь регулярный метод A сильнее обыкновенной сходимости, то, в силу теоремы 1, он суммирует некоторую неограниченную последовательность $x=\{x_n\}$ к некоторой величине ξ. Далее, в силу теоремы 2, можно построить такой регулярный метод B, который суммирует последовательность $\{x_n\}$ к величине $\neq\xi$, причем $B^*=L(x+E^*)$ и, следовательно, $B^*\subseteq A^*$. Таким образом, любой регулярный нетривиальный метод A несовместен с некоторым, не более сильным, чем он, регулярным методом B и так как очевидно, что всякий тривиальный метод — внутренне совершенный, то теорема тем самым доказана.

Поступило
2. X. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, (1932) 90 – 95.
Mazur, S., Über lineare Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr., Bd. 28, 1928 (Satz VIII).
Mazur, S., Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitz'schen Limitierungsverfahren, Stud. Math., II, 1930 (Satz 7).
Hill, J. D., On perfect methods of summability, Duke Math. Journ., v. 3, 1937.
Hill, J. D., Some properties of summability, Duke Math. Journ., v. 9, 1942 (Theorem 5).
[2] Mazur, S. et Orlicz, W., Sur les méthodes linéaires de sommations, Comptes Rendus, 196, (1933), 32 – 34 (Théorèmes 1, 3, 5).
[3] Брудно А. Л., Суммирование ограниченных последовательностей линейными регулярными методами, Доклады АН, XLIII (1944), 192.

V. DAREVSKY. ON INTRINSICALLY PERFECT METHODS OF SUMMATION

SUMMARY

In the present research we consider regular methods of summation by means of infinite matrices—the so called Toeplitz methods.

The Toeplitz method is said to be intrinsically perfect if it is consistent with every regular method which is not stronger than the method in question. The problem arises to characterize intrinsically perfect methods.

The following preliminary theorems are proved:

THEOREM 1. *If a regular method sums a divergent sequence, then it also sums an unbounded sequence.*

THEOREM 2. *For any unbounded sequence $x=\{x_n\}$ there is a regular method of summation A which sums x to an arbitrarily fixed number. Thereby $A^*=L(x+E^*)$, where A^* is the set of the sequences summable by the method A, E^* is the set of all convergent sequences, $L(x+E^*)$ is the linear hull over the set $x+E^*$.*

By the way we give a modification of the proof of Theorem 1 so as to obtain a more general result due to Mazur and Orlicz (2) (published without proof): *If everyone of the regular methods* $A_1, A_2, \ldots$ *sums a divergent sequence* $\{u_n\}$ *to the same number* u, *then there exists an unbounded sequence summable to* u *by every* $A_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots)$.

Theorem 1 and 2 immediately imply the following theorem which answers the above question:

THEOREM 3. *The only intrinsically perfect methods of summation are those which sum but convergent sequences.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 105—120 Série mathématique

С. З. БРУК

О ЗАДАЧЕ CAUCHY ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Работа служит обобщением теоремы И. Г. Петровского о корректной постановке задачи Cauchy для линейных систем дифференциальных уравнений параболического типа на системы, линейные относительно старших производных и нелинейные относительно младших производных.

Автор сводит задачу к системе интегро-дифференциальных уравнений и решает ее методом последовательных приближений.

Введение

В работе «О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций» И. Г. Петровским* получены условия (необходимые и достаточные) равномерно корректной постановки задачи Cauchy ** (1) для систем

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j, k_0, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (1)$$

$$\left(i, j = 1, 2, \ldots, N; \quad \sum k_s = k \leqslant M\right),$$

где $A_{ij}^{k_0, k_1, \ldots, k_n}(t)$ и $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ — комплексные функции действительных аргументов $t, x_1, \ldots, x_n$, ограниченные вместе со всеми своими производными до некоторого порядка в полосе

$$\text{(a)} \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad -\infty < x_k < +\infty.$$

Автор называет задачу Cauchy для системы (1) поставленной равномерно корректно в интервале $0 < t < T$, если выполнены следующие условия:

I. Условие существования и единственности. Для всякой системы функций

$$\varphi_i^k(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, N; \ k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

ограниченных и непрерывных во всем пространстве действительных значений аргументов $x_1, \ldots, x_n$ вместе со всеми своими частными про-

---

* Приношу благодарность И. Г. Петровскому и В. В. Степанову, под руководством которых выполнена настоящая работа.

** Автор указывает, что следует идее Hadamard'a, развитой в его книге «Le problème de Cauchy» (2).

изводными до некоторого порядка, существует, притом единственная, система функций $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, ограниченных вместе со всеми своими частными производными по x_k до некоторого порядка, которые при всяком t в промежутке

$$0 \leqslant t_0 < t \leqslant T$$

удовлетворяют системе (1), а при $t = t_0$ принимают значения:

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = \varphi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n_i - 1). \tag{1_1}$$

II. Условие равномерной непрерывности от начальных данных. Каково бы ни было t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, и $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta(\varepsilon)$, зависящее от ε и не зависящее от t_0, что как только функции $\varphi_i^{(k)}$ и все их производные по x_k до известного порядка L изменяются меньше чем на ε, функции u_i изменяются меньше чем на $\delta(\varepsilon)$.

Мы приведем здесь условия корректной постановки задачи Cauchy для систем первого порядка $(n_i = 1)$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

так как только эти системы нас в дальнейшем будут интересовать. Необходимое и достаточное условие равномерно корректной постановки задачи Cauchy для систем (2) (И. Г. Петровский называет его условием A) состоит в следующем: max модулей функций $V_i^l(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющих при всяком t из промежутка $t_0 < t \leqslant T$ системе

$$\frac{dV_i^l}{dt} = \sum_{i, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} V_j^l \tag{3}$$

и при $t = t_0$ условию

$$V_i^l(t_0) = \begin{cases} 0 & i \neq l, \\ 1 & i = l, \end{cases} \tag{3_1}$$

не должны расти (равномерно по t_0) быстрее некоторой фиксированной степени наибольшего из $|\alpha_s|$, когда все α_s принимают только действительные значения и

$$\max |\alpha_s| \to \infty.$$

В работе И. Г. Петровского «О проблеме Cauchy» доказывается, что для систем, названных автором параболическими, условие A выполнено, т. е. задача Cauchy для таких систем поставлена равномерно корректно.

Цель настоящей работы — обобщение теоремы о корректности параболических систем на линейные системы, имеющие вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j, m_1, \ldots, m_n} A_{ij}^{(m_1, \ldots, m_n)}(t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} + \\ + \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} B_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$

и на системы квазилинейные

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j, m_1, \ldots, m_n} A_{ij}^{(m_1, \ldots, m_n)}(t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} + F_i, \tag{5}$$

где F_i зависит от $t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_N$ и производных функций $u_1, \ldots, u_N$ по $x_1, \ldots, x_n$ порядка меньше M.

При этом определение параболичности для систем (4) и (5) ничем не отличается от соответствующего определения параболичности для системы (2), данного **И. Г. Петровским**.

Системы (2), (4) и (5) называются *параболическими* на интервале $(0, T)$, если при всяких действительных α_k, у которых $\sum \alpha_k^2 = 1$, действительные части всех корней детерминанта матрицы

$$\left\| \sum_k A_{sj}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} \right\| - \lambda E \quad (s, j = 1, 2, \ldots, N; \sum k_i = n)$$

остаются меньше некоторой отрицательной постоянной $-\delta$.

Решения И. Г. Петровского, удовлетворяющие в полосе (а) системе (2) и при $t = t_0$ условиям

$$u_i|_{t=t_0} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \tag{2_1}$$

пишутся так:

$$u_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \int \sum_s G_i^s(t, t_0, x_1, \xi_1, \ldots, x_n, \xi_n) \varphi_s(\xi_1, \ldots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x_1, \xi_1, \ldots, x_n, \xi_n) f_s(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n, \tag{6}$$

где функции G_i^s, названные автором функциями Грина, выражаются через решения V_i^s системы (3) следующим образом:

$$G_i^s(t, t_0, x_1, \xi_1, \ldots, x_n, \xi_n) = \int V_i^s(t, t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) e^{i \sum_k \alpha_k (x_k - \xi_k)} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n.$$

Замечание. Под символом $\int \Psi d\xi_1 \cdots d\xi_n$ подразумевается n-кратный интеграл от комплексной функции Ψ действительных аргументов ξ и сходимость этого интеграла понимается в смысле существования предела, распространенного на куб Q_ρ (ρ — ребро куба) интеграла $\int_{Q_\rho} \Psi d\xi_1 \cdots d\xi_n$, при условии, что $\rho \to \infty$.

Формулы (6) дают систему решений, непрерывных и ограниченных всюду в полосе (а), вместе с их производными до $2M + n - 1$-го порядка по аргументам $x_1, \ldots, x_n$ и выведены в предположении, что функции f_s непрерывны и ограничены вместе с их производными $M + n$-го порядка по аргументам x_k, а функции φ_s — до производных $2M + n$-го порядка, всюду в полосе (а).

По доказанному И. Г. Петровским, интегралы

$$\int \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} G_i^s(t, t_0, x, \xi) f_s(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

сходятся равномерно по x и ξ для $t > t_0$, откуда следует, что

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \int \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} G_i^s \cdot f_s(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_n +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int \frac{\partial^k G_i^s}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \cdot \varphi_s d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

Метод, которым мы пользуемся для решения нашей задачи, состоит в сведении систем (4) и (5) к системам интегро-дифференциальных

уравнений и в решении последних последовательными приближениями. Этот метод хорошо известен в применении к уравнениям разных типов, в том числе к одному уравнению параболического типа ([3]). Вопрос о возможности использования этого метода в применении к системе параболического типа впервые поставил И. Г. Петровский в своей работе «О проблеме Cauchy».

I. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Приведение к системе интегро-дифференциальных уравнений

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j,m_1,\ldots,m_n} A_{ij}^{(m_1,\ldots,m_n)}(t)\frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}+$$

$$+\sum_{j,k_1,\ldots,k_n} B_{ij}^{(k_1,\ldots,k_n)}(t,x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}+f_i(t,x_1,\ldots,x_n), \qquad (4)$$

параболическая на интервале $0<t<T$. Пусть коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям:

$$A_{ij}^{(m_1,\ldots,m_n)}(t)$$

непрерывны по аргументу t $(0\leqslant t\leqslant T)$,

$$B_{ij}^{(k_1,\ldots,k_n)}(t,x_1,\ldots,x_n) \quad \text{и} \quad f(t,x_1,\ldots,x_n)$$

имеют ограниченные непрерывные производные по любой комбинации $x_1,\ldots,x_n$ до $M+n$-го порядка всюду в полосе

$$\text{(a)} \quad 0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant T; \quad -\infty<x_k<+\infty.$$

Будем называть решения системы (4) правильными в некоторой области, если они в этой области имеют ограниченные и непрерывные производные до $2M+n$-го порядка, по любой комбинации аргументов x_k.

Докажем, что все решения системы (4), правильные в полосе (а) и удовлетворяющие при $t=t_0$ условиям

$$u_i|_{t=t_0}=\varphi_i(x_1,\ldots,x_n), \qquad (4_1)$$

где φ_i имеют ограниченные и непрерывные производные до $M+n$-го порядка по любой комбинации аргументов x_k всюду в пространстве x_k, эквивалентны правильным решениям системы интегро-дифференциальных уравнений

$$u_i(t,x_1,\ldots,x_n)=u_i^{(0)}(t,x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}d\tau\int\sum_s G_i^s(t,\tau,x,\xi)\,M_s\{u(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)\}\,d\xi_1\ldots d\xi_n, \qquad (7)$$

где

$$M_s\{u(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)\}=\sum_{j,k_1,\ldots,k_n} B_{sj}^{(k_1,\ldots,k_n)}(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)\frac{\partial^k u(\tau,\xi_1\ldots,\xi_n)}{\partial\xi_1^{k_1}\ldots\partial\xi_n^{k_n}},$$

$$u_i^{(0)}=\int\sum_s G_i^s\varphi_s d\xi_1\ldots d\xi_n+\int_{t_0}^{t}d\tau\int\sum_s G_i^s f_s d\xi_1\ldots d\xi_n,$$

понимая под «правильным решением» системы (7) всякое ее решение, имеющее ограниченные и непрерывные производные до $2M+n-1$-го порядка по любой комбинации x_k всюду в полосе (а).

Пусть u_i — правильные в полосе (a) решения системы (4), удовлетворяющие начальным данным (4_1). Тогда выражения

$$M_s\{u(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)\} \tag{8}$$

будут иметь ограниченные и непрерывные производные до $M+n$-го порядка по любой комбинации аргументов x_k всюду в полосе (a). Стало быть, решения u_i можно представить по формулам (6) введения, которые совпадают в этом случае с интегро-дифференциальным соотношением (7).

Пусть теперь, обратно, u_i будут правильными решениями системы интегро-дифференциальных уравнений (7). В силу сказанного выше о выражениях (8) интегралы правых частей (7), как и интегралы, получаемые формальным дифференцированием последних под знаком интеграла M раз по аргументам x_k, сходятся и притом равномерно.

Но функции $G_i^s(t, \tau, x, \xi)$ удовлетворяют однородной системе, соответствующей системе (4). В таком случае последовательным дифференцированием (7) по аргументам t, x_k можно убедиться, что функция u_i в полосе (a) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (4).

Далее, полагая в формулах (7) $t = t_0$, получаем, что u_i удовлетворяют также начальным данным (4_1).

На основании доказанной эквивалентности системы (4) при начальных данных (4_1) системе (7) следует, что наша теорема о равномерной корректности задачи для системы (4) может быть формулирована в виде теоремы о равномерной корректности решений системы интегро-дифференциальных уравнений (7).

Иначе говоря, требуется доказать:

1. Существование правильных решений, удовлетворяющих системе (7).
2. Единственность этих решений.
3. Равномерную непрерывность их от начальных данных φ_s.

Последнее мы здесь понимаем в том же смысле, что и для решений системы (4).

Для доказательства этих теорем нам нужны будут некоторые оценки.

§ 2. Оценки интегралов от функции Грина *

Оценим интеграл

$$I_i^k = \int \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial^k G_i^s(t, \tau, x, \xi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{9}$$

Разобьем область интегрирования на две части: Q_0 и Q_1. Q_0 — это область внутри и на границе куба

$$\frac{x_k - \xi_k}{(t-\tau)^{1/M}} \leqslant a$$

и Q_1 — область вне этого куба

$$\frac{x_k - \xi_k}{(t-\tau)^{1/M}} > a.$$

* Здесь мы пользуемся методом И. Г. Петровского (см. вывод формулы (88) в уже цитированной работе).

Тогда интеграл I_i^k разобьется на два слагаемых:

$$I_i^k = I_{iQ_0}^k + I_{iQ_1}^k.$$

И. Г. Петровским доказано, что

$$\left| \frac{\partial^k G_i^s(t, \tau, x, \xi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+k}{M}}} \left[\frac{(t-\tau)^{1/M}}{\sqrt{\sum_k (x_k - \xi_k)^2}} \right]^L,$$

где L — произвольное положительное число или нуль, а C — некоторая константа, зависящая только от k и L.

Полагая $L = 0$, получим

$$|I_{Q_0}^k| \leqslant \frac{C_1 N}{(t-\tau)^{k/M}} \int_{Q_0} d\left[\frac{\xi_1 - x_1}{(t-\tau)^{1/M}}\right] \cdots d\left[\frac{\xi_n - x_n}{(t-\tau)^{1/M}}\right].$$

Полагая $L > n$, получим

$$|I_{Q_1}^k| < \frac{C_2 N}{(t-\tau)^{k/M}} \int_{Q_1} \left[\frac{(t-\tau)^{1/M}}{\sqrt{\sum_k (x_k - \xi_k)^2}}\right]^L d\left[\frac{\xi_1 - x_1}{(t-\tau)^{1/M}}\right] \cdots d\left[\frac{\xi_n - x_n}{(t-\tau)^{1/M}}\right],$$

откуда следует

$$|I_{iQ_0}^k| < \frac{C_1 N a^n}{(t-\tau)^{k/M}}, \quad |I_{iQ_1}^k| < \frac{C_2 N a^{n-L}}{(t-\tau)^{k/M}}.$$

Складывая последние два неравенства, получим искомую оценку

$$|I_i^k| < \frac{CN}{(t-\tau)^{k/M}}. \tag{10}$$

Оценим, далее, интеграл

$$J_i^k(\psi) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s \frac{\partial^k C_i^s(t, \tau, x, \xi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \psi_s(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n,$$

где ψ_s непрерывны и ограничены в полосе (а). Пусть для фиксированного τ в пространстве ξ_k $\max|\psi_s(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)| = \psi_s(\tau)$. Тогда в силу (10)

$$|J_i^k(\psi)| < \int_{t_0}^{t} \frac{\psi_s(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{k/M}} \leqslant C \cdot B\left(1; 1 - \frac{k}{M}\right)(t - t_0)^{1-\frac{k}{M}}, \tag{11}$$

где C — константа, $B(\alpha, \beta)$ — функция Эйлера.

Наконец, оценим $M_s\{J(\psi)\}$. Согласно (11),

$$|M_s[J(\psi)]| < N \cdot B \cdot \Lambda \sum_{k=0}^{M-1} |J^k(\psi)|, \tag{12}$$

где Λ — наибольшее количество слагаемых в сумме

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n} \left(\sum k_l = k < M\right).$$

§ 3. Доказательство существования

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$u_i(t, x_1, \ldots, x_n) = u_i^{(0)}(t, x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \lambda \int_{t_0}^{t} d\tau \int^{s} \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi) M_s\{u(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)\}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n; \tag{7$^\lambda$}$$

при $\lambda = 1$ эта система совпадает с (7). Докажем существование правильных решений, удовлетворяющих интегро-дифференциальной системе (7$^\lambda$).

Будем искать решения в виде рядов по степеням λ. Подстановкой этих рядов в систему (7^λ) убеждаемся, что, для того чтобы быть по крайней мере формальными решениями, эти ряды должны иметь функции $u_i^{(0)}(t, x_k)$ в качестве свободных членов и коэффициенты $u_i^{(m)}(t, x_k)$ при λ^m должны удовлетворять рекуррентному соотношению

$$u_i^{(m)}(t, x_k) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, M_s\{u^{(m-1)}(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)\}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \quad (13)$$

Мы убедимся в том, что таким образом построенные ряды по степеням λ

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m u_i^m(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (14)$$

будут не только формальными, но и истинными решениями системы (7^λ), если покажем, что они, так же как их формальные производные по аргументам x_k до $M-1$-го порядка

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \frac{\partial^k u_i^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \quad (k \leqslant M-1), \quad (14_1)$$

равномерно сходятся всюду в полосе (a).

В самом деле, допустим, что эти ряды действительно равномерно сходятся.

Введем обозначение

$$\sigma_i^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{k=m} \lambda^k u_i^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_n)$$

и просуммируем (13) почленно от $m=0$ до m; в результате получим рекуррентное соотношение

$$\sigma_i^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_n) = u_i^{(0)}(t, x_1, \ldots, x_n) + \\ + \lambda \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, M_s\{\sigma^{(m-1)}\}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \quad (15)$$

По нашему предположению последовательности

$$\sigma_i^m(t, x_k) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^k \sigma_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \quad (k \leqslant M-1)$$

сходятся равномерно в полосе (a). Поэтому в пределе формулы (15) будут иметь вид

$$\sigma_i(t, x_k) = u_i^{(0)}(t, x_k) + \lambda \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, M_s\{\sigma(\tau, \xi)\}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

где

$$\sigma_i(t, x_k) = \lim_{m\to\infty} \sigma_i^{(m)}(t, x_k) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m u_i^{(m)}(t, x_k).$$

Последнее означает, что σ_i — истинные решения системы (7^λ).

Итак, остается доказать равномерную сходимость рядов (14) и (14_1) всюду в полосе (a).

С этой целью найдем оценки для коэффициентов $u_i^{(m)}(t, x_k)$ и их производных по x_k до $M-1$-го порядка. Пусть $u_i^{(0)}(t, x_k)$ и все их производные до $M-1$-го порядка по аргументам x_k всюду в полосе (а) удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{\partial^{k^0} u_i^{(0)}(t, x_k)}{\partial x_1^{k_1^{(0)}} \dots \partial x_n^{k_n^{(0)}}} \right| < D \quad (k^{(0)} \leqslant M-1). \tag{16_0}$$

Тогда, в силу (12),

$$|M_s\{u^{(0)}\}| < NB\Delta(M-1)D. \tag{17_0}$$

Далее, в силу (17_0) и (11)

$$\left| \frac{\partial^{k^{(1)}} u_i^{(1)}(t, x_k)}{\partial x_1^{k_1^{(1)}} \dots \partial x_n^{k_n^{(1)}}} \right| < NB\Delta(M-1)DB\left(1;\, 1-\frac{k^{(1)}}{M}\right)(t-t_0)^{1-\frac{k^{(1)}}{M}}$$
$$(k^{(1)} \leqslant M-1). \tag{16_1}$$

И, наконец, в силу (16_1) и (12),

$$|M_i\{u^{(1)}\}| \leqslant (NB\Delta)^2 (M-1) D \sum_{k^{(1)}} B\left(1;\, 1-\frac{k^{(1)}}{M}\right)(t-t_0)^{1-\frac{k^{(1)}}{M}}$$
$$(k^{(1)} \leqslant M-1). \tag{17_1}$$

Докажем теперь, что общий вид оценок для функций $u_i^{(m)}$ и их производных до $M-1$-го порядка такой:

$$\left| \frac{\partial^{k^{(m)}} u_i^{(m)}(t, x_k)}{\partial x_1^{k_1^{(m)}} \dots \partial x_n^{k_n^{(m)}}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant (NB\Delta)^m (M-1) D \cdot \sum_{k^{(1)}, \dots, k^{(m-1)}} B\left(1;\, 1-\frac{k^{(1)}}{M}\right) \cdot$$
$$\cdot B\left(2-\frac{k^{(1)}}{M};\, 1-\frac{k^{(2)}}{M}\right) \dots B\left(m-\frac{\sum^{m-1} k^{(i)}}{M};\, 1-\frac{k^{(m)}}{M}\right) \cdot$$
$$\cdot (t-t_0)^{m-\frac{\sum^{m} k^{(i)}}{M}}. \tag{16_m}$$

С этой целью покажем, что, будучи верны для m, они также верны для $m+1$.

В самом деле, в силу (16_m) и (11) имеем

$$|M_i\{u^{(m)}\}| \leqslant (NB\Delta)^{m+1}(M-1)D \cdot \sum_{k^{(1)}, \dots, k^{(m)}} B\left(1;\, 1-\frac{k^{(1)}}{M}\right) \cdot$$
$$\cdot B\left(2-\frac{k^{(1)}}{M};\, 1-\frac{k^{(2)}}{M}\right) \dots B\left(m-\frac{\sum^{m-1} k^{(i)}}{M};\, 1-\frac{k^{(m)}}{M}\right) \cdot (t-t_0)^{m-\frac{\sum^{m} k^{(i)}}{M}} \tag{17_m}$$

и из последней, в силу (11), находим искомую оценку для

$$\frac{\partial^{k^{(m+1)}} u_i^{(m+1)}}{\partial x_1^{k_1^{(m+1)}} \dots \partial x_n^{k_n^{(m+1)}}},$$

которая действительно может быть получена из (16_m) заменой m на $m+1$.

Заметим, что

$$B\left(1;\ 1-\frac{k^{(1)}}{M}\right)\ldots B\left(m-\frac{\sum\limits^{m-1} k^{(i)}}{M};\ 1-\frac{k^{(m)}}{M}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(1-\frac{k^{(1)}}{M}\right)\ldots\Gamma\left(1-\frac{k^{(m)}}{M}\right)}{\Gamma\left(m+1-\frac{\sum k^{(i)}}{M}\right)}\leqslant\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{M}\right)\right)^{m+1}}{\left(\left[\frac{m}{M}\right]\right)!}, \tag{18}$$

откуда

$$\left|\frac{\partial^{k^{(m)}} u_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1^{(m)}}\ldots\partial x_n^{k_n^{(m)}}}\right|<$$

$$<[NB\Delta(M-1)]^m\frac{\left[\left(\frac{1}{M}\right)\right]^m}{\left(\left[\frac{m}{M}\right]\right)!}D\max|t-t_0|^{m-\frac{\sum\limits^{m} k^{(i)}}{M}}\qquad(k^{(i)}\leqslant M-1)\tag{19}$$

и, стало быть, ряды (14) и (14_1) сходятся равномерно, что и требовалось доказать.

Замечание. Обозначим

$$\omega=\sum_{m=0}^{\infty}[BN\Delta(M-1)]^m\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{M}\right)\right]^m}{\left(\left[\frac{m}{M}\right]\right)!}\max(t-t_0)^{m-\frac{\Sigma_k^{(i)}}{M}},$$

тогда получим следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial^k\sigma_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right|<D\cdot\omega\quad\left(D<\left|\frac{\partial^{k^{(0)}}u^{(0)}}{\partial x_1^{k_1^{(0)}}\ldots\partial x_n^{k_n^{(0)}}}\right|\right). \tag{20}$$

§ 4. Доказательство единственности решений

Докажем единственность правильного решения интегро-дифференциальной системы (7).

Допустим, что наряду с правильным решением σ_i существует еще одно правильное решение Σ_i и рассмотрим разность

$$\delta_i=\Sigma_i-\sigma.$$

Покажем, что всюду в полосе (a) $\delta_i\equiv 0$. Функции δ_i можно получить, как предел разности

$$\delta_i=\lim_{m\to\infty}[\Sigma_i-\sigma_i^{(m)}].$$

Подставим в (7) вместо u_i Σ_i и вычтем почленно из (15), — получим

$$\Sigma_i-\sigma_i^{(m)}=\int_{t_0}^{t}d\tau\int\sum_s G_i^s(t,\tau,x,\xi)\,M_s\{\Sigma-\sigma^{m-1}\}\,d\xi_1\cdots d\xi_n,$$

т. е. $\Sigma_i-\sigma_i^{(m)}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (13), известному из предыдущего параграфа.

Вследствие этого разности $\Sigma-\sigma_i^{(m)}$, так же как все их производные по x_k до $M-1$-го порядка, можно оценить по формулам (19) всюду в полосе (a), и потому

$$\lim_{m\to\infty}(\Sigma_i-\sigma_i^{(m)})=0,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Равномерная непрерывность решений от начальных данных

Пусть функции $\bar{\varphi}_i$ и $\bar{\bar{\varphi}}_i$ находятся в условиях § 1 и пусть соответствующие этим функциям правильные решения системы (7) будут

$$\bar{u}_i(t, x_k) \text{ и } \bar{\bar{u}}_i(t, x_k).$$

Пусть известно, что для $\psi_i = \bar{\varphi}_i - \bar{\bar{\varphi}}_i$

$$\left| \frac{\partial^k \psi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < \varepsilon \quad (k \leqslant M-1). \tag{21}$$

Докажем, что в таком случае разность $w_i = \bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\partial^k w_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < \delta(\varepsilon) \quad (k \leqslant M-1), \tag{22}$$

где $\delta(\varepsilon)$ не зависит от t_0.

Система интегро-дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет w_i, имеет вид

$$w_i(t, x_k) = \int \sum G_i^s(t, \tau_0, x, \xi)\, \psi_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum G_i^s \cdot M_s\{w(\tau, \xi)\}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n. \tag{23}$$

По доказанному ранее система (23) имеет правильное решение w_i. Представим его в виде

$$w_i = \sum_{m=0}^{\infty} w_i^{(m)},$$

где

$$\left. \begin{aligned} w_i^{(0)} &= \int \sum G_i^s \cdot \psi_s(\xi)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n, \\ w_i^{(m)} &= \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, M_s\{w^{(m-1)}\}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n. \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Для того чтобы показать, что (22) выполнено, достаточно показать, что

$$\left| \frac{\partial^k w_i^{(0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < A \cdot \varepsilon \quad (k \leqslant M-1), \tag{25}$$

где A — некоторая константа. В самом деле, тогда, согласно (20),

$$\left| \frac{\partial^k w}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < A \cdot \varepsilon \cdot \omega$$

и соотношение (22) будет доказано.

Итак, остается доказать справедливость (25):

$$\frac{\partial^k w_i^{(0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \int \sum_s \frac{\partial^k G_i^s(t, t_0, x, \xi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\, \psi_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n =$$

$$= (-1)^n \int \sum_s \frac{\partial^k G_i^s(t, t_0, x, \xi)}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\, \psi_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^k w_i^{(0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = (-1)^{n+k} \int \sum_s G_i^s(t, t_0, x. \xi)\, \frac{\partial^k \psi_s}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\, d\xi_1 \cdots d\xi_k. \tag{26}$$

Последнее получено в результате интегрирования по частям, причем интегрированная часть обратилась в нуль, так как

$$\left| \frac{\partial^k G_i^s}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}} \right| \to 0, \text{ когда } \sqrt{\Sigma (x_k - \xi_k)^2} \to 0.$$

В силу (26),

$$\left| \frac{\partial^k w_i^{(0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < \max \left| \frac{\partial^k \psi_s}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}} \right| \cdot \int \sum_s |G_i^s (t, \tau, x, \xi)| \, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

В силу (10),

$$\int |G_i^s| \, d\xi_1 \ldots d\xi_n < C \cdot N.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\partial^k w^{(0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < C \cdot N \cdot \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

II. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Приведение к системе интегро-дифференциальных уравнений

Дана система квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum A_{ij}^{(m_1, \ldots, m_n)} (t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} +$$
$$+ F_i \left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_N, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^{M-1} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)$$
$$(i, j = 1, \ldots, N) \qquad (5)$$

— параболическая в интервале $(0, T)$, где:

1. Функции F и все их производные до $M+n$-го порядка по аргументам

$$x_1, \ldots, x_n, \quad u_1, \ldots, u_N, \quad \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \quad (k \leqslant M-1)$$

непрерывны и ограничены некоторой константой B всюду в полосе

$$\text{(a)} \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad -\infty < x_k < +\infty$$

при условии

$$\text{(b)} \quad \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < R \quad (k \leqslant M-1),$$

где R — некоторая константа.

2. Функции $A_{ij}^{(m_1, \ldots, m_n)}$ и F непрерывны по аргументу t для значений (a) и (b) своих аргументов.

Пусть даны начальные данные

$$u_i |_{t=t_0} = 0.* \qquad (5_1)$$

Рассуждая так же, как и в случае линейных систем, можно показать, что все правильные в полосе (a) решения системы (5), удовлетворяющие при $t = t_0$ начальным данным (5_1), одновременно будут правильными решениями системы интегро-дифференциальных уравнений

* К этому виду всегда можно привести начальные данные с функциями $u_i |_{t=t_0} = \varphi_i$, стоящими в условиях 1.

$$u_i(t, x_k) = u_i^{(0)}(t, x_k) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s\left(t, \tau, x, \xi) \Phi_s(\tau, \xi, u, \frac{\partial^k u}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right) d\xi, \tag{27}$$

где

$$u_i^{(0)} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, x, \tau, \xi) F_s(\tau, \xi, 0, 0)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

и

$$\Phi_i\left(\tau, \xi, u, \frac{\partial^k u}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right) =$$
$$= F_i\left(\tau, \xi, u, \frac{\partial^k u}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right) - F_i(\tau, \xi, 0, 0).$$

Обратно, все правильные решения системы (27) будут одновременно правильными в полосе (а) решениями системы (5), удовлетворяющими начальным данным (5_1).

Выражением «правильные решения» мы пользуемся здесь в том же смысле, как и в разобранном нами случае линейных систем.

Докажем корректность решений системы (27).

§ 2. Теорема существования

Будем искать решения системы (27) в виде рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_i^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{28}$$

где частичная сумма

$$\sigma_i^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_i^k(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (\sigma_i^{(0)} = u_i^{(0)})$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sigma_i^{(m)}(t, x_k) = \sigma_i^{(0)}(t, x_k) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi) \Phi_s\left(\tau; \xi; \sigma^{(m-1)}; \frac{\partial^k \sigma^{(m-1)}}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right) d\xi_1 \ldots \tag{29}$$

Если мы докажем равномерную сходимость рядов (28) и рядов, получаемых их почленным дифференцированием

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^k u_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \quad (k \leqslant M-1), \tag{28_1}$$

то этим самым будет доказано, что

$$\sigma_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \lim_{m \to \infty} \sigma_i^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_n$$

представляет истинное решение системы интегро-дифференциальных уравнений (27).

В самом деле, в таком случае формула (29) в пределе будет иметь вид

$$\sigma_i(t, x_k) = \sigma_i^{(0)}(t, x_k) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, \Phi_s\left(\tau; \xi; \sigma; \frac{\partial^k \sigma}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right) d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

Стало быть, σ — действительно решения системы (27).

Для доказательства сходимости рядов (28) и (28_1) нам нужно оценить функции

$$u_i^{(m)} \text{ и } \frac{\partial^k u_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}.$$

Легко видеть, что

$$u_i^{(m)}(t, x_k) = \sigma_i^{(m)}(t, x_k) - \sigma_i^{(m-1)}(t, x_k) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\left[\Phi_s\left(\tau; \xi; \sigma^{(m-1)}; \frac{\partial^k \sigma^{(m-1)}}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right) -\right.$$
$$\left. - \Phi_s\left(\tau; \xi; \sigma^{(m-2)}; \frac{\partial^k \sigma^{(m-2)}}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right)\right] d\xi_1 \cdots d\xi_n. \tag{30}$$

Если производные от функций F_i по аргументам $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$ ограничены, как это мы предположили, константой B, то справедливо следующее неравенство:

$$\Phi_i(\tau; \xi; \sigma^{(m-1)}; \ldots) - \Phi_i(\tau; \xi; \sigma^{(m-2)}, \ldots)| \leqslant B \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} \left| \frac{\partial_j^{k(m-1}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|. \tag{31}$$

Рассмотрим последовательность $\bar{u}_i^{(m)}$, где

$$\bar{u}_i^{(0)} = |u_i^{(0)}|,$$
$$\bar{u}_i^{(m)} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s |G_i^s(t, \tau, x, \xi)| \cdot \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} B \left| \frac{\partial^k \bar{u}_j^{(m-1)}}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}} \right| d\xi_1 \cdots d\xi_n. \tag{32}$$

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\left| \frac{\partial^k u_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant \left| \frac{\partial^k \bar{u}_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|. \tag{33}$$

Соотношения (32) аналогичны соотношениям (13), поэтому ясно, что для последовательности

$$\left| \frac{\partial^k \bar{u}_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \quad (k \leqslant M-1)$$

справедливы оценки (19). Вследствие же (33) то же самое имеет место и для последовательности

$$\left| \frac{\partial^k u_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \quad (k \leqslant M-1).$$

Обратим внимание на то, что функции $u_i^{(m)}$ и их производные будут находиться в условиях (b), если t выбрать из интервала $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T' < T$, так как тогда при достаточно малом T' $t - t_0$ будет достаточно малым ($(t - t_0)$ содержится в правых частях оценок (19) в качестве множителя).

После всего сказанного ясно, что ряды (28) и (28_1) сходятся равномерно в полосе

$$(\mathrm{a}_1) \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T'_1 < T, \quad -\infty < x_k < +\infty.$$

Заметим, что область (a_1), вообще говоря, содержится внутри (а). Однако в частных случаях эти области могут совпадать.

Во всяком случае, это будет тогда, когда функции F_s определены для всех действительных значений своих аргументов как непрерывные и ограниченные вместе со всеми своими производными до M — 1-го порядка по аргументам $x_1, \ldots, x_n, \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$.

§ 3. Доказательство единственности

Докажем теперь единственность правильного решения системы. Допустим, что наряду с решениями σ_i, найденными в предыдущем параграфе, имеется еще одно правильное решение Σ_i.

Рассмотрим разность

$$\Sigma_i - \sigma_i^{(m)}.$$

Легко проверить, что справедливо соотношение

$$\Sigma_i - \sigma_i^{(m)} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi) \left[\Phi_s\left(\tau; \xi; \Sigma; \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right) - \right.$$
$$\left. - \Phi_s\left(\tau; \xi; \sigma_i^{(m-1)}; \frac{\partial^k \sigma^{(m-1)}}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right)\right] d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{34}$$

Из сравнения (34) и (30) получаем в силу (19),

$$\lim_{m\to\infty} \left\{\Sigma_i - \sigma_i^{(m)}\right\} \equiv 0,$$

т. е.

$$\Sigma_i \equiv \sigma_i, \tag{35}$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Равномерная непрерывность от начальных данных

Пусть $\bar{u}_i$ и $\bar{\bar{u}}_i$ — правильные решения системы интегро дифференциальных уравнений (27), соответственно удовлетворяющие начальным данным $\bar{\varphi}_i$ и $\bar{\bar{\varphi}}_i$.

Введем обозначения

$$\varphi_i - \bar{\bar{\varphi}}_i = \psi_i, \quad \bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i = w_i$$

и докажем, что если

$$\left|\frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right| < \varepsilon \quad (k \leqslant M-1), \tag{36}$$

то

$$\left|\frac{\partial^k w}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right| < \delta(\varepsilon) \quad (k \leqslant M-1), \tag{37}$$

где $\delta(\varepsilon)$ не зависит от t.

По условию

$$w_i = w_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\,[\Phi_s(\tau; \xi; \overline{u}, \ldots) -$$
$$- \Phi_s(\tau; \xi; \overline{\overline{u}}, \ldots)]\, d\xi_1 \ldots d\xi_n, \qquad (38)$$

где

$$w_i^{(0)} = \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, \varphi_s\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Соотношение (38) мы можем переписать так:

$$w_i = w_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, M_s\{w\}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n, \qquad (39)$$

где

$$M_s(w) = \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} B_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)} \frac{\partial^k w}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

а B_{ij} — функции аргументов $t, \xi, w, \dfrac{\partial^k w}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$, причем

$$|B_{ij}| < B.$$

Будем решать систему (39) последовательными приближениями

$$w_i = \lim_{m \to \infty} w_i^{(m)},$$

где

$$w_i^{(m)} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)\, M_s(w^{(m-1)})\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \qquad (40)$$

Рассмотрим теперь последовательность $\overline{w}_i^{(m)}$, для которой

$$\overline{w}_i^{(0)} = |w_i^{(0)}|$$

и

$$\overline{w}_i^{(m)} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_s G_i^s(t, \tau, x, \xi)| \cdot B \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} \left| \frac{\partial^k w_j^{(m-1)}}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}} \right| d\xi_1 \ldots d\xi_n. \qquad (41)$$

Легко видеть, что последовательности $w^{(m)}$ и $\overline{w^{(m)}}$ связаны между собою следующими неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} &|w_i^{(m)}| \leqslant \overline{w}_i^{(m)}, \\ &\left| \frac{\partial^k w_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant \left| \frac{\partial^k \overline{w}_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|. \end{aligned} \right\} \qquad (42)$$

Далее, (подобно тому, как доказано (25)), можно показать, что

$$\left| \frac{\partial^k \overline{w}_i^{(0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < A\varepsilon \quad (k \leqslant M - 1). \qquad (43)$$

Отсюда, в силу (20), имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{\partial^k \overline{w}_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < A\varepsilon\omega \quad (k \leqslant M - 1).$$

Наконец, в силу (42),

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^k w_i^{(m)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^k w_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} < A\varepsilon\omega \quad (k \leqslant M-1),$$

что и требовалось доказать.

Поступило
12.V.1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровский И. Г., О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ, т. 1, вып. 7, 1938.
[2] Hadamard J., Le problème de Cauchy, Paris (1932), 238—241.
[3] Jervey M., Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Journ. de mathématiques pures et appliquées, 10 (1914), 105—149.

S. BROOK. ON CAUCHY'S PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

The paper extends a theorem due to I. Petrowsky on the correct statement of Cauchy's problem for parabolic system

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j(k_s)} A_{ij}^{(k_1,\ldots,k_n)}(t) \frac{\partial^{\sum k_s} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N; \quad \sum k_s \leqslant M),$$

to systems of the form

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j(k_s)} A_{ij}^{(m_1,\ldots,m_n)}(t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} +$$

$$+ \sum_{j(k_s)} B_{ij}(t, k_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{\sum k_s} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(i, j = 1,2, \ldots, N; \sum m_s = M; \quad \sum k_s < M)$$

and to quasi-linear systems of the

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum A_{ij}^{m_1,\ldots,m_n}(t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} + F_i\left(t, x, u \frac{\partial^{\sum k_s} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)$$

$$\left(\sum m_s = M, \quad \sum k_s < M\right),$$

where F_i depend on $t, x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_N$ and the derivatives of $u_1, \ldots, u_N$ with respect to $x_1, \ldots, x_n$ of order $< M$.

Our method consists in reducing the problem to a system of integro-differential equations which we solve by the method of successive approximations.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 121–134 Série mathématique

Д. И. ШЕРМАН

К ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье рассматривается задача об определении функции, гармонической в расположенной на плоскости конечной односвязной или многосвязной области, при условии, что на границе области задано линейное соотношение между функцией и ее производными до некоторого порядка.

§ 1. Предположим, что в плоскости $z=x+iy$ задана конечная односвязная область S, ограниченная кривой L, имеющей непрерывную кривизну. Обход L будем считать совершающимся против движения часовой стрелки и за положительное направление нормали n к ней примем направление изнутри S во вне. Начало координат условимся считать лежащим в области S.

Пусть требуется определить функцию $u(x, y)$, гармоническую в области S, непрерывную (в ней и на L) вместе со своими производными до некоторого порядка m, и удовлетворяющую следующему условию на границе*:

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\partial y^j}=f(s), \tag{1}$$

---

* Предлагаемый в настоящей статье метод непосредственно переносится также на случай, когда граничное условие имеет более общий вид и содержит в левой части дополнительную сумму

$$b_{00}(s)v+\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\int_L a_{kj}^{*}(s, s_1)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k-j}\partial x_1^j}ds_1+\int b_{00}^{*}(s, s_1)v\,ds_1,$$

где $v(x, y)$ — функция сопряженная с $u(x, y)$.

Ф. Д. Гахов [1], рассматривая аналогичную задачу для односвязной области (при условии, отличающемся от (1) наличием дополнительного слагаемого $b_{00}v$), свел ее сначала, используя функцию Грина, к сингулярному интегральному уравнению, и, затем, регуляризуя последнее по способу Noether'a [2], — к уравнению Фредгольма.

Далее, используя результаты Noether'a, автор получил ряд выводов, относящихся к свойствам рассматриваемой задачи, совпадающих с некоторыми из результатов, приведенных ниже нами.

И. Н. Векуа [3] на основании предложенной им новой формы представления гармонической функции (при указанном более общем, нежели (1), граничном условии) свел задачу (для односвязной же области), не вводя функции Грина, к более простому по сравнению с полученным предыдущим автором сингулярному уравне-

где $a_{kj}(s)$ и $f(s)$ — известные функции дуги s, отсчитываемой от некоторого фиксированного на L начала.

Будем считать, что коэффициенты a_{kj} удовлетворяют условию Липшица и, кроме того,

$$\left|\sum_{j=1}^{m}(i)^j a_{mj}\right| > 0. \tag{2}$$

Относительно же функции $f(s)$ допустим, что она непрерывна на L.

Положим

$$a+ib=\sum_{j=0}^{m}(i)^j a_{mj}, \quad a=\cos\omega(s), \quad b=\sin\omega(s), \tag{3}$$

где a, b и ω имеют вещественные значения, причем принимается (этого всегда можно добиться), что $a^2+b^2=1$.

Предположим сначала, что при обходе L функция $\omega(s)$ получает приращение $-2n\pi$, где n — некоторое целое положительное число или нуль. В этом случае функцию $u(x, y)$ будем искать в виде

$$u(x, y)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{\pi}\int_L \nu(s)\,\mathrm{Re}\left\{i\frac{(t-z)^{m-1}}{a+ib}\ln\frac{t-z}{t}\,dt\right\}+\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m+n} b_k z^k, \tag{4}$$

где t — аффикс точки L, а функция $\nu(s)$ и постоянные b_k (из которых b_0 вещественная) — новые неизвестные, подлежащие определению.

При этом под $\ln\frac{t-z}{t}$ условимся понимать ветвь, обращающуюся в нуль при $z=0$.

Нетрудно показать, что искомая функция представима в форме (4). Действительно, обозначая через $v(x, y)$ гармоническую функцию, с ней сопряженную, и введя $\varphi(z)=u+iv$, будем иметь

$$\varphi(z)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{i}{\pi}\int_L \nu(s)\frac{(t-z)^{m-1}}{a+ib}\ln\frac{t-z}{t}\,dt+\sum_{k=0}^{m+n} b_k z^k+iC, \tag{5}$$

где C — произвольная вещественная постоянная. Из последнего равенства легко найдем

$$\nu(s)=(a+ib)\left\{\psi(t)+\frac{\varphi^{(m)}(t)}{2}-\sum_{k=m}^{m+n} b_k' t^{k-m}\right\}, \tag{6}$$

где $\psi(z)$ — некоторая функция, регулярная вне L и равная нулю на бесконечности, причем, для краткости, положено

$$b_k'=\frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{2}b_k.$$

Отсюда, обозначая через $\chi(z)=\chi_1+i\chi_2$ функцию, регулярную вне S (и обращающуюся в постоянную на бесконечности), вещественная часть которой непрерывна на L и равна $\omega(s)+n\theta$ (θ — полярный угол), будем иметь для определения $\psi(z)$ следующее условие:

нию, и, затем, исследовал его и привел к уравнению Фредгольма, также опираясь на результаты Noether'а.

Отметим, что прием, развиваемый здесь нами, позволяет непосредственно свести задачу к уравнению Фредгольма и установить ряд важных свойств, которыми она обладает.

$$\operatorname{Im}\left[e^{i\chi(t)}\left\{\frac{\psi(t)}{t^n}-\sum_{k=m}^{m+n} b'_k t^{k-m-n}\right\}\right]+\operatorname{Im}\frac{e^{i\chi(t)}\varphi^{(m)}(t)}{2t^n}=0. \qquad (7)$$

Пусть, далее, $\delta(z)$ — регулярная вне S функция (также обращающаяся в постоянную на бесконечности), мнимая часть которой равна второму слагаемому в последнем равенстве, и $\operatorname{Re}\delta(\infty)=0$. Тогда

$$\psi(z)=\sum_{k=m}^{m+n} b'_k z^{k-m}-e^{-i\chi(z)}z^n\{\delta(z)+C_1\}, \qquad (8)$$

где C_1 — некоторая вещественная постоянная.

Взяв коэффициент b_{m+n} вещественным или чисто мнимым в зависимости от того, будет ли $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличен от нуля, или равен ему*, определим затем b_k $(k=m, \ldots, m+n)$ и C_1 таким образом, чтобы правая часть (8) обращалась в нуль на бесконечности. После этого, зная $\psi(z)$ и подставив значение $\nu(s)$ из равенства (6) в (5), найдем

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)z^k}{k!}=2\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k c_{m-k}}{k!}\left\{\sum_{j=1}^{k}\prod_{\lambda_j=1}^{k}{}'(m-\lambda_j)\right\}z^k+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1} b_k z^k+iC, \qquad (9)$$

где c_k — коэффициенты разложения $\psi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки; штрих над символом произведения указывает на пропуск множителя, соответствующего $\lambda_j=j$. Из последнего уравнения, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем все остальные постоянные b_k и C.

Итак, плотность $\nu(s)$ и постоянные b_k $(k=0, 1, \ldots, m+n)$ могут быть определены из равенства (4) через искомую функцию $u(x, y)$. Отсюда следует, что последняя действительно представима в виде (4).

Подставив теперь выражение $u(x, y)$ из формулы (4) в (1), получим для определения $\nu(s)$ уравнение Фредгольма (s и s_0 — дуги точек $M(\xi, \eta)$ и $M(\xi_0, \eta_0)$, лежащих на L):

$$\nu(s_0)+\int_L \nu(s)K(s, s_0)\,ds=f(s_0)+\Omega(s_0), \qquad (10)$$

где**

$$K=\frac{1}{\pi}\frac{\partial\ln r}{\partial n}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{a+ib}\left\{\sum_{j=0}^{m}(i)^{j+1}\frac{a_{mj}(s)-a_{mj}(s_0)}{t-t_0}\right\}\frac{dt}{ds}\right]+\ldots,$$

$$\Omega=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}a_{kj}(s)\frac{\partial^k g}{\partial\xi_0^{k-j}\partial\eta_0^j},$$

$$g=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m+n}b_k t_0^k, \qquad r=\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}.$$

---

* Он может быть взят любым из них, если одновременно $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ и $\cos\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличны от нуля.

** Многоточие обозначает слагаемые, абсолютно интегрируемые на L (их мы не выписываем).

Примечание 1. Пусть заданы две гармонические в S функции $u_j(x, y)$ $(j=1, 2)$ и соответствующие им по формуле (4) значения плотностей $\nu_j(s)$ и постоянных b_{kj} $(k=0, 1, \ldots, m+n;\ j=1, 2)$. Предположим, что $u_j(x, y)$ линейно зависимы между собою. Тогда, полагая

$$\nu = C_1\nu_1 + C_2\nu_2, \quad b_k = C_1 b_{k1} + C_2 b_{k2} \quad (k=0, 1, \ldots, m+n),$$

где C_1 и C_2 — отличные от нуля вещественные постоянные, для которых

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) = 0,$$

получим

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\,\mathrm{Re}\left\{i\,\frac{(t-z)^{m-1}}{a+ib}\ln\frac{t-z}{t}\,dt\right\} + \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m+n} b_k z^k = 0.$$

Из последнего равенства, поступая, как выше, найдем

$$\nu = 0, \quad b_k = 0 \quad (k=0, 1, \ldots, m+n).$$

Очевидно, если не существуют отличные от нуля и не зависящие от k вещественные постоянные C_1 и C_2, удовлетворяющие равенствам

$$C_1 b_{k1} + C_2 b_{k2} = 0 \quad (k=0, 1, \ldots, m+n),$$

то функции $u_j(x, y)$ $(j=1, 2)$ линейно независимы между собою.

Отсюда следует, что $u_j(x, y)$ $(j=1, 2)$ будут линейно независимы, если все *

$$b_{0j},\ \mathrm{Re}\, b_{kj} \text{ и } \mathrm{Im}\, b_{kj} \quad (k=1, \ldots, m+n;\ j=1, 2)$$

за исключением двух из них, равны нулю, причем постоянные, отличные от нуля (их можно считать равными единице), имеют различные индексы j; значения же индекса k у них одновременно не равны нулю или $m+n$, и в том случае, когда они одинаковы, эти постоянные не выражают одну и ту же (вещественную или мнимую) часть соответствующего (значению k) комплексного числа.

Примечание 2. Нетрудно показать, что соответствующая рассматриваемой однородная задача (при $f(s)=0$) имеет нетривиальные решения. В самом деле, допустим противное; предположим, что она имеет лишь тривиальное решение. Тогда, взяв последнее в виде первого слагаемого, содержащегося в правой части формулы (4), найдем, что $\nu(s)=0$.

С другой стороны, представив то же тривиальное решение в форме (4) при некоторых фиксированных значениях b_k, получим для $\nu(s)$ уравнение вида (10) (при $f(s)=0$), которое, в силу только что сказанного, должно иметь единственное решение, отличное от нуля. Межу тем и в этом случае на основании примечания 1 плотность $\nu(s)$ и постоянные b_k должны быть тождественно равны нулю. Противоречие, к которому мы пришли, убеждает нас в справедливости высказанного утверждения.

Все линейно независимые решения однородной задачи обозначим через u_{0j} $(j=1, \ldots, p)$.

---

* При этом $\mathrm{Re}\, b_{m+n,\, j}$ или $\mathrm{Im}\, b_{m+n,\, j}$ равно нулю.

Примечание 3. Пусть $\nu_0(s)$ — некоторое нетривиальное решение однородного интегрального уравнения, соответствующего (10). Положим

$$u_0(x, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\,\pi} \int\limits_L \nu_0(s) \operatorname{Re}\left\{i \frac{(t-z)^{m-1}}{a+ib} \ln \frac{t-z}{t}\, dt\right\},$$

где $u_0(x, y)$ — некоторая линейная комбинация $u_{0j}(x, y)$. Считая в этом равенстве функцию $u_0(x, y)$ известной, и рассуждая, как выше, заключаем, что плотность $\nu_0(s)$ может быть определена из него лишь в том случае, если (регулярная вне S) функция $\delta_0(z)$, мнимая часть которой на L равна $(\varphi_0(z) = u_0 + iv_0)$

$$\operatorname{Im} \frac{e^{i\chi(t)}\, \varphi_0^{(m)}(t)}{2t^n},$$

такова, что

$$\psi_0(z) = e^{-i\chi(z)} z^n \delta_0(z)$$

обращается на бесконечности в нуль, и кроме того, выполняются соотношения

$$\varphi_0^{(k)}(0) = 2\, \frac{(-1)^{m+k}}{(m-1)!}\, c_{m-k}^{(0)} \sum_{j=1}^{k} \prod_{\lambda_j=1}^{k}{}' (m-\lambda_j); \quad u_0(0, 0) = 0,$$

$$(k = 1, \ldots, m-1),$$

где $c_k^{(0)}$ — коэффициенты разложения $\psi_0(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Пусть ν_{0j} $(j = 1, \ldots, q)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (10). При этом, очевидно, $p \geqslant q$.

Примечание 4. Положим в уравнении (10) $f(s) = 0$. Тогда, разрешив его, получим все нетривиальные решения однородной задачи.

Обозначим через μ_{0j} $(j = 1, \ldots, q)$ фундаментальные функции уравнения, союзного с (10), и допустим сначала, что $q > 2(m+n)$. Выписав условия ортогональности μ_{0j} к правой части (10) при $f(s) = 0$ (которые должны выполняться, так как по доказанному однородная задача имеет нетривиальные решения), будем иметь для определения $2(m+n)$ вещественных постоянных $b_0, \operatorname{Re} b_k, \operatorname{Im} b_k$ и b_{m+n} (или ib_{m+n}) $(k = 1, \ldots, m+n-1)$ систему q линейных алгебраических уравнений. Ранг ее матрицы $q^* \leqslant 2(m+n)$. В этом случае неоднородная задача $(f(s) \neq 0)$, вообще говоря, решения не имеет; число же нетривиальных решений однородной задачи равно $2(m+n) + q - q^*$ и, таким образом, превосходит $2(m+n)$.

Предположим теперь, что $q \leqslant 2(m+n)$ и $q^* < q$. Число нетривиальных решений однородной задачи при этом также равно только что указанному выражению, и неоднородная задача не будет разрешима. Наконец, если при $q \leqslant 2(m+n)$ ранг матрицы $q^* = q$, то, как легко видеть, однородная задача будет иметь $2(m+n)$ нетривиальных решений и неоднородная задача будет всегда разрешима.

Наоборот, если число нетривиальных решений однородной задачи равно $2(m+n)$, то, очевидно, необходимо $q^* = q$, и отсюда снова приходим к заключению, что неоднородная задача разрешима.

§ 2. Предположим теперь, что при обходе L функция $\omega(s)$ получает приращение $2n\pi$ $(n > 0)$, причем $m > n$. В этом случае решение будем искать в виде

$$u(x, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\,\pi} \int\limits_L \nu(s) \operatorname{Re} \left\{ i \frac{(t-z)^{m-1}}{a+ib} \ln \frac{t-z}{t}\, dt \right\} + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{m-n} b_k z^k. \quad (11)$$

Рассуждая, как выше, докажем, что оно может быть таким образом представлено. Действительно, из (11) получим

$$\nu(s) = (a+ib)\{\psi(t) + \frac{\varphi^{(m)}(t)}{2}\}, \quad (12)$$

где аналогично предыдущему, $\varphi(z) = u + iv$ и $\psi(z)$ — некоторая функция, регулярная вне S и равная нулю на бесконечности; ее следует определить из условия

$$\operatorname{Im} e^{i\chi(t)} t^n \left\{ \psi(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{t^k} \right\} + \operatorname{Im} e^{i\chi(t)} t^n \left\{ \frac{\varphi^{(m)}(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{t^k} \right\} = 0, \quad (13)$$

в котором $\chi(z) = \chi_1 + i\chi_2$ — также регулярная вне S функция с равной $\omega(s) - n\theta$ на L вещественной частью. Отсюда

$$\psi(z) = e^{-i\chi(z)} \frac{C_1 - \delta(z)}{z^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{z^k}, \quad (14)$$

где C_1 — некоторая вещественная постоянная, а $\delta(z)$ — функция, регулярная вне S (и обращающаяся в постоянную на бесконечности), мнимая часть которой равна на L второму слагаемому в равенстве (13) и $\operatorname{Re}\delta(\infty) = 0$.

Далее, подставив $\nu(s)$ из (12) в равенство (11), записанное в эквивалентной ему (подобной (15)) комплексной форме, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0) z^k}{k!} = 2 \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{c_{m-k}}{k!} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \prod_{\lambda_j=1}^{k}{}' (m - \lambda_j) \right\} z^k + \\ + \sum_{k=0}^{m-n} b_k z^k + iC. \quad (15)$$

Из этого уравнения, считая b_0 вещественным, а b_{m-n} вещественным или чисто мнимым (смотря по тому, будет ли $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличен или равен нулю), найдем сначала c_k $(k = 1, \ldots, n-1)$, а затем и остальные постоянные b_k, C и C_1. Тем самым представимость функции $u(x, y)$ в виде (11) установлена.

Наконец, подставив выражение $u(x, y)$ из (11) в (1), получим для $\nu(s)$ уравнение Фредгольма* и придем к выводам, аналогичным высказанным в конце предыдущего параграфа.

§ 3. Допустим, что при обходе L приращение $\omega(s)$, так же, как и в § 2, равно $2n\pi$, но $m \leqslant n$.

Будем искать решение в виде

$$u(x, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{1}{\pi} \int\limits_L \nu(s) \operatorname{Re} \left\{ i \frac{(t-z)^{m-1}}{a+ib} \ln \frac{(t-z)}{t}\, dt \right\} + A; \quad (16)$$

при этом A равно $\operatorname{Re} iB$ или $\operatorname{Re} B$, где

$$B = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \nu(s) \frac{t^{n-1}}{a+ib}\, dt, \quad (17)$$

в зависимости от того, будет ли $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличен или равен нулю.

* Оно может быть выписано по аналогии с (10).

Поступая, как выше, придем к равенству (14), и вместо соотношения (15) получим следующее:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)\, z^k}{k!} = 2\, \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{c_{m-k}}{k!} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \prod_{\lambda_j=1}^{k}{}' (m-\lambda_j) \right\} z^k + A + iC. \quad (18)$$

Отсюда найдем постоянные $c_k (k=1, \ldots, m-1)$, C и C_1.

Отметим, что при $n > m$ постоянные c_k $(k=m, \ldots, n-1)$ остаются произвольными и, следовательно, в этом случае при заданной функции $u(x, y)$ плотность $\nu(s)$ может принимать бесчисленное множество значений.

Далее, из равенств (1) и (16) получим для $\nu(s)$ уравнение Фредгольма. Так же, как и в двух предшествующих случаях, оно будет эквивалентно нашей задаче.

Примечание 1. Нетрудно убедиться, что при $n > m$ (и при любом значении $f(s)$) задача, вообще говоря, не имеет решения.

В самом деле, предположим, например, что однородная задача (при $f(s)=0$) имеет только тривиальное решение $u_0(x, y)=0$. Тогда соответствующее ей однородное уравнение Фредгольма будет иметь $2(n-m)$ линейно независимых решений:

$$\nu_{kj}(s) = (a+ib) \left\{ \frac{\varepsilon_j}{t^k} - e^{-i\chi(t)} \frac{\delta_{kj}(t)}{t^n} \right\} \quad (k=m, \ldots, n-1;\ j=1,2), \quad (19)$$

где $\delta_{kj}(z)$ — регулярная вне S функция, мнимая часть которой на L равна $\operatorname{Im} \varepsilon_j e^{i\chi(t)} t^{n-k}$, причем $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = i$. Отсюда вытекает наше утверждение.

Если же $u_0(x, y) \neq 0$, то задача будет неразрешима при $n \geqslant m$.

Примечание 2. Если коэффициент $a_{00}=0$, то можно считать $u(0, 0)=0$ и, в связи с этим, в формуле (16) положить $A=0$. В этом случае неоднородная задача неразрешима при $n > m$, если однородная задача имеет лишь решение $u_0(x, y) = \text{const}$, и неразрешима при $n \geqslant m$, если $u_0(x, y)$ может принимать также значения, тождественно не равные постоянной.

§ 4. Рассмотрим теперь случай, когда область S многосвязная. Предположим, что она ограничена $p+1$ простыми замкнутыми кривыми L_q $(q=0, 1, \ldots, p)$; из них через L_0 обозначим внешнюю границу области, содержащую внутри себя остальные внутренние границы L_q $(q=1, \ldots, p)$. Обход $L = \sum\limits_{q=0}^{n} L_q$ будем считать происходящим в положительном направлении относительно области S, нормаль n к L — направленной изнутри вовне, и начало координат, попрежнему, лежащим в этой же области.

Обозначим, далее, через S_q односвязные области, ограниченные соответственными кривыми L_q. Область S_0 будет, очевидно, бесконечной. Наконец, пусть z_q — некоторые произвольно фиксированные точки, лежащие в S_q $(q=1, \ldots, p)$.

Вместо соотношения (1) теперь имеем

$$\sum_{k=0}^{m_q}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}^{(q)} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j} = f_q(s) \quad \text{на} \quad L_q \ (q=0, 1, \ldots, p), \tag{20}$$

где $a_{kj}^{(q)}(s)$ и $f_q(s)$ известны. Как и выше, $a_{kj}^{(q)}(s)$ будем считать удовлетворяющими условию Липшица, а $f_q(s)$ — непрерывными на L_q. Кроме того,

$$|a+ib| = |a_q+ib_q| = \left|\sum_{j=0}^{m_q}(i)^j a_{m_q j}^{(q)}\right| > 0, \qquad a_q+ib_q = e^{i\omega_q(s)} \tag{21}$$

$$\text{на } L_q\ (q=0, 1, \ldots, p).$$

Предположим, что функция $\omega_q(s)$ получает приращение, равное $-2\pi n_q$ при (указанном) обходе кривых L_q $(q=0, 1, \ldots, p^*;\ p^* \leqslant p)$, и равное $2\pi n_q$ при обходе остальных кривых L_q $(q=p^*+1, \ldots, p)$, где n_q — целое положительное число или нуль.

Обозначим через λ наибольшее из чисел m_q $(q=p^*+1, \ldots, p)$ и будем считать* $m_0 > m_\lambda - 2$.

Искомую гармоническую (и однозначную) в S функцию будем искать в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s)\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\operatorname{Re}\frac{i}{a+ib}(t-z)^{m-1}\ln\varepsilon(t-z)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{q=1}^{p}\frac{(-1)^{m_q-1}}{(m_q-1)!}\sum_{j=0}^{m_q-1}c_{qj}(z-z_q)^j\ln(z-z_q)+$$

$$+\operatorname{Re}\left[\sum_{q=1}^{p^*}\left\{\sum_{j=1}^{n_q-m_q} b_{qj}\frac{1}{(z-z_q)^j}+b_{q0}\ln(z-z_q)\right\}+\sum_{j=0}^{m_0+n_0} b_{0j}z^j\right], \tag{22}$$

где $m=m_q$ на $L_q\,(q=0, 1, \ldots, p)$; $\varepsilon=\frac{1}{t}$ на L_0 и $=-1$ на L_q $(q=1, \ldots, p)$. Далее,

$$c_{qj} = (-1)^j C_{m_q-1}^{j}\int_{L_q}\nu(s)\frac{i}{a_q+ib_q}(t-z_q)^{m_q-j-1}\,dt \quad (j=1, \ldots, m_q-1), \tag{23}$$

$$c_{q0} = i\int_{L_q}\nu(s)\operatorname{Re}\left\{\frac{(t-z_q)^{m_q-1}}{a_q+ib_q}\,dt\right\}$$

и, наконец, $b_{qj}\,(q=0, 1, \ldots, p^*)$ — некоторые постоянные; из них $b_{0j}=0\ (j=1, \ldots, m_\lambda-2)$. При этом $b_{q,\,n_q-m_q}$, b_{q0} и b_{00} будем считать вещественными, а $b_{m_0+n_0}$ — вещественной или чисто мнимой.

Отметим, что выражение, содержащееся в фигурных скобках в третьем слагаемом правой части равенства (22), должно быть отброшено, если $n_q \leqslant m_q$.

Построив функцию $v(x, y)$, сопряженную с $u(x, y)$, и положив $\varphi(z) = u + iv$, будем иметь

---

* Это предположение, как будет ясно из дальнейшего, несущественно и введено лишь для определенности.

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\,\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\,\frac{i}{a+ib}\,(t-z)^{m-1}\ln\varepsilon(t-z)\,dt -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{q=1}^{p}\frac{(-1)^{m_q-1}}{(m_q-1)!}\sum_{j=0}^{m_q-1} c_{qj}(z-z_q)^j\ln(z-z_q) +$$
$$+\left[\sum_{q=1}^{p^*}\left\{\sum_{j=1}^{n_q-m_q} b_{qj}\frac{1}{(z-z_q)^j} + b_{q0}\ln(z-z_q)\right\} + \sum_{j=0}^{m_0+n_0} b_{0j}z^j\right] + iC, \tag{24}$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

Очевидно,

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \sum_{q-1}^{p}\frac{(-1)^{m_q-1}}{(m_q-1)!\,\pi}\alpha_q\ln(z-z_q); \tag{25}$$

при этом функция $\varphi^*(z)$ однозначна в S и α_q — известные вещественные постоянные.

Положим

$$\varphi_q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_q}\frac{\varphi^*(t)}{t-z}\,dt \qquad (q=0,\,1,\,\ldots,\,p), \tag{26}$$

считая точку z, принадлежащей S. Тогда, как нетрудно видеть *,

$$\varphi_q(z) - \frac{(-1)^{m_q-1}}{(m_q-1)!\,\pi}\left[\int\limits_{L_q}\nu(s)\,\frac{i}{a_q+ib_q}\,(t-z)^{m_q-1}\ln(z-t)\,dt -\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{m_q-1}\{c_{qj}^{(1)}\ln(z-z_q) + a_{qj}c_{qj}^{(2)}\}(z-z_q)^j\right] -$$
$$-\left\{\sum_{j=1}^{n_q-m_q} b_{qj}\frac{1}{(z-z_q)^j} + b_{q0}\ln(z-z_q)\right\} = 0 \tag{27}$$

вне L_q $(q=1,\,\ldots,\,p^*)$, где введены обозначения **

$$\left.\begin{aligned}
&c_{qj}^{(1)} = c_{qj},\quad c_{q0}^{(1)} = c_{q0}+\alpha_q\ \ (j=1,\ldots,m_q-1),\quad c_{qj}^{(2)} = c_{qj}\ \ (j=1,\ldots,m_q-2),\\
&a_{qj} = \frac{1}{C_j^{m_q-1}}\sum_{k=1}^{m_q-j-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}C_{k+j}^{m_q-1}\quad (j=0,\,\ldots,\,m_q-2),\\
&c_{q0}^{(2)} = \int\limits_{L_q}\nu(s)\,\frac{i}{a_q+ib_q}(t-z_q)^{m_q-1}\,dt,\qquad c_{q,m_q-1}^{(2)} = a_{q,m_q-1} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Дифференцируя предыдущее равенство m_q раз, получим

$$\varphi_q^{(m_q)}(z) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_q}\nu(s)\,\frac{1}{a_q+ib_q}\,\frac{dt}{t-z} + \sum_{j-1}^{n_q} d_{qj}\frac{1}{(z-z_q)^j} = 0, \tag{29}$$

* Действительно, функция, содержащаяся в левой части (27), регулярна вне L_q и обращается в нуль на бесконечности. С помощью же формулы (24) она может быть также аналитически продолжена в область S_q. Отсюда вытекает справедливость равенства (27).

** Отметим при этом равенство

$$\sum_{k=1}^{m_q-j-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\,C_{k+j}^{m_q-1} = \frac{1}{(m_q-j-1)!}\sum_{k=1}^{m_q-j-1}\ \prod_{\lambda_k=1}^{m_q-j-1}{}'\,(m_q-\lambda_k).$$

положив для краткости

$$\left.\begin{aligned} d_{qj} &= \frac{1}{\pi}\, \frac{(-1)^{m_q-j}}{C_{m_q-j}^{m_q-1}}\, c_{q,m_q-j}^{(1)} \quad (j=1,\,\ldots,\,m_q-1),\\ d_{q,m_q} &= \frac{1}{\pi}\, c_{q,0}^{(1)} + (-1)^{m_q}(m_q-1)!\; b_{q0},\\ d_{q,j} &= (-1)^{m_q-1}(j-1)\,\cdots\,(j-m_q)\, b_{j-m_q} \quad (j=m_q+1,\,\ldots,\,n_q). \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Из равенства (29) найдем

$$\nu(s) = (a_q + ib_q)\left\{\psi_q(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_q} d_{qj}\frac{1}{(t-z_q)^j} + \frac{\varphi_q^{(m_q)}(t)}{2}\right\}$$

$$\text{на } L_q \quad (q=1,\,\ldots,\,p^*), \quad (31)$$

где функция $\psi_q(z)$, регулярная внутри S_q, должна быть определена из условия

$$\operatorname{Im} e^{i\chi_q(t)}(t-z_q)^{n_q}\left\{\psi_q(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_q} d_{qj}\frac{1}{(t-z_q)^j}\right\} +$$

$$+ \operatorname{Im}\frac{1}{2}e^{i\chi_q(t)}(t-z_q)^{n_q}\varphi_q^{(m_q)}(t) = 0 \quad \text{на } L_q \quad (q=1,\,\ldots,\,p^*),$$

в котором $\chi_q(z)$ регулярна в S_q и ее вещественная часть равна $\omega_q(s) - n_q\theta$ на L_q. Отсюда

$$\psi_q(z) = \frac{\{C_q - \delta_q(z)\}\, e^{-i\chi_q(z)}}{(z-z_q)^{n_q}} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_q} d_{qj}\frac{1}{(z-z_q)^j} \quad (q=1,\,\ldots,\,p^*); \quad (32)$$

при этом мнимая часть функции $\delta_q(z)$ (регулярной в S_q) равна второму слагаемому в предшествующем равенстве, и $\operatorname{Re}\delta_q(z_j) = 0$; C_q — вещественная постоянная.

Предполагая, что $\sin\operatorname{Re}\chi_q(z_q) \neq 0$ (этого всегда можно добиться выбором z_q), определим постоянные c_{qj} $(j=0,\,1,\,\ldots,\,m_q-1)$, b_{qj} $(j=0,\,1,\,\ldots$ $\ldots,\,n_q-m_q)$ и C_q так, чтобы правая часть равенства (32) была регулярной в S_q. После этого, возвращаясь к формуле (31), найдем значение $\nu(s)$ на L_q * $(q=1,\,\ldots,\,p^*)$.

---

* Допустим, что на L_{q_1}, где q_1 — какое-либо из значений $q=1,\,\ldots,\,p^*$, имеем $m_{q_1} \geqslant n_{q_1}$. В этом случае в третьем слагаемом правой части (24) следует при суммировании по индексу q опустить значение $q=q_1$. В равенстве (32) мнимая часть $\delta_{q_1}(z)$ на L_{q_1} будет равна

$$\operatorname{Im}\frac{1}{2}e^{i\chi_{q_1}(t)}(t-z_{q_1})^{n_{q_1}}\left\{\varphi_{q_1}^{(m_{q_1})}(t) + \sum_{n_{q_1}+1}^{m_{q_1}} d_{q_1 j}\frac{1}{(t-z_{q_1})^j}\right\}$$

и из условия регулярности $\psi_{q_1}(z)$ выразим $2n_{q_1}$ вещественных величин $(c_{q_1,m_{q_1}-j}^{(1)}$ $(j=1,\,\ldots,\,n_{q_1}))$, через $2(m_{q_1}-n_{q_1})$ остальных произвольных

$$(c_{q_1,m_{q_1}-j} \quad (j=n_{q_1}+1,\,\ldots,\,m_{q_1}-1),\; c_{q_1} \text{ и } C_{q_1}).$$

Далее, рассуждая, как выше, будем иметь:

$$\varphi_q(z) - \frac{(-1)^{m_q-1}}{(m_q-1)!\,\pi}\left[\int\limits_{L_q} \nu(s)\,\frac{i}{a_q+ib_q}(t-z)^{m_q-1}\ln(z-t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{m_q-1}\left\{c_{qj}^{(1)}\ln(z-z_q)+a_{qj}\,c_{qj}^{(2)}\right\}(z-z_q)^j\right] = 0 \text{ вне } L_q \ (q=p^*+1, \ldots, p), \tag{33}$$

и отсюда

$$\nu(s) = (a_q+ib_q)\left\{\psi_q(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_q} d_{qj}\frac{1}{(t-z_q)^j}+\frac{1}{2}\varphi_q^{(m_q)}(t)\right\} \tag{34}$$
$$\text{на } L_q \ (q=p^*+1, \ldots, p),$$

где

$$d_{qj} = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^{m_q-j}}{C\frac{m_q-1}{m_q-j}}\,c_{q,\,m_q-j}^{(1)} \quad (j=1, \ldots, m_q) \tag{35}$$

и функция $\psi_q(z)$ (регулярная в S_q) определяется из равенства

$$\psi_q(z) = \sum_{j=0}^{n_q-1} c_{qj}^{*}(z-z_q)^j + (z-z_q)^{n_q}e^{-i\chi_q(z)}\{C_q-\delta_q(z)\} \tag{36}$$
$$(q=p^*+1, \ldots, p),$$

в котором c_{qj}^{*} — новые произвольные комплексные и C_q — вещественная постоянная; при этом вещественная часть функции $\chi_q(z)$ равна $\omega_q(s)+n_q\theta$ на L_q, а мнимая часть $\delta_q(z)$ (на той же кривой) равна

$$\operatorname{Im}\frac{1}{2}e^{i\chi_q(t)}\frac{1}{(t-z_q)^{n_q}}\left\{\varphi_q^{(m_q)}(t)+\sum_{j=1}^{m_q} d_{qj}\frac{1}{(t-z_q)^j}\right\}.$$

Постоянные $c_{q,\,m_q-j}^{(1)}$, заключающиеся в формуле (34), пока все также остаются произвольными *.

Далее, принимая во внимание равенства (27) и (33), будем иметь внутри L_0

$$\varphi_0(z)+\sum_{q=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_q-1} a_{qj}c_{qj}^{(2)}(z-z_q)^j =$$

$$= \frac{(-1)^{m_0-1}}{(m_0-1)!\,\pi}\int\limits_{L_0}\nu(s)\,\frac{i}{a_0+ib_0}(t-z)^{m_0-1}\ln\frac{t-z}{t}\,dt + \sum_{j=0}^{m_0+n_0} b_{0j}z^j + iC. \tag{37}$$

Отсюда, имея в виду, что по условию $m_0 > m_\lambda - 2$, получим на L_0

$$\nu(s) = (a_0+ib_0)\left\{\psi_0(t)+\frac{\varphi_0^{(m_0)}(t)}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{j=m_0}^{m_0+n_0} j(j-1)\cdots(j-m_0+1)\,b_{0j}\,t^{j-m_0}\right\}. \tag{38}$$

---

* Между прочим, подставляя в соответствующую из формул (28) для $c_{q0}^{(2)}$ вместо плотности $\nu(s)$ ее выражения из (31) и (34), найдем

$$c_{q0}^{(2)} = c_{q0}^{(1)} + (-1)^{m_q}\pi(m_q-1)!\,b_{q0} \quad (q=1, \ldots, p^*),$$
$$c_{q0}^{(2)} = c_{q0}^{(1)} \quad (q=p^*+1, \ldots, p).$$

Функция $\psi_0(z)$, регулярная вне L_0 и обращающаяся в нуль на бесконечности, определяется из равенства

$$\psi_0(z) = e^{-i\chi_0(z)} z^{n_0} \{C_0 - \delta_0(z)\} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=m_0}^{m_0+n_0} j(j-1)\cdots(j-m_0+1)\, b_{0j} z^{j-m_0}. \tag{39}$$

Из условия обращения правой части последнего равенства в нуль на бесконечности найдем сначала постоянные b_{0j} $(j = m_0, \ldots, m_0+n_0)$ и C_0. Затем, подставив значение $\nu(s)$ из (38) в уравнение (37), определим остальные постоянные * b_{0j} $(j = 0, m_\lambda - 1, \ldots, m_0 - 1)$ и, наконец, выразим $c_{\lambda j}^{(2)}$ $(j = 1, \ldots, m_\lambda - 2)$ и C через $c_{qj}^{(2)}$ $(j = 0, 1, \ldots, m_q - 2; q \neq \lambda)$ и $c_{\lambda_0}^{(2)}$.

Таким образом, любая гармоническая в многосвязной области S функция $u(x, y)$ действительно представима в форме (22). Определяемое же из последней выражение для плотности $\nu(s)$, как ясно из изложенного, содержит $2\sum_{q=p^*+1}^{p}(m_q+n_q) - 2(m_\lambda - 2)$ произвольных вещественных постоянных.

Примечание 1. Если функция $u(x, y)$ (взятая в виде (22)) тождественно равна нулю, то, на основании сказанного выше, заключаем, что в этом случае все постоянные b_{qj} $(q = 1, \ldots, p;\ j = 0, 1, \ldots, m_q - n_q)$ и b_{0j} $(j = m_\lambda - 1, \ldots, m_0 + n_0)$ также необходимо должны быть равны нулю.

Подставив в равенство (20) вместо функции $u(x, y)$ ее выражение из формулы (22), получим для определения $\nu(s)$ систему интегральных уравнений Фредгольма. Обозначим последнюю через (40), позволив себе для краткости ее не выписывать.

---

* Так как $c_{q_0}^{(2)}$ — чисто мнимые величины, то для того чтобы удовлетворить уравнению (37), содержащему, кстати сказать, чисто мнимую постоянную iC, выбором которой можно распоряжаться, оказалось необходимым ввести в правую часть (22) вещественную постоянную b_{00}.

Если при обходе L_0 функция $\omega(s_0)$ получает приращение, равное $2\pi n_0$, то выражение, определяющее $\psi_0(z)$, будет содержать $2n_0 - 1$ произвольных вещественных постоянных (ср. (14)). В этом случае, взяв при $m_0 \geqslant n_0$ соответствующее слагаемое в правой части равенства (22) в виде

$$\sum_{j=0}^{m_0-n_0} b_{0j} z^j, \tag{40}$$

где $b_{0,\, m_0-n_0}$ — вещественная или чисто мнимая величина, определим эти постоянные вместе с b_{0j} $(j = 0, 1, \ldots, m_0 - n_0)$ и C, выразив некоторые из них через $c_{\lambda j}^{(2)}$ $(j = 0, 1, \ldots, m_\lambda - 2)$ из формулы, аналогичной (37).

Если $m_0 < n_0$, то следует сохранить из указанного слагаемого лишь член b_{00}. При этом из формулы (37) найдем (или выразим через $c_{\lambda j}^{(2)}$) $2m_0$ вещественных постоянных (включая b_{00} и C). Остальные $2(n_0 - m_0) + 1$ постоянные останутся произвольными.

Примечание 2. Введем обозначения:

$$P=2\left[\sum_{q=1}^{p^*}(n_q-m_q)+\{(m_0+n_0)-(m_\lambda-2)\}\right],$$

$$Q=2\left[\sum_{q=p^*+1}^{p}(m_q+n_q)-(m_\lambda-2)\right]$$

и предположим, что $P>Q$ или, что то же самое,

$$[\arg(a-ib)]_L>2\pi\left(\sum_{q=1}^{p}m_q-m_0\right). \tag{41}$$

В этом случае однородная задача ($f_q(s)=0$) имеет нетривиальные решения. Допустим противное. Тогда система однородных интегральных уравнений, соответствующая (40), будет иметь Q линейно независимых решений.

Далее, взяв решение однородной задачи в форме (22), получим для определения плотности $\nu(s)$ систему уравнений (40) (в которой $f_q(s)=0$). Выписав соответствующие условия ортогональности, получим для определения постоянных b_{qj} систему Q вещественных линейных алгебраических уравнений. Так как ранг матрицы ее коэффициентов не превосходит Q, то по крайней мере некоторые $P-Q$ из вещественных и мнимых частей величин b_{qj} можно взять произвольными. Между тем, в силу предшествующего примечания, все b_{qj} должны быть тождественно равны нулю. Отсюда вытекает справедливость нашего утверждения.

Рассуждая, как в § 1, докажем, что в рассматриваемом случае однородная задача будет иметь не менее

$$G=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_L-2\left(\sum_{q=1}^{p}m_q-m_0\right)$$

линейно независимых решений, и она будет иметь точно G решений, если неоднородная задача всегда разрешима.

Примечание 3. Из сказанного также ясно, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, и неоднородная задача всегда разрешима, то необходимо, чтобы

$$[\arg(a-ib)]_L=2\pi\left(\sum_{q=1}^{p}m_q-m_0\right).$$

Наоборот, если выполняется последнее соотношение и однородная задача имеет лишь тривиальное решение, то неоднородная задача всегда разрешима*.

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
13. VI. 1945

* Полученные результаты, очевидно, остаются справедливыми для случаев, указанных в подстрочных примечаниях на страницах 130 и 132.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гахов Ф. Д., Линейные краевые задачи теории функции комплексной переменной, Известия Казанского физ.-матем. общества, т. X, сер. 3, 1938.

[2] Noether F. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann. 82, 1921.

[3] Векуа И. Н., Об одной линейной граничной задаче Римана, Труды Тбилисского математического института, XI, 1942.

D. SHERMAN. ON THE GENERAL PROBLEM OF THE POTENTIAL THEORY

SUMMARY

In the present paper we consider the problem to determine a function $u(x, y)$ which is harmonic in a finite (simply connected or multiply connected) domain S in the plane $z = x + iy$ and satisfies on the boundary L of S the condition

$$\sum \sum a_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = f(s),$$

where $a_{kj}(s), f(s)$ are given functions of the arc s, m is an integer. In case S is multiply connected, m may be distinct on distinct contours boundary S. The functions $a_{kj}(s)$ are supposed to satisfy Lipschitz's condition and, moreover,

$$\left| \sum (i)^j a_{mj} \right| > 0.$$

The function $f(s)$ is taken to be continuous on L.

Under these conditions a method is given here which reduces the problem to an integral equation of Fredholm's type (compare with the results contained in Gachov's and Vekua's papers referred to above).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 135—166 Série mathématique

Ф. И. ФРАНКЛЬ

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Дается решение двух краевых задач для уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ в области верхней полуплоскости, примыкающей к отрезку оси абсцисс. Решение получено методом двойного слоя; при этом сняты некоторые ограничения, которые в других работах накладывались на форму границы области.

Введение

В данной работе решаются две краевые задачи для уравнения

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

которое мы будем называть уравнением Дарбу и Трикоми, по имени авторов, исследовавших его.

Решения ищутся в области, лежащей полностью в полуплоскости $y>0$, где уравнение (1) имеет эллиптический тип. Предполагается, что граница области проходит частично вдоль оси x. Относительно части границы, лежащей внутри полуплоскости $y>0$ предполагается лишь, что она достаточно гладка и подходит к оси x под прямым углом.

Будут рассматриваться следующие краевые задачи:

1° задача Дирихле;

2° задача, в которой краевые значения искомой функции заданы на части границы, лежащей внутри полуплоскости $y>0$; на части же границы, проходящей по оси x, заданы нормальные производные.

Эти задачи рассматривались уже Ф. Трикоми в работе ([1]), а также в статьях ([2]) и ([3]). Однако, решения даются там довольно сложными методами либо с использованием альтернирующего метода Шварца, либо предельным переходом, исходя из областей, лежащих вместе с границей полностью внутри полуплоскости $y>0$. В обоих случаях Трикоми пользуется двумерными интегральными уравнениями типа Фредгольма.

Вторая из рассматриваемых задач была сведена С. Геллерстедтом ([7]) к одномерным интегральным уравнениям типа Фредгольма второго рода методом двойного слоя и таким образом решена. При этом, однако, Геллерстедт сделал ограничительные предположения относительно формы контура: принималось, что концы дуги L (фиг. 1) сов-

падают с дугами некоторой алгебраической кривой, названной Трикоми «нормальной».

В данной работе мы путем соответствующих оценок избавились от этого ограничения для обеих рассматриваемых задач.

В приложении приведены частные решения уравнения (1), опровергающие некоторые ошибочные утверждения Трикоми, опубликованные в его статье (²).

1. Фундаментальные решения уравнения $\mathrm{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{y}^2}=0$ (⁷)

Как всякое двумерное линейное уравнение эллиптического типа, уравнение Дарбу-Трикоми может быть приведено к такому виду, что вторые производные будут встречаться в нем лишь в виде оператора Лапласа, а именно, при подстановке

$$y=\frac{2}{3}\,\mathrm{y}^{\frac{3}{2}} \tag{1}$$

уравнение

$$\mathrm{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{y}^2}=0 \tag{2}$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{3y}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Как известно, уравнения, содержащие оператор Лапласа в качестве главной части, обладают так называемыми фундаментальными решениями, т. е. решениями вида

$$Z(x,\,y;\,x',\,y')=L(x,\,y;\,x',\,y')\ln\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]+ \\ +M(x,\,y;\,x',\,y'), \tag{4}$$

где L и M — функции, регулярные в окрестности точки $x=x'$, $y=y'$.

Покажем, что *уравнение* (3) *обладает фундаментальными решениями* Z_1, Z_2, *регулярными во всей полуплоскости* $y\geqslant 0$, *за исключением точки* $x=x'$, $y=y'$, *такими, что для всех* x,

$$Z_1(x,\,0;\,x',\,y')=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}Z_2(x,\,y;\,x',\,y')\,|_{y=0}=0. \tag{6}$$

Для построения фундаментальных решений Z_1 и Z_2 определим прежде всего функцию Римана уравнения (2). При пользовании характеристическими координатами это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{6(\eta-\xi)}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0, \tag{7}$$

где

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}},\quad \eta=x+\frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}}. \tag{8}$$

Функция Римана в этих координатах примет вид:

$$u(\xi,\,\eta;\,\xi',\,\eta')=\frac{(\eta'-\xi')^{1/3}}{(\eta-\xi')^{1/6}(\eta'-\xi)^{1/6}}\,F\left(\frac{1}{6},\,\frac{1}{6};\,1;\,\sigma\right), \tag{9}$$

где

$$\sigma=\frac{(\xi-\xi')(\eta'-\eta)}{(\eta-\xi')(\eta'-\xi)}. \tag{9a}$$

Гипергеометрическая функция $F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6};\ 1;\sigma\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sigma(1-\sigma)\frac{d^2u}{d\sigma^2}+\left(1-\frac{4}{3}\sigma\right)\frac{du}{d\sigma}-\frac{u}{36}=0. \tag{10}$$

Однако гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[1-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=0 \tag{11}$$

обладает, наряду с гипергеометрической функцией

$$F(a,\ b;\ 1;\ z),$$

еще вторым независимым решением

$$\overline{F}(a,\ b;\ 1;\ z)=F(a,\ b;\ 1;\ z)\ln z+\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}+2\frac{\partial}{\partial c}\right)F(a,b;c;z)\Big|_{c=1}, \tag{12}$$

в соответствии с чем получаем второе решение уравнения (7), аналогичное функции Римана:

$$\overline{u}(\xi,\eta;\xi',\eta')=\frac{(\eta'-\xi')^{1/3}}{(\eta-\xi')^{1/6}(\eta'-\xi)^{1/6}}\overline{F}\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6};\ 1;\sigma\right). \tag{13}$$

Рассмотрим теперь решения u и $\overline{u}$ в эллиптической полуплоскости. Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned}\rho^2&=(x'-x)^2+(y'-y)^2,\\ \rho_1^2&=(x'-x)^2+(y'+y)^2,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

то параметр σ оказывается равным

$$\sigma=\frac{\rho^2}{\rho_1^2}. \tag{15}$$

Тогда вместо u получим функцию

$$q(x,\ y;\ x',\ y')=\frac{(2y')^{\frac{1}{3}}}{\rho_1^{1/3}}F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6};\ 1;\ \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F\left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right) \tag{16}$$

и аналогично вместо $\overline{u}$ — функцию

$$\begin{aligned}\overline{q}(x,\ y;\ x',\ y')&=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\overline{F}\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6};\ 1;\ \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)=\\ &=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{F\left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)\ln\frac{\rho^2}{\rho_1^2}+G\left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)\right\},\end{aligned} \tag{17}$$

где $G(z)$ — функция, регулярная при $0\leqslant z\leqslant 1$ ([4]).

Очевидно, *любая линейная комбинация*

$$\widetilde{q}=\overline{q}+cq \tag{18}$$

является фундаментальным решением уравнения (2).

Покажем теперь, что постоянная c может быть подобрана так, чтобы $\widetilde{q}(x,0;x',y')$ или, соответственно, $\left.\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial y}\right|_{y=0}$ обратились в нуль.

В самом деле, на основании уравнения (16)

$$q(x, 0; x', y') = \left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(1) = \left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)} \tag{19}$$

и на основании (17)

$$\bar{q}(x, 0; x', y') = \left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} G(1). \tag{20}$$

Покажем, что $G(1)$ имеет конечное значение и вычислим его. Пусть

$$F = F(a, b; c; z).$$

Тогда при $z=0$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial c} = 0. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + 2\frac{\partial}{\partial c}\right)(a+b-c) = 0. \tag{22}$$

Применяя теперь оператор $\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + 2\frac{\partial}{\partial c}$ к выражению

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + \\ + \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)(1-z)^{c-a-b}, \tag{23}$$

получим при $a=b=\frac{1}{6}$, $c=1$, $z=1$

$$G(1) = -2\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}\left(\gamma + \frac{\Gamma'\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\right), \tag{24}$$

где

$$\gamma = -\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}577\ldots \tag{25}$$

— постоянная Эйлера.

Таким образом, фундаментальное решение

$$q_1 = \bar{q} - \frac{G(1)}{F(1)}q = \bar{q} + 2\left(\gamma + \frac{\Gamma'\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\right)q \tag{26}$$

действительно обращается в нуль при $y=0$.

Заметим далее, что

$$\left.\begin{aligned} 1-\sigma &= \frac{16}{9}\frac{y^{\frac{3}{2}}\,y'^{\frac{3}{2}}}{\rho_1^2}, \\ (1-\sigma)^{c-a-b} &= (1-\sigma)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{yy'}{\rho_1^{4/3}}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Тогда

$$q_y(x,\ 0;\ x',\ y')=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{y'}{\rho_1^{4/3}}\frac{\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}, \tag{28}$$

$$\bar{q}_y(x,\ 0;\ x',\ y')=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{y'}{\rho_1^{4/3}}k, \tag{29}$$

$$k=\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}+2\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\Bigg|_{\substack{c=1\\ a=b=\frac{1}{6}}}=-2\frac{\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\left[\gamma+\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\right]. \tag{29a}$$

Следовательно, фундаментальное решение

$$q_2=q+2\left[\gamma+\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\right]q \tag{30}$$

имеет производную $\frac{\partial q_2}{\partial y}$, равную нулю на оси x.

§ 2. Сведение краевых задач к случаю нулевых краевых данных на оси абсцисс

Рассмотрим в плоскости (x, y) область D, расположенную в полуплоскости $y \geqslant 0$ и ограниченную

1) отрезком оси x, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

2) дугой L, расположенной в полуплоскости $y > 0$, с ограниченной кривизной и без углов с концами, подходящими к оси x в перпендикулярном направлении (фиг. 1, см. стр. 157).

В этой области исследуем две краевые задачи:

А. На дуге L

$$z=f(s), \tag{1}$$

где s — длина дуги, измеряемая от одного из концов в плоскости (x, y).

На отрезке оси x

$$z=\tau(x). \tag{2}$$

Относительно краевых значений $f(s)$ и $\tau(x)$ предполагается, что они непрерывны и обладают ограниченными первыми производными; допускается конечное число точек разрыва, но при условии, что решение z вблизи этих точек должно оставаться ограниченным. Функция $f(s)$ должна иметь также вторые производные, ограниченные или стремящиеся к ∞ у концов дуги как $y^{-\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

В. На дуге L

$$z=f(s). \tag{3}$$

На отрезке оси x

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\nu(x). \tag{4}$$

Функция $f(s)$ удовлетворяет условиям задачи A; функция $\nu(x)$ предполагается непрерывной, дифференцируемой и удовлетворяющей соотношению

$$\nu(x) = 0(1)\, x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}. \tag{5}$$

В окрестности точки внутри отрезка оси x $(0 < x < 1)$ решение должно оставаться ограниченным.

Для выполнения теоремы единственности необходимо в этой задаче добавить еще одно требование:

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{c_\varepsilon} z \frac{dz}{dn} y^{\frac{1}{3}}\, ds, \tag{6}$$

где c_ε — часть окружности $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ или, соответственно, $(1-x)^2 + y^2 = \varepsilon^2$, лежащая в области D, dn — дифференциал нормали к этой окружности, а длина дуги s измеряется в плоскости (x, y). Тогда должно быть

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{c_\varepsilon} z \frac{dz}{dn} y^{\frac{1}{3}}\, ds = 0. \tag{7}$$

Докажем теперь, что можно ограничиться случаем, когда $\tau(x) \equiv 0$ и, соответственно, $\nu(x) \equiv 0$.

Перейдем к рассмотрению задач.

1. Задача A. Выберем два числа a и b такие, чтобы область D полностью лежала в полосе

$$a < x < b. \tag{8}$$

Распространим функцию $\tau(x)$ произвольно на весь отрезок $a \leqslant x \leqslant b$, но так, чтобы при этом функция $\tau(x)$ осталась кусочно непрерывной с ограниченными производными.

Разложим теперь $\tau(x)$ в ряд Фурье:

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi \frac{x-a}{b-a}; \tag{9}$$

тогда можно получить решение уравнения (2) § 1, определяемое во всей полуплоскости $y > 0$ и принимающее на отрезке оси x значения $\tau(x)$, а именно

$$\frac{1}{\lambda(0)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi \frac{x-a}{b-a} \lambda\left[n^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} \frac{y}{(b-a)^{\frac{2}{3}}}\right], \tag{10}$$

где $\lambda(\xi)$ — решение уравнения

$$\lambda''(\xi) + \xi\lambda(\xi) = 0, \tag{11}$$

данное Трикоми ([1]) и определяемое интегралом

$$\lambda(\xi) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho\xi - \frac{1}{3}\rho^3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi\rho\right) d\rho. \tag{12}$$

Тогда решение первоначально поставленной задачи может быть представлено в виде

$$z(x, y) = z'(x, y) + z''(x, y), \tag{13}$$

где $z''(x, y)$ имеет на отрезке оси x $[0,1]$ нулевые краевые значения во всех точках непрерывности функции $\tau(x)$. Относительно точек разрыва функции $\tau(x)$ можно доказать, что в их окрестности $z'(x, y)$ остается ограниченной, а значит и функция $z''(x, y)$ будет обладать тем же свойством, откуда, в свою очередь, можно заключить, что предельные значения функций $z''(x, y)$ в точках разрыва также равны нулю. Последнее следует из того факта, что теорема единственности для задачи Дирихле может быть доказана при допущении такого рода разрывов. Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы § 1 работы Трикоми ([2]).

Итак, докажем, что функция $z'(x, y)$ в окрестности интервала $(0,1)$ оси x остается ограниченной. В случае, когда $\tau(x)$ является непрерывной функцией, это следует из равномерной сходимости ряда (9) ([6]), если учесть, что $\lambda(\xi)$ — положительная убывающая функция ([7]) и применить признак равномерной сходимости Харди ([6]). При наличии точек разрыва достаточно рассмотреть случай, когда $\tau(x) = -1$ при $-1 < x < 0$, $\tau(x) = 1$ при $0 < x < 1$ и т. д., и исследовать поведение функции $z'(x, y)$ вблизи начала координат. В этом случае ряд (9) принимает вид:

$$\tau(x) = 4\left(\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \dots\right). \tag{9a}$$

Рассмотрим сумму

$$\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1} =$$

$$= \int_0^x (\cos \pi x + \cos 3\pi x + \dots + \cos(2n+1)\pi x)\, dx = \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)\pi x}{\sin \pi x}\, dx =$$

$$= \int_0^x \sin 2(n+1)\pi x \left(\frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x}\right) dx + \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)\pi x}{\pi x}\, dx =$$

$$= \int_0^x \sin 2(n+1)\pi x \left(\frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x}\right) dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2(n+1)\pi x} \frac{\sin y}{y}\, dy. \tag{14}$$

Оба интеграла в правой части уравнения (14) очевидно ограничены независимо от n.

Отсюда и из убывания функции $\lambda(\xi)$ следует, согласно неравенству Абеля ([6]), что сумма

$$\frac{\sin \pi x}{1}\lambda\left(\pi^{\frac{2}{3}} y\right) + \frac{\sin 3\pi x}{3}\lambda\left(\pi^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{2}{3}} y\right) + \dots + \frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}\lambda\left[\pi^{\frac{2}{3}}(2n+1)^{\frac{2}{3}} y\right] \tag{15}$$

также ограничена, откуда следует доказуемое.

Если, наконец, выполнить продолжение функции $\tau(x)$ вне отрезка $[0,1]$ таким образом, чтобы $\tau(x)$ в точках $x=0$ и $x=1$ оставалась непрерывной, то производные краевых значений $z(x, y)$ на дуге L будут ограниченными [([1]), гл. II, § 6].

Итак, доказано, что в случае задачи A можно ограничиться случаем $\tau(x)=0$.

2. Задача B. Для исследования этой задачи рассмотрим следующее решение уравнения (2) § 1, использованное уже Трикоми [(1), гл. V § :

$$w(x, y; \xi)=[(x-\xi)^2+y^2]^{-\frac{1}{6}}-|2\xi-1|^{-\frac{1}{3}}\left[\left(x-\frac{\xi}{2\xi-1}\right)^2+y^2\right]^{-\frac{1}{6}} \quad (16)$$

Распределяя особенности этих решений вдоль отрезка оси абсцисс $0<x<1$, получим решения следующего вида:

$$\psi=\int_0^1 w(x, y; \xi)\, \sigma(\xi)\, d\xi. \quad (17)$$

Предельное значение ψ при $y=0$

$$\psi(x, 0)=\int_0^1 \{|x-\xi|^{-\frac{1}{3}}-(x+\xi-2\xi x)^{-\frac{1}{3}}\}\, d. \quad (18)$$

Предельное значение $\frac{\partial\psi}{\sigma y}$ при $y\to 0$

$$\psi_y(x, 0)=\lim_{y\to 0}\left\{-\frac{2}{9}\sigma(x)\, y^2\int_0^1\left\{\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{-\frac{7}{6}}-\right.\right.$$
$$\left.-|2\xi-1|^{-\frac{1}{3}}\left[\left(x-\frac{\xi}{2\xi-1}\right)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{-\frac{7}{6}}\right\}d\xi-$$
$$-\frac{2}{9}y^2\int_0^1[\sigma(\xi)-\sigma(x)]\left\{\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{-\frac{7}{6}}-\right.$$
$$\left.\left.-|2\xi-1|^{-\frac{1}{3}}\left[\left(x-\frac{\xi}{2\xi-1}\right)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{-\frac{7}{6}}\right\}d\xi\right\}. \quad (19)$$

Если $\sigma(\xi)$ в точке $\xi=x$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\sigma(\xi)-\sigma(x)|<A(x)|\xi-x| \text{ при } |\xi-x|<\varepsilon(x), \quad (20)$$

то

$$y^2\left|\int_{x-\varepsilon(x)}^{x+\varepsilon(x)}[\sigma(\xi)-\sigma(x)]\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{-\frac{7}{6}}d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant A(x)\, y^2\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{y}\int_{x-\varepsilon(x)}^{x+\varepsilon(x)}\frac{d\xi}{\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{1/6}}. \quad (21)$$

Следовательно, второе слагаемое правой части уравнения (19) стремится к нулю при $y\to 0$.

Предел первого слагаемого будет

$$-\frac{2}{3}\sigma(x)\lim_{y\to 0}y^2\int_0^1\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{-\frac{7}{6}}d\xi.$$

Для его определения введем новую переменную интегрирования

$$t=\frac{\xi-x}{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}}. \tag{22}$$

Тогда

$$\psi_y(x, 0)=-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\sigma(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{7/6}}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{7/6}}. \tag{23}$$

Введя новую переменную

$$s=\frac{1}{1+t^2}, \tag{24}$$

получим

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{7/6}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{ds}{s^{1/3}(1-s)^{1/2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} \tag{25}$$

Таким образом.

$$\psi_y(x, 0)=-\beta\sigma(x), \tag{26}$$

где

$$\beta=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}. \tag{26a}$$

Следовательно, решение уравнения (2) § 1

$$\psi(x, y)=-\frac{1}{\beta}\int_0^1 w(x, y; \xi)\,\nu(\xi)\,d\xi \tag{27}$$

дает вдоль отрезка $y=0$, $0<x<1$

$$\psi_y(x, 0)=\nu(x). \tag{27a}$$

Обозначим теперь через $f_1(s)$ краевые значения функции $\psi(x, y)$ на дуге L. Докажем, что вблизи концов дуги L функция $f_1(s)$ и ее производная $f_1'(s)$ остаются ограниченным (длина дуги измеряется при этом в плоскости (x, y)).

В самом деле,

$$w=\rho^{-\frac{1}{3}}-\bar{\rho}^{-\frac{1}{3}}, \tag{28}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\rho^2&=(x-\xi)^2+y^2,\\ \bar{\rho}^2&=[x(2\xi-1)-\xi]^2+y^2,\end{aligned}\right\} \tag{28a}$$

откуда

$$\begin{aligned}w&=\frac{[x(2\xi-1)-\xi]^2-(x-\xi)^2}{\bar{\rho}^{1/3}\rho^{1/3}[\rho^{5/3}+\rho^{4/3}\bar{\rho}^{1/3}+\dots]}=\frac{4\xi(1-\xi)x(1-x)}{\rho^{1/3}\bar{\rho}^{1/3}[\rho^{5/3}+\dots]}=\\ &=O(1)\,\xi(1-\xi)\,\rho^{-1/3}\,(=O(1)).\end{aligned} \tag{29}$$

Так как у концов дуги L

$$\left.\begin{aligned}x&=O(1)\,y^2,\\ 1-x&=O(1)\,y^2,\end{aligned}\right\} \tag{29a}$$

то

$$\xi = (\xi - x) + x = O(1)\rho + O(1)y^2 = O(1)\rho. \tag{29b}$$

Дифференцируя формулу (29) вдоль кривой L, получим

$$\frac{dw}{dy} = O(1)\xi(1-\xi)\rho^{-4/3}\,(=O(1)\rho^{-1/3}). \tag{30}$$

Следовательно,

$$f_1 = \int w(x, y; \xi)\,\nu(\xi)\,d\xi = O(1), \tag{31}$$

$$\frac{df_1}{dy} = O(1)\int \xi^{\frac{1}{3}}(1-\xi)^{\frac{1}{3}}\rho^{-\frac{4}{3}}\,d\xi = O(1)\int \rho^{-1}d\xi = O(1)(|\ln y| + 1), \tag{31a}$$

$$\frac{d^2f_1}{dy^2} = O(1)\int \xi^{\frac{1}{3}}(1-\xi)^{\frac{1}{3}}\rho^{-\frac{7}{3}}\,d\xi = O(1)\int \frac{d\xi}{\rho^2} = \frac{O(1)}{y}. \tag{31b}$$

Таким образом,

$$\frac{df_1}{dy} = O(1), \tag{32a}$$

$$\frac{d^2f_1}{dy^2} = O(1)\,y^{-\frac{1}{2}}\ln y. \tag{32b}$$

Оценим, наконец, значения $\psi(x, y)$ и ее первых производных вблизи точек $(0, 0)$ и $(0, 1)$.

Вблизи точки $(0, 0)$

$$\psi = O(1)\,x(1-x)\int_0^1 \xi^{\frac{1}{3}}(1-\xi)^{\frac{1}{3}}\rho^{-\frac{7}{3}}\,d\xi =$$

$$= O(1)\,x(1-x)\left[x^{\frac{1}{3}}\int_0^1 \rho^{-\frac{7}{3}}d\xi + \int_0^1 \rho^{-2}d\xi\right] = O(1)\,x(1-x)R^{-1} = O(1), \tag{33}$$

где

$$R = x^2 + y^2 \tag{33a}$$

и

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = O(1)\int_0^1 \xi^{\frac{1}{3}}(1-\xi)^{\frac{1}{3}}\rho^{-\frac{7}{3}}\,d\xi = O(1)\left[\int_0^1 \frac{d\xi}{\rho^2} + x^{\frac{1}{3}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\rho^{7/3}}\right] = \frac{O(1)}{R}. \tag{34}$$

Точно так же

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{O(1)}{R}. \tag{34a}$$

Аналогичные оценки имеют место вблизи точки $(0, 1)$.

На основании формул (33) и (34) получим

$$\int_{C_\varepsilon} z\frac{dz}{dn}\,y^{\frac{1}{3}}\,ds = O(1)\,R^{\frac{1}{3}}, \tag{35}$$

так что требование (7) выполняется.

Таким образом, решение ψ удовлетворяет всем условиям задачи B. Следовательно, и $z-\psi$ удовлетворяет тем же условиям, если им удовлетворяет z.

Итак, *доказана возможность ограничения случаем* $\nu(x) \equiv 0$.

§ 3. Сведение краевых задач к одномерным уравнениям Фредгольма второго рода

На основании результатов предыдущего параграфа мы предполагаем в дальнейшем, что в задачах A и B функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ соответственно равны нулю.

По аналогии с решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа образуем на основе фундаментальных решений q_1 и q_2 диполи, т. е. возьмем производные по нормали к кривой L этих функций $\left(\frac{dq_1}{dn'}, \frac{dq_2}{dn'}\right)$, меняя при этом координаты особой точки. (Нормаль проводится в плоскости (x, y)).

Поскольку рассуждения в случаях A и B ничем друг от друга не отличаются, в дальнейшем вместо q_1 и q_2 будем писать $\hat{q}$.

Потенциал двойного слоя, т. е. слоя диполей с моментом $\mu(s)$, будет

$$z = \frac{1}{2}\int_0^S \mu(s')\frac{d\hat{q}}{dn'}ds'. \tag{1}$$

Если дифференциал dn' имеет направление внутренней нормали, то предельное значение z на внутренней стороне дуги L будет

$$\pi\mu(s) + \frac{1}{2}\int_0^S \mu(s')\frac{d\hat{q}}{dn'}ds'. \tag{2}$$

Следовательно, функция $\mu(s)$ определяется из интегрального уравнения

$$\pi\mu(s) + \frac{1}{2}\int_0^S \mu(s')\frac{d\hat{q}}{dn'}ds' = f(s), \tag{3}$$

являющегося интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода.

В § 4 мы покажем, что ядро $\frac{d\hat{q}}{dn'}$ удовлетворяет оценке

$$\frac{d\hat{q}}{dn'} = O(1)\ln(\rho). \tag{4}$$

Следовательно, к этому ядру применима теория Фредгольма. Остается еще доказать, что число $\frac{1}{2\pi}$ не является характеристическим числом интегрального уравнения (3).

Это утверждение эквивалентно тому, что однородное интегральное уравнение

$$\pi\bar{\mu}(s) + \frac{1}{2}\int_0^s \bar{\mu}(s')\frac{d\hat{q}}{dn'}ds' = 0 \tag{5}$$

не имеет нетривиального решения.

Будем доказывать от противного. Пусть $\bar{\mu}(s)$ — такое нетривиальное решение. Как будет показано в § 4, такое решение удовлетворяло бы оценкам

$$\bar{\mu}(s) = O(1), \quad \bar{\mu}'(s) = \frac{O(1)}{y^{1/3}}, \quad \bar{\mu}''(s) = \frac{O(1)}{y^{4/3}}, \tag{6}$$

откуда следовало бы, что соответствующее решение однородной краевой задачи

$$\left.\begin{array}{l} \bar{A}:\ \bar{z}=0 \text{ на } L,\ \bar{z}=0 \text{ на отрезке } y=0,\ 0<x<1 \\ \text{или} \\ \bar{B}:\ \bar{z}=0 \text{ на } L,\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=0 \text{ на отрезке } y=0,\ 0<x<1 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

удовлетворяет оценкам

$$\bar{z}=O(1)\,[|\ln R|^2+1],\qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=O(1)\,\frac{|\ln R|+1}{R},\qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=\frac{O(1)}{R^{2/3}\,y^{1/3}}\,[|\ln R|+1], \qquad (8)$$

где R — расстояние данной точки от одного из концов дуги L.

Но в этом случае мы имели бы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon} \bar{z}\,\frac{d\bar{z}}{dn}\,y^{1/3}\,ds=0, \qquad (9)$$

а при этом условии теорема единственности решений задач A и B доказана [(1), гл. II, § 7]. Следовательно, было бы

$$\bar{z}\equiv 0 \qquad (10)$$

и тогда на кривой L

$$\frac{d\bar{z}}{dn}\equiv 0. \qquad (11)$$

Рассмотрим теперь потенциал $\bar{z}$, образованный согласно формуле (1), вне кривой L. В силу непрерывности нормальных производных этот потенциал удовлетворял бы краевым условиям

$$\left.\begin{array}{l} \bar{A}:\ \frac{d\bar{z}}{dn}=0 \text{ на } L,\ \bar{z}=0 \text{ на } y=0; \\ \quad \bar{z}=O\left(\frac{1}{R^{4/3}}\right);\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x},\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=O\left(\frac{1}{R^{7/3}}\right) \text{ при } R\to\infty; \\ \bar{B}:\ \frac{d\bar{z}}{dn}=0 \text{ на } L,\ \frac{d\bar{z}}{dy}=0 \text{ на } y=0; \\ \quad \bar{z}=O\left(\frac{1}{R^{4/3}}\right);\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x},\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=O\left(\frac{1}{R^{7/3}}\right) \text{ при } R\to\infty. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Кроме того, вблизи концов дуги L выполнялись бы условия (8) и, следовательно, (9).

Но при этих условиях интегрирование по частям дает

$$0=\iint \bar{z}\left(y\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\int\limits_L y^{\frac{1}{3}}\,\bar{z}\,\frac{d\bar{z}}{dn}\,ds-$$

$$-\iint\left[y\left(\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\iint\left[y\left(\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \qquad (13)$$

где двойные интегралы распространяются по бесконечной области вне дуги $L\,(y>0)$. Отсюда следует, что и вне дуги L имеем $\bar{z}\equiv 0$.

Разрыв функции $\bar{z}$ вдоль дуги L равен, однако, $2\pi\bar{\mu}(s)$. Таким образом,

$$\bar{\mu}(s)\equiv 0, \qquad (14)$$

что и требовалось доказать.

Итак, неоднородное интегральное уравнение (3) имеет единственное решение.

Как будет доказано в § 4, оно удовлетворяет оценкам (6), а соответствующий потенциал (1) — оценкам (8), так что выполняется также условие (9), если только $f(s)$ удовлетворяет оценкам (6).

Таким образом доказано, что краевые задачи A и B действительно решаются при помощи интегрального уравнения (3).

Остается еще доказать использованные оценки.

§ 4. Доказательство оценок

Для доказательства упомянутых в § 3 оценок требуются, прежде всего, некоторые оценки фундаментального решения $\hat{q}$ и его производных по n', s', n, s в случае, когда обе точки, определяющие эти фундаментальные функции, лежат на контуре L.

Напомним, что фундаментальное решение $\hat{q}$ может быть написано в виде

$$\hat{q}=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}[F(\sigma)\ln\sigma+H(\sigma)],\tag{1}$$

где

$$\sigma=\frac{\rho^2}{\rho_1^2},\quad F(\sigma)=F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6};\ 1;\ \sigma\right),\quad H=kF+G,$$

$$G=DF(a,b;\ c;\ \sigma)\Big|_{a=b=\frac{1}{6};\ c=1},\quad D=\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}+2\frac{\partial}{\partial c}.$$

Прежде всего оценим функции

$$\hat{q},\ \frac{\partial\hat{q}}{\partial n'};\quad \frac{\partial\hat{q}}{\partial s},\ \frac{\partial^2\hat{q}}{\partial n'\partial s};\quad \frac{\partial^2\hat{q}}{\partial s^2},\ \frac{\partial^3\hat{q}}{\partial n'\partial s^2},$$

для чего, в свою очередь, потребуется оценить следующие величины:

$$F(\sigma),\ G(\sigma);\quad F',\ G';\quad F'',\ G'';\quad F''',\ G''';$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial n'},\ \frac{\partial\sigma}{\partial s},\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial n'\partial s},\ \frac{\partial^3\sigma}{\partial n'\partial s^2};\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}},\ \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{2y'}{\rho'}\right)^{\frac{1}{3}},\ \frac{\partial^2}{\partial n'\partial s}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial n'\partial s^2}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right);$$

$$\frac{\partial\ln\sigma}{\partial n'},\ \frac{\partial\ln\sigma}{\partial s},\ \frac{\partial^2\ln\sigma}{\partial n'\partial s},\ \frac{\partial^2\ln\sigma}{\partial s^2},\ \frac{\partial^3\ln\sigma}{\partial n'\partial s^2}.$$

Для оценки функций F, G и их производных отметим, что

$$F(\sigma)=AF_2+(1-\sigma)^{c-a-b}BF_3,\tag{2}$$

где $F=F(a,b;c;\sigma)$, гипергеометрические функции F_2 и F_3 имеют своим аргументом $1-\sigma$, а коэффициенты A и B зависят от a, b и c. Соответственно получим

$$G(\sigma)=D(AF_2)+(1-\sigma)^{c-a-b}D(BF_3).\tag{2a}$$

Тогда для значений $a=b=\frac{1}{6}$, $c=1$

$$
\left.\begin{aligned}
F(\sigma) &= AF_2+(1-\sigma)^{\frac{2}{3}}BF_3,\\
G(\sigma) &= D(AF_2)+(1-\sigma)^{\frac{2}{3}}D(BF_3),\\
F'(\sigma) &= CF_4+(1-\sigma)^{-\frac{1}{3}}EF_5,\\
G'(\sigma) &= D(CF_4)+(1-\sigma)^{-\frac{1}{3}}D(EF_5),\\
F''(\sigma) &= IF_6+(1-\sigma)^{-\frac{4}{3}}KF_7,\\
G''(\sigma) &= D(IF_6)+(1-\sigma)^{-\frac{4}{3}}D(KF_7),\\
F'''(\sigma) &= LF_8+(1-\sigma)^{-\frac{7}{3}}MF_9),\\
G'''(\sigma) &= D(LF_8)+(1-\sigma)^{-\frac{7}{3}}D(MF_9).
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

Но поскольку

$$
1-\sigma=\frac{4yy'}{\rho_1^2}, \tag{4}
$$

то из уравнений (3) вытекают оценки

$$
\left.\begin{aligned}
F(\sigma) &= O(1)=G(\sigma),\\
F'(\sigma) &= O\left[\frac{\rho_1^{\frac{2}{3}}}{y^{1/3}y'^{1/3}}\right]=G'(\sigma),\\
F''(\sigma) &= O\left[\frac{\rho_1^{8/3}}{y^{4/3}y'^{4/3}}\right]=G''(\sigma),\\
F'''(\sigma) &= O\left[\frac{\rho^{14/3}}{y^{7/3}y'^{7/3}}\right]=G'''(\sigma).
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

Как оцениваются производные σ, покажем на примере

$$
\frac{\partial\sigma}{\partial n'}=-\frac{\partial}{\partial n}(1-\sigma)=-\frac{4y}{\rho_1^2}\overbrace{\frac{dy'}{dn'}}^{O(y')}+\frac{8yy'}{\rho_1^4}\left[\overbrace{(x'-x)}^{O(\rho_1^2)}\frac{dx'}{dn'}+\overbrace{(y+y')}^{O(\rho_1)}\overbrace{\frac{dy'}{dn'}}^{O(\rho_1)}\right]=
$$
$$
=O\left(\frac{yy'}{\rho_1^2}\right)=O\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)
$$

Оценивая аналогично остальные производные от σ, получим

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial n'}=O\left(\frac{y'}{\rho_1}\right),\quad \frac{\partial\sigma}{\partial s}=O\left(\frac{y'}{\rho_1^2}\right),\quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial s\,\partial n'}=O\left(\frac{y'}{\rho_1^3}\right),\\
&\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}=O\left(\frac{y'}{\rho_1^3}\right),\quad \frac{\partial^3\sigma}{\partial s^2\,\partial n'}=O\left(\frac{y'}{\rho_1^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

Далее

$$
\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3y'^{2/3}\rho_1^{1/3}}\overbrace{\frac{dy'}{dn'}}^{O(y')}-\frac{y'^{1/3}}{3\rho_1^{7/3}}\overbrace{\left[(x'-x)\frac{dx'}{dn'}+(y'+y)\frac{dy'}{dn'}\right]}^{O(\rho_1^2)}=O\left[\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].
$$

Оценивая аналогично остальные производные от $\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}$, получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}=O\left[\frac{y'^{1/3}}{\rho_1^{1/3}}\right],\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}=O\left[\frac{y'^{\frac{1}{3}}}{\rho_1^{4/3}}\right],\quad \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}=O\left[\frac{y'^{\frac{1}{3}}}{\rho_1^{7/3}}\right],\\&\frac{\partial^2}{\partial n'\,\partial s}\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}=O\left[\frac{y'^{\frac{1}{3}}}{\rho_1^{4/3}}\right],\quad \frac{\partial^3}{\partial n'\,\partial s^2}\left[\frac{y'}{\rho_1^7}\right]^{\frac{1}{3}}=O\left[\frac{y'^{1/3}}{\rho^{7/3}}\right].\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Для производных от $\ln\sigma$ получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\ln\sigma}{\partial n'}=O(1),\quad \frac{\partial^2\ln\sigma}{\partial n'\,\partial s}=O(1)\quad \frac{\partial^3\ln\sigma}{\partial n'\,\partial s^2}=O(1),\\&\frac{\partial\ln\sigma}{\partial s}=\frac{2}{s-s'}-\frac{2}{s+s'}+O(1),\\&\frac{\partial^2\ln\sigma}{\partial s^2}=-\frac{2}{(s-s')^2}+\frac{2}{(s+s')^2}+O(1).\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Имея оценки (5), (6), (7), (8) можно, наконец, получить оценки для $\hat{q}$ и его производных, именно:

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad \hat{q}=O(1)\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left|\ln\frac{\rho}{\rho_1}\right|+1\right],\\
&2.\quad \frac{\partial\hat{q}}{\partial n'}=O(1)\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left|\ln\frac{\rho}{\rho_1}\right|+1\right],\\
&3.\quad \frac{\partial\hat{q}}{\partial s}=\frac{O(1)}{\rho_1}\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left|\ln\frac{\rho}{\rho_1}\right|+1\right]+2\overbrace{\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)}^{P}\left(\frac{1}{s-s'}-\frac{1}{s+s'}\right),\\
&4.\quad \frac{\partial^2\hat{q}}{\partial n'\,\partial s}=\frac{O(1)}{\rho_1}\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left|\ln\frac{\rho}{\rho_1}\right|+1\right]+\\
&\qquad +2\overbrace{\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)}^{Q}\left(\frac{1}{s-s'}-\frac{1}{s+s'}\right),\\
&5.\quad \frac{\partial^2\hat{q}}{\partial s^2}=\frac{O(1)}{\rho_1 y}\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left|\ln\frac{\rho}{\rho_1}\right|+1\right]+\\
&\qquad +4\overbrace{\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)+\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F'(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial s}\right]}^{R}\left(\frac{1}{s-s''}-\frac{1}{s+s'}\right)-\\
&\qquad -2\overbrace{\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)}^{S}\left[\frac{1}{(s'-s)^2}-\frac{1}{(s'+s)^2}\right],\\
&6.\quad \frac{\partial^3\hat{q}}{\partial n'\,\partial s^2}=\frac{O(1)}{\rho_1 y}\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left|\ln\frac{\rho}{\rho_1}\right|+1\right]+\\
&+4\overbrace{\left\{\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial n'}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)+\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F'(\sigma)\frac{\partial^2\sigma}{\partial n'\,\partial s}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F'(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right\}}^{T}\cdot\\
&\cdot\left(\frac{1}{s-s'}-\frac{1}{s+s'}\right)-\\
&-2\overbrace{\left\{\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F'(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial n'}+\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right\}}\left[\frac{1}{(s-s')^2}-\frac{1}{(s+s')^2}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

В дальнейшем потребуются еще оценки первых производных по s' коэффициентов при $\left(\frac{1}{s-s'}-\frac{1}{s+s'}\right)$, стоящих в формулах (9), а также первых и вторых производных по s' коэффициентов при $\left[\frac{1}{(s-s')^2}-\frac{1}{(s+s')^2}\right]$ в тех же формулах. Все эти оценки берем при условии, что

$$\frac{1}{2}y \leqslant y' \leqslant \frac{3}{2}y. \tag{10}$$

Тогда, используя вышеуказанные приемы, получим

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{\partial P}{\partial s'}=\frac{O(1)}{y}, & \frac{\partial Q}{\partial s'}=\frac{O(1)}{y}, & \frac{\partial R}{\partial s'}=\frac{O(1)}{y^2}, & \frac{\partial S}{\partial s'}=\frac{O(1)}{y}, \\ \frac{\partial^1 S}{\partial s'^2}=\frac{O(1)}{y^2}, & \frac{\partial T}{\partial s'}=\frac{O(1)}{y^2}, & \frac{\partial U}{\partial s'}=\frac{O(1)}{y}, & \frac{\partial^2 U}{\partial s'^2}=\frac{O(1)}{y^2}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Для самих коэффициентов P, Q, R, S, T, U получаются следующие оценки:

$$\left.\begin{array}{lll} P=O(1)\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}, & Q=O(1)\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}, & R=\frac{O(1)}{\rho_1}\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ S=O(1)\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}, & T=\frac{O(1)}{\rho_1}\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{3}}, & U=O(1)\left(\frac{y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Использование условия (10) позволяет привести уравнения (12) к виду

$$P=O(1),\quad Q=O(1),\quad R=\frac{O(1)}{y},\quad S=O(1),\quad T=\frac{O(1)}{y},\quad U=O(1). \tag{12a}$$

Теперь на основании оценок (9), (11), (12) и (12a) выведем ряд оценок, относящихся к интегралам вида

$$\int_0^{\mathfrak{S}} \mu(s')\frac{\partial \hat{q}}{\partial n'}\,ds'.$$

Прежде всего докажем следующие теоремы:

ТЕОРЕМА I *Пусть* $\mu_1(s)$ — *интегрируемая, ограниченная функция; тогда функция*

$$\mu_2(s)=\int_0^{\mathfrak{S}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial n'}\mu_1(s')\,ds \tag{13}$$

удовлетворяет условию Hölder'а:

$$|\mu_2(s_2)-\mu_2(s_1)| \leqslant A\,|s_2-s_1|^{\varepsilon} \quad (0<\varepsilon<1). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть

$$|s_2-s_1|=\delta,\quad s_1<s_2.$$

Тогда, в силу (9,2) и (9,4)

$$|\mu_2(s_2)-\mu_2(s_1)| \leqslant O(1)\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{y^{1/3}}\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{|\ln|s'-s||}{s+s'}\,ds' +$$

$$+O(1)\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_0^{s_1-\frac{\delta}{2}}+\int_{s_2+\frac{\delta}{2}}^{\mathfrak{S}}\right)\frac{ds'}{|s'-s|}\,ds+O(1)\int_{s_1-\frac{\delta}{2}}^{s_2+\frac{\delta}{2}}|\ln\, s'-s_1||\,ds' +$$

$$+O(1)\int\limits_{s_1-\frac{\delta}{2}}^{s_1+\frac{\delta}{2}} |\ln|s'-s_2||\,ds' \leqslant O(1)\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{y^{1/3}}\Big[s^{-\varepsilon'}\int\limits_0^{\frac{s}{2}}\frac{ds'}{s'+s}+$$

$$+\frac{1}{s}\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}|s'-s|^{-\varepsilon'}\,ds'+s^{-\varepsilon'}\int\limits_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}}\frac{ds'}{s'+s}\Big]+O(1)\int\limits_{s_1}^{s_2}\Big[\Big|\ln\Big(s_2+\frac{\delta}{2}-s\Big)\Big|+$$

$$+\Big|\ln\Big(s-s_1+\frac{\delta}{2}\Big)\Big|\Big]\,ds+O(1)(s_2-s_1)^{\varepsilon'}\leqslant O(1)\int\limits_{s_1}^{s_2}s^{-\varepsilon''-\frac{1}{3}}\,ds+$$

$$+O(1)(s_2-s_1)^{\varepsilon'}\leqslant O(1)(s_2^{\varepsilon}-s_1^{\varepsilon})+O(1)(s_2-s_1)^{\varepsilon}\leqslant O(1)(s_2-s_1)^{\varepsilon}, \qquad (15)$$

что и требовалось.

ТЕОРЕМА II. *Пусть $\mu_2(s)$ удовлетворяет условию Hölder'a. Тогда функция*

$$\mu_3(s)=\int\limits_0^{\mathfrak{S}}\frac{\partial\hat{q}}{\partial n'}\,\mu_2(s')\,ds' \qquad (16)$$

дифференцируема, причем производная удовлетворяет оценке

$$\mu_3'(s)=\frac{O(1)}{y^{1/3}}. \qquad (17)$$

Докажем сперва, что производная существует и равна

$$\mu_3'(s)=\int\limits_0^{\mathfrak{S}}\frac{\partial^2\hat{q}}{\partial n'\,ds}\,\mu_2(s')\,ds'. \qquad (18)$$

(Интеграл в формуле (18) понимается как главное значение в смысле Коши).

Для этой цели рассмотрим интеграл

$$\mu_2(s,h)=\Big(\int\limits_0^{s-h}+\int\limits_{s+h}^{\mathfrak{S}}\Big)\frac{\partial\hat{q}}{\partial n'}\,\mu_2(s')\,ds', \qquad (17a)$$

производная которого равна

$$\Big(\int\limits_0^{s-h}+\int\limits_{s+h}^{\mathfrak{S}}\Big)\mu_2(s')\frac{\partial^2\hat{q}}{\partial s\,\partial n'}\,ds'+\mu_2(s-h)\,\hat{q}_{n'}(s,s-h)-$$
$$-\mu_2(s+h)\,\hat{q}_{n'}(s,s+h). \qquad (18a)$$

Функция $\dfrac{\partial^2\hat{q}}{\partial n'\,\partial s}$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\hat{q}}{\partial n'\,\partial s}=\frac{f(s)}{s-s'}+O(1)(|\ln|s-s'||+1). \qquad (19)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mu_2(s+\delta)\,\hat{q}_{n's}(s,s+\delta)+\mu_2(s-\delta)\hat{q}_{n',s}(s,s-\delta)&=\\=\mu_2(s+\delta)\,[\hat{q}_{n',s}(s,s+\delta)+\hat{q}_{n's}(s,s-\delta)]&+\\+\hat{q}_{n's}(s,s-\delta)\,[\mu_2(s-\delta)-\mu_2(s+\delta)]&=\\=O(1)\,[\,|\ln\delta|+1]+O(1)\,\delta^{-1}\delta^{\varepsilon},&\end{aligned} \qquad (20)$$

откуда при $h \to 0$ следует сходимость интеграла (18a) к интегралу (18) и притом равномерная в окрестности точки $s = \bar{s}$.

Заметим далее, что

$$\hat{q}_{n'}(s, s \pm h) = k(s) \ln h + O(1) h [|\ln h| + 1], \tag{21}$$

откуда

$$\begin{aligned} &\mu_2(s-h)\hat{q}_{n'}(s, s-h) - \mu_2(s+h)\hat{q}_{n'}(s, s+h) = \\ &= \mu_2(s-h)[\hat{q}_{n'}(s, s-h) - \hat{q}_{n'}(s, s+h)] + \hat{q}_{n'}[\mu_2(s-h) - \mu_2(s+h)] = \\ &= O(1) h [|\ln h| + 1] + O(1) \ln h \cdot h^{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{22}$$

Следовательно, сумма второго и третьего членов в выражении (18) стремится к нулю при $h \to 0$ и притом равномерно в окрестности точки $s = \bar{s}$. Таким образом, формула (18) доказана.

Докажем теперь оценку (17). Согласно уравнениям (9.4), (11) и (12)

$$\begin{aligned} \mu_3'(s) = \frac{O(1)}{y^{1/3}} \int_0^{\mathfrak{S}} \rho_1^{-\frac{2}{3}} \left[\left| \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right| + 1 \right] + O(1) \int_0^{\mathfrak{S}} \frac{ds'}{s+s'} + \\ + \left(\int_0^{\frac{s}{2}} + \int_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}} \right) Q \frac{\mu_2(s')\, ds'}{s-s'} + Q(s, s) \int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} \frac{\mu_2(s')}{s-s'} ds' + \\ + Q_s'(s, s^*) \int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} \mu_2(s')\, ds' = \frac{O(1)}{y^{1/3}} + O(1)[|\ln y| + 1] + O(1)[|\ln y| + 1] + \\ + O(1) y^{\varepsilon} + \frac{O(1)}{y} \cdot y = \frac{O(1)}{y^{1/3}}. \end{aligned} \tag{23}$$

ТЕОРЕМА III. *Если непрерывная, ограниченная функция $\mu_3(s)$ обладает производной, удовлетворяющей оценке (17), то производная функции*

$$\mu_4(s) = \int_0^{\mathfrak{S}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial n'} \mu_3(s')\, ds' \tag{24}$$

удовлетворяет условию Hölder'a:

$$|\mu_4'(s_2) - \mu_4'(s_1)| \leqslant \frac{A}{y_1^{4/3}} (s_2 - s_1)^{\varepsilon}, \quad (y_1 < y_2, \ 0 < \varepsilon < 1). \tag{25}$$

Для доказательства применим интегрирование по частям.

Пусть

$$\frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial n' \partial s} = V(s, s') + Q(s, s') \left(\frac{1}{s-s'} - \frac{1}{s+s'} \right). \tag{26}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_4'(s) = \left(\int_0^a + \int_b^{\mathfrak{S}} \right) \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial n' \partial s} \mu_3(s')\, ds' + \int_a^b \frac{Q(s, s') - Q(s, s)}{s-s'} \mu_3(s')\, ds' + \\ + Q(s, s) \int_a \frac{\mu_3(s')}{s-s'} ds' + \int_a^b \frac{Q(s, s')}{s+s'} \mu_3(s')\, ds' + \int_a^b V(s, s') \mu_3(s')\, ds' = \end{aligned}$$

$$=\left(\int_0^a+\int_b^{\mathfrak{S}}\right)\frac{\partial^2\hat{q}}{\partial n'\,\partial s}\mu_3(s')\,ds'+\int_a\frac{Q(s,s')-Q(s,s)}{s-s'}\mu_3(s')\,ds'-$$

$$-Q(s,s)\left[\mu_3(b)\ln(b-s)-\mu_3(a)\ln(s-a)\right]+Q(s,s)\int_a^b\mu_3'(s')\ln|s'-s|\,ds'+$$

$$+\int_a^b\frac{Q(s,s')}{s+s'}\,ds'+\int_a^b V(s,s')\,\mu_3(s')\,ds'\quad(a<s<b).\tag{27}$$

Примем в дальнейшем, что

$$a=\frac{s_1}{2},\quad b=\frac{3s_1}{2},\quad \delta=s_2-s_1<\frac{s_1}{4}.\tag{28}$$

Отметим, что при $\frac{s_1}{2}<s'<\frac{3s}{2}$

$$\frac{Q(s,s')-Q(s,s)}{s'-s}=\int_0^1 Q_{s'}(s;\,s+(s'-s)\,t)\,dt=\frac{O(1)}{y_1},\tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{Q(s,s')-Q(s,s)}{s'-s}=\int_0^1\left[Q_{s',s}(s;\,s+(s'-s)\,t)+\right.$$

$$\left.+(1-t)\,Q_{s',s'}(s;\,s+(s'-s)\,t)\right]dt=\frac{O(1)}{y_1^2},\tag{29a}$$

$$\left.\frac{Q(s,s')-Q(s,s)}{s'-s}\right|_{s_1}^{s_2}=\int_{s_1}^{s_2}\frac{Q(s,s')-Q(s,s)}{s'-s}\,ds=\frac{O(1)}{y_1^2}\,|s_2-s_1|=$$

$$=\frac{O(1)}{y_1^{1+\varepsilon}}\,|s_2-s_1|^{\varepsilon},\tag{29b}$$

а при $|s'-s_1|>\frac{s_1}{2}$

$$\left.\frac{\partial^2\hat{q}}{\partial s\,\partial n'}\right|_{s_1}^{s_2}=\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial^3\hat{q}}{\partial s^2\,\partial n'}\,ds=\frac{O(1)}{y_1^{4/3}}\cdot\underbrace{\int_{s_1}^{s_2}(s+s')^{-1-\varepsilon}\,ds}_{c\frac{(s_2+s')^{\varepsilon}(s_1+s')^{\varepsilon}}{(s_1+s')^{\varepsilon}(s_2+s')^{\varepsilon}}=O(1)\frac{(s_2-s_1)^{\varepsilon}}{(s_1+s')^{2\varepsilon}}}+$$

$$+\frac{O(1)}{y_1^{4/3}}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{|s-s'|}+\frac{O(1)}{y_1^{1/3}}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{(s-s')^2}=\frac{O(1)}{y_1^{4/3}}\frac{(s_2-s_1)^{\varepsilon}}{(s_1+s')^{2\varepsilon}}.\tag{30}$$

Далее, имеем

$$\left.\begin{aligned}&\left.Q(s,s)\ln\left(\frac{3s_1}{2}-s\right)\right|_{s_1}^{s_2}=O(1)\,\frac{s_2-s_1}{y_1^{1+\varepsilon}},\\&\left.Q(s,s)\ln\left(s-\frac{s_1}{2}\right)\right|_{s_1}^{s_2}=O(1)\,\frac{s_2-s_1}{y_1^{1+\varepsilon}},\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

$$\int_{\frac{s_1}{2}}^{\frac{3s_1}{2}}\mu_3'(s')\ln|s'-s|\Big|_{s_1}^{s_2}ds'=\left(\int_{\frac{s_1}{2}}^{s_1-\delta}+\int_{s_2+\delta}^{3s_1+\delta}\right)\mu_3'(s')\ln|s'-s|\Big|_{s_1}^{s_2}ds'+$$

$$+\int_{s_1-\delta}^{s_2+\delta}\mu_3'(s')\ln|s'-s|\Big|_{s_1}^{s_2}ds'=O(1)\left(\int_{\frac{s_2}{2}}^{s_1-\delta}+\int_{s_2+\delta}^{\frac{3s_1}{2}}\right)y'^{-\frac{1}{3}}\frac{|s_2-s_1|}{|s'-s_1|}ds'+$$

$$+O(1)\int_{s_1-\delta}^{s_2+\delta}y'^{-\frac{1}{3}}\ln|s'-s_1|ds'+O(1)\int_{s_1-\delta}^{s_2+\delta}y'^{-\frac{1}{3}}\ln|s'-s_2|ds'=$$

$$=\frac{O(1)}{y_1^{1/3}}|s_2-s_1|^{\varepsilon},\tag{32}$$

$$\frac{Q(s,s')}{s+s'}=\frac{1}{s+s'}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial Q}{\partial s}ds-Q\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{(s+s')^2}=$$

$$=\frac{O(1)(s_2-s_1)}{y_1^2}=O(1)\frac{(s_2-s_1)^{\varepsilon}}{y_1^{1+\varepsilon}},\tag{33}$$

$$\int_{\frac{s_1}{2}}^{\frac{3s_1}{2}}V(s,s')\Big|_{s_1}^{s_2}\mu_3(s')ds'=\left(\int_{\frac{s_1}{2}}^{s_1-\delta}+\int_{s_1+\delta}^{\frac{3s_1}{2}}\right)\left(\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial V}{\partial s}ds\right)ds'+$$

$$+\int_{s_1-\delta}^{s_2+\delta}V(s,s')\Big|_{s_1}^{s_2}ds'=$$

$$=O(1)\left(\int_{\frac{s_2}{2}}^{s_1-\delta}+\int_{s_2+\delta}^{\frac{3s_1}{2}}\right)\left[\frac{1}{y_1^2}|s'-s_1|^{1-\varepsilon'}+1\quad s'-s_1|^{-\varepsilon'}\right]ds'+$$

$$+\frac{O(1)}{y_1}|s_2-s_1|^{1-\varepsilon'}=O(1)\frac{|s_2-s_1|^{\varepsilon}}{y_1}.\tag{34}$$

Полученные уравнения (27) — (34) дают, таким образом:

$$\mu_4'(s_2)-\mu_4'(s_1)=O(1)\frac{|s_2-s_1|^{\varepsilon}}{y_1^{4/3}},\tag{35}$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА IV. *Если $\mu_4(s)$ удовлетворяет условиям* (17) *и* (25), *то функция*

$$\mu_5(s)=\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial n'}\mu_4(s')ds'\tag{36}$$

обладает второй производной, удовлетворяющей оценке

$$\mu_5''(s)=\frac{O(1)}{y_1^{4/3}}.\tag{37}$$

Для доказательства заметим, что $\mu_5'(s)$ может быть выражено через $\mu_4(s)$ посредством формулы (27). Поскольку $\mu_4'(s)$ удовлетворяет условию Hölder'а, то формула (27) допускает формальное дифференцирование; при этом действительно получается вторая производная $\mu_5''(s)$, что доказывается аналогично доказательству дифференцируемости $\mu_3(s)$. В формуле (27) положим

$$a=\frac{\bar{s}}{2}=\frac{s}{2},\qquad b=\frac{3\bar{s}}{2}=\frac{3s}{2},\tag{38}$$

считая эти пределы постоянными, не меняющимися при дифференцировании.

Учтем, что при $|s'-s|>\frac{s}{2}$

$$\frac{\partial^3\hat{q}}{\partial s^2\,\partial n'}=\frac{O(1)}{y^{4/3}(s+s')^{\varepsilon}}+\frac{O(1)}{y(s+s')}+\frac{O(1)}{(s+s')^2}\ {}^*; \tag{39}$$

при $|s'-s|<\frac{s}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{Q(s,s')-Q(s,s)}{s'-s}=\frac{O(1)}{y^2}, \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left[Q(s,s)\ln\left(\frac{3s}{2}-s\right)\right]&=\frac{O(1)}{y}[|\ln y|+1],\\ \frac{\partial}{\partial s}\left[Q(s,s)\ln\left(s-\frac{s}{2}\right)\right]&=\frac{O(1)}{y}[|\ln y|+1],\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\mu_4'(s')\,ds'}{s'-s}=\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\mu_4'(s')-\mu_4'(s)}{s'-s}\,ds'=\frac{O(1)}{y^{4/3}}\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}|s'-s|^{\varepsilon-1}=\frac{O(1)}{y^{4/3-\varepsilon}}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{Q(s,s')}{s+s'}=\frac{O(1)}{y^2}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}V(s,s')=\frac{O(1)}{y^2}[|\ln|s'-s||+1]+\overbrace{\frac{T(s,s')-T(s,s)}{s-s'}}^{\frac{O(1)}{y^2}}+\overbrace{\frac{T(s,s)}{s-s'}}^{\frac{O(1)}{y}\cdot\frac{1}{s-s'}}, \tag{44}$$

$$\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\mu_4(s')}{s'-s}\,ds'=\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\mu_4(s')-\mu_4(s)}{s'-s}\,ds'=O(1)\,y^{\varepsilon}. \tag{45}$$

Отсюда

$$\mu_5''(s)=\frac{O(1)}{y^{4/3}}, \tag{46}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, из теорем I—IV следует, что любое решение однородного уравнения

$$\bar{\mu}(s)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\mathfrak{S}}\bar{\mu}(s')\frac{\partial\hat{q}}{\partial n'}\,ds'=0 \tag{47}$$

должно удовлетворять оценкам

$$\bar{\mu}'(s)=\frac{O(1)}{s^{1/3}(\mathfrak{S}-s)^{1/3}},\qquad \bar{\mu}''(s)=\frac{O(1)}{s^{4/3}(\mathfrak{S}-s)^{4/3}}. \tag{48}$$

Перейдем, наконец, к доказательству оценок для функций

$$\bar{z},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},$$

где

$$\bar{z}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\mathfrak{S}}\hat{q}_{n'}\,\bar{\mu}(s')\,ds'. \tag{49}$$

---

* См. (9.6).

Пусть

$$\hat{q}_{n'} = \hat{q}_{n'1} + \hat{q}_{n'2}, \tag{50}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \hat{q}_{n'1} &= \frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\right]\ln\sigma + \frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} H(\sigma)\right], \\ \hat{q}_{n'2} &= \left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\,\frac{\partial \ln\sigma}{\partial n'}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Соответственно

$$\bar{z} = \bar{z}_1 + z_2, \tag{52}$$

где

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{S}} \hat{q}_{n'1}\bar{\mu}(s')\,ds', \quad \bar{z}_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{S}} \hat{q}_{n'2}\bar{\mu}(s')\,ds'. \tag{52a}$$

Подробное вычисление показывает, что

$$\hat{q}_{n'1} = O(1)\,\frac{1+|\ln\rho|}{\rho_1}, \tag{53}$$

откуда

$$\bar{z}_1 = O(1)\int_0^{\mathfrak{S}} \frac{1+|\ln\rho|}{\rho_1}\,ds' = O(1)(1+|\ln R|)\overbrace{\left(\int_0^{\frac{s}{2}} + \int_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}}\right)\frac{ds'}{\rho_1}}^{O(1)(1+|\ln R|)} +$$

$$+\frac{O(1)}{R}\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} |\ln|s'-s||\,ds' = O(1)(1+|\ln R|^2). \tag{54}$$

Если φ' — угол, под которым виден отрезок (s, s') дуги L и φ_1' — угол, под которым виден зеркально отображенный отрезок, то

$$\bar{z}_2 = 2\int\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\bar{\mu}(s')\,d\varphi' - 2\int\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\bar{\mu}(s')\,d\varphi_1' = O(1). \tag{55}$$

Итак,

$$\bar{z} = O(1)(1+|\ln R|^2). \tag{56}$$

Для оценки $\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial x}$, $\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial y}$ отметим, что

$$\left.\begin{aligned} \hat{q}_{n'x1} &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{q}_{n'1} = \hat{q}_{n'x11} + \hat{q}_{n'x12}, \\ \hat{q}_{n'y1} &= \frac{\partial}{\partial y}\hat{q}_{n'1} = \hat{q}_{n'y11} + \hat{q}_{n'y12}, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \hat{q}_{n'x11} &= \frac{\partial^2}{\partial n'\partial x}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\right]\ln\sigma + \frac{\partial^2}{\partial n'\partial x}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} H(\sigma)\right], \\ \hat{q}_{n'x12} &= \frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\sigma}{\partial x}, \\ \hat{q}_{n'y11} &= \frac{\partial^2}{\partial n'\partial y}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\right]\ln\sigma + \frac{\partial^2}{\partial n'\partial y}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} H(\sigma)\right], \\ \hat{q}_{n'y12} &= \frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\sigma}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{57a}$$

Подробное вычисление показывает, что

$$\left.\begin{aligned}\hat{q}_{n'x11} &= \frac{O(1)}{\rho_1^2}(1+|\ln\rho|),\\ \hat{q}_{n'y11} &= \frac{O(1)}{\rho_1^{5/3}y^{1/3}}(1+|\ln\rho|).\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Если теперь ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned}\bar{z}_{x11} &= \frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{S}} \hat{q}_{n'x11}\bar{\mu}(s')\,ds',\\ \bar{z}_{y11} &= \frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{S}} \hat{q}_{n'y11}\bar{\mu}(s')\,ds',\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

то получим

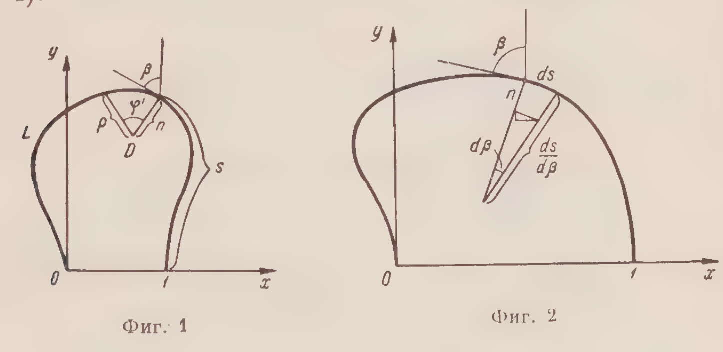
$$\bar{z}_{x11} = O(1)(1+|\ln R|)\left(\int_0^{\frac{s}{2}} + \int_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}}\right)\frac{ds'}{\rho_1^2} +$$

$$+\frac{O(1)}{R^2}\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} \ln|s'-s|\,ds' = O(1)\,\frac{1+|\ln R|}{R} \tag{60}$$

и аналогично

$$\bar{z}_{y11} = O(1)\,\frac{1+|\ln R|}{y^{1/3}R^{2/3}}. \tag{61}$$

Введем в дальнейшем вместо координат x, y координаты s, n (фиг. 1).



Фиг. 1 Фиг. 2

Тогда (фиг. 2)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x} = \cos\beta\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\sin\beta}{1-n\dfrac{d\beta}{ds}}\cdot\frac{\partial}{\partial s}, \tag{62}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\cos\beta}{1-n\dfrac{d\beta}{ds}}\cdot\frac{\partial}{\partial s} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial n}, \tag{63}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\hat{q}_{n'x12} &= \frac{\sin\beta}{1-n\dfrac{d\beta}{ds}}\hat{q}_{n's12}+\cos\beta\,\hat{q}_{n'n12},\\ \hat{q}_{n'y12} &= \frac{\cos\beta}{1-n\dfrac{d\beta}{ds}}\hat{q}_{n's12}-\sin\beta\,\hat{q}_{n'n12},\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\hat{q}_{n's12} &= \frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\sigma}{\partial s},\\ \hat{q}_{n'n12} &= \frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\sigma}{\partial n}.\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Соответственно введем обозначения

$$\left.\begin{aligned}\bar{z}_{s12} &= \frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{S}}\hat{q}_{n's12}\bar{\mu}(s')\,ds',\\ \bar{z}_{n12} &= \frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{S}}\hat{q}_{n'n12}\bar{\mu}(s')\,ds'.\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Учтем теперь, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\ln\rho^2}{\partial n} &= 2\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{n}{n^2+(s'-s)^2}+O(1),\\ \frac{\partial\ln\rho^2}{\partial s} &= \frac{s-s'}{n^2+(s'-s)^2}+O(1),\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$\frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right] = \frac{O(1)}{\rho_1}, \tag{68}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s'\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right] = \frac{O(1)}{y^{2/3}\rho_1^{4/3}} \quad \text{при} \quad \frac{s}{2}<s'<\frac{3s}{2}. \tag{69}$$

Тогда

$$\bar{z}_{n12} = -\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\rho_1^2}{\partial n}\bar{\mu}(s')\,ds' +$$

$$+\left(\int_0^{\frac{s}{2}}+\int_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}}\right)\frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\rho^2}{\partial n}\bar{\mu}(s')\,ds' +$$

$$+\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\rho^2}{\partial n}\mu(s')\,ds' =$$

$$= O(1)\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{ds'}{\rho_1^2}+O(1)\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{ds'}{\rho_1^2}+\frac{O(1)}{R}\int_{s'=\frac{s}{2}}^{s'=\frac{3s}{2}}d\operatorname{arctg}\frac{s'-s}{n}+$$

$$+\frac{O(1)}{R}\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}ds = \frac{O(1)}{R}, \tag{70}$$

$$z_{s12}=-\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\rho_1^2}{\partial s}\overline{\mu}(s')\,ds'+$$

$$+\left(\int_0^{\frac{s}{2}}+\int_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}}\right)\frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial\ln\rho^2}{\partial s}\mu(s')\,ds'-$$

$$-\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\partial}{\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{(s'-s)^2}{n^2+(s'-s)^2}\overline{\mu}'(s^*)\,ds'-$$

$$-\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\partial^2}{\partial s'\,\partial n'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]_{s'=s^{**}}\frac{(s'-s)^2}{n^2+(s'-s)^2}\mu(s')\,ds', \tag{71}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&s<s^*<s' \quad\text{или}\quad s'<s^*<s;\\&s<s^{**}<s' \quad\text{или}\quad s'<s^{**}<s.\end{aligned}\right\} \tag{71a}$$

Заметим, что $\frac{(s'-s)^2}{n^2+(s'-s)^2}$ является возрастающей функцией $|s'-s|$, так что

$$\frac{(s'-s)^2}{n^2+(s'-s)^2}=O(1)\frac{y^2}{R^2} \tag{72}$$

и

$$\overline{z}_{s12}=O(1)\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{ds'}{\rho_1^2}+O(1)\int_0^{\mathfrak{S}}\frac{ds'}{\rho_1^2}+\frac{O(1)}{R}\frac{y^2}{R^2}\frac{y}{y^{1/3}}+\frac{O(1)}{R^{1/3}y^{2/3}}\frac{y^2}{R^2}=\frac{O(1)}{R}. \tag{73}$$

Так как

$$\left.\begin{aligned}\overline{z}_{x12}&=\frac{\sin\beta}{1-n\dfrac{d\beta}{ds}}\overline{z}_{s12}+\cos\beta\,\overline{z}_{n12},\\\overline{z}_{y12}&=\frac{\cos\beta}{1-n\dfrac{d\beta}{ds}}\overline{z}_{s12}-\sin\beta\,\overline{z}_{n12},\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

то из уравнений (70) и (73) следует

$$\left.\begin{aligned}z_{x12}&=\frac{O(1)}{R},\\\overline{z}_{y12}&=\frac{O(1)}{R}.\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

И, наконец, формулы (60), (61) и (75) дадут

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\overline{z}_1}{\partial x}&=O(1)\frac{1+|\ln R|}{R},\\\frac{\partial\overline{z}_1}{\partial y}&=O(1)\frac{1+|\ln R|}{y^{1/3}R^{2/3}}.\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Чтобы оценить производные $\frac{\partial \overline{z_2}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \overline{z_2}}{\partial y}$, выразим их посредством формул (62) и (63) через $\frac{\partial \overline{z}_2}{\partial n}$ и $\frac{\partial \overline{z}_2}{\partial s}$.

Оценим сперва $\frac{\partial \overline{z}_2}{\partial n}$:

$$\frac{\partial \overline{z}_2}{\partial n}=\left(\int\limits_0^{\frac{s}{2}}+\int\limits_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial \ln \rho^2}{\partial n'}\,\mu(s')\,ds'+$$

$$+2\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\overline{\varphi}}^{\overline{\overline{\varphi}}}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\,\overline{\mu}(s')\,d\varphi'-\int\limits_0^{\mathfrak{S}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\frac{\partial \ln \rho_1^2}{\partial n'}\,\overline{\mu}(s')\,ds', \quad (77)$$

где $\overline{\varphi}$, $\overline{\overline{\varphi}}$ — значения φ', соответствующие $s'=\frac{s}{2}$ и $s'=\frac{3s}{2}$.

Первый и третий интегралы правой части уравнения (77) оцениваются как $\frac{O(1)}{R}$. Для второго получим выражение

$$\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\overline{\varphi}}^{\overline{\overline{\varphi}}}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\,\overline{\mu}(s')\,d\varphi'=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\,\overline{\mu}(s')\,\frac{d\varphi'}{dn}\Bigg|_{s'=\frac{s}{2}}^{s'=\frac{3s}{2}}+$$

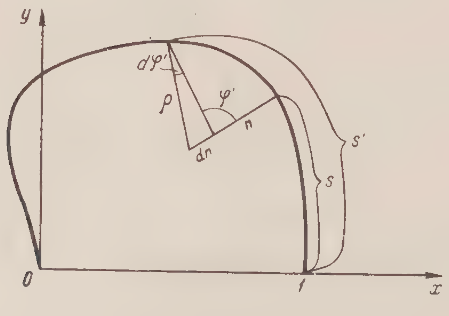
$$+\int\limits_{\overline{\varphi}}^{\overline{\overline{\varphi}}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\overline{\mu}(s')\,d\varphi'+$$

$$+\int\limits_{\overline{\varphi}}^{\overline{\overline{\varphi}}}\frac{\partial}{\partial s'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\overline{\mu}(s')\,\frac{ds'}{dn}\Bigg|_{\varphi'=\mathrm{const}}d\varphi'+$$

$$+\int\limits_{\overline{\varphi}}^{\overline{\overline{\varphi}}}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\,\overline{\mu}'(s')\,\frac{ds'}{dn}\Bigg|_{\varphi'=\mathrm{const}}d\varphi'. \quad (78)$$

Имеем (фиг. 3)

$$\left|\frac{d\varphi'}{dn}\right|_{s'=\mathrm{const}}=-\frac{\sin\varphi'}{\rho}. \quad (79)$$



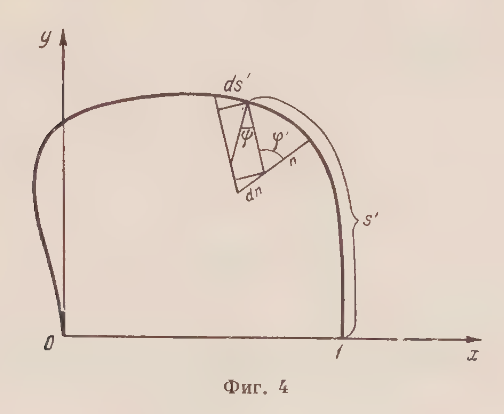
Фиг. 3

Следовательно, первый член правой части уравнения (78) оценивается как $\frac{O(1)}{R}$. То же относится ко второму члену.

Далее (фиг. 4)

$$\left.\frac{ds'}{dn}\right|_{\varphi'=\mathrm{const}}=\frac{\sin\varphi'}{\cos\psi}, \tag{80}$$

$$\frac{ds'}{dn}\,d\varphi'=\frac{\sin\varphi'}{\cos\psi}\,\frac{\cos\psi}{\rho}\,ds'=\left[\frac{s'-s}{n^2+(s'-s)^2}+O(1)\right]ds'. \tag{81}$$



Фиг. 4

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\,\bar{\mu}(s')\,d\varphi'=\frac{O(1)}{R}+\frac{O(1)}{R}+$$

$$+\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{\partial}{\partial s'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]\bar{\mu}(s')\right\}\Bigg|_{s'=s}\frac{(s'-s)^2}{n^2+(s'-s)^2}\,ds'+$$

$$+O(1)\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{ds'}{\rho_1}+\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}\frac{\partial}{\partial s'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\,\bar{\mu}'(s')\right]\frac{(s'-s)^2}{n^2+(s'-s)^2}\,ds'+\frac{O(1)}{y^{1/3}}\int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}}ds'. \tag{82}$$

Но

$$\frac{\partial^2}{\partial s'^2}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\right]=\frac{O(1)}{y^{5/2}\rho_1^{1/3}}=\frac{O(1)}{y^{5/3}R^{1/3}}\quad\text{при}\quad\frac{s}{2}<s'<\frac{3s}{2}, \tag{83}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}F(\sigma)\,\bar{\mu}(s')\,d\varphi'=\frac{O(1)}{R}+\frac{O(1)}{R^{1/3}y^{5/3}}\frac{y^2}{R^2}\cdot y+$$

$$+\frac{O(1)}{R^{1/3}y^{2/3}}\frac{1}{y^{1/3}}\cdot\frac{y^2}{R^2}\cdot y+O(1)\left(|\ln R|+1\right)+\frac{O(1)}{y^{1/3}}\cdot\frac{1}{y^{2/3}R^{1/3}}\frac{y^2}{R^2}\cdot y+$$

$$+\frac{O(1)}{y^{4/3}}\cdot\frac{y^2}{R^2}\cdot y+O(1)\,y^{\frac{2}{3}}=\frac{O(1)}{R}. \tag{84}$$

Таким образом, из уравнений (77) и (84) следует

$$\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial n} = \frac{O(1)}{R}. \tag{85}$$

Перейдем к оценке $\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial s}$:

$$\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial s} = \left(\int_0^{\frac{s}{2}} + \int_{\frac{3s}{2}}^{\mathfrak{S}}\right) \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\frac{\partial \ln \sigma}{\partial n'}\right]\bar{\mu}(s')\,ds' +$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\bar{\varphi}}}\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\bar{\mu}(s')\,d\varphi' = \frac{O(1)}{R} + \left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\bar{\mu}(s')\frac{d\varphi'}{ds}\Bigg|_{s'=\frac{s}{2}}^{s'=\frac{3s}{2}} +$$

$$+\int_{\varphi}^{\bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\right]\bar{\mu}(s')\,d\varphi' +$$

$$+\int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial s'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\bar{\mu}(s')\right]\frac{ds'}{ds}\Bigg|_{\varphi'=\mathrm{const}} d\varphi'. \tag{86}$$

Имеем

$$\frac{d\varphi'}{ds}\Bigg|_{s'=\mathrm{const}} = \left(1 - n\frac{d\beta}{ds}\right)\frac{\cos\varphi'}{\rho}, \tag{87}$$

$$\frac{ds'}{ds}\Bigg|_{\varphi'=\mathrm{const}} = \left(1 - n\frac{d\beta}{ds}\right)\frac{\cos\varphi'}{\cos\psi} \tag{88}$$

$$\frac{ds'}{ds}\Bigg|_{\varphi'=\mathrm{const}} d\varphi' = \left(1 - n\frac{d\beta}{ds}\right)\frac{\cos\varphi'}{\rho}\,ds' =$$

$$= \left[\frac{n}{n^2 + (s'-s)^2} + O(1)\right] ds', \tag{88a}$$

$$\bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi} = O(1)\frac{y}{R}. \tag{89}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial s} = \frac{O(1)}{R} + \frac{O(1)}{R} + \frac{y}{y^{1/3}R^{2/3}}\cdot\frac{y}{R} +$$

$$+\left(1 - n\frac{d\beta}{ds}\right)\int_{s'=\frac{s}{2}}^{s'=\frac{3s}{2}} \frac{\partial}{\partial s'}\left[\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} F(\sigma)\bar{\mu}(s')\right]\left[O(1)\,ds' + d\,\mathrm{arctg}\,\frac{s'-s}{n}\right] =$$

$$= \frac{O(1)}{R} + \frac{O(1)}{y^{2/3}R^{1/3}}\cdot\frac{y}{R} = \frac{O(1)}{R}. \tag{90}$$

Из уравнений (62), (63), (85) и (90) получаем теперь искомые оценки производных

$$\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial x} = \frac{O(1)}{R}, \quad \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial y} = \frac{O(1)}{R}. \tag{91}$$

Наконец, уравнения (76) и (91) дают

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} &= O(1)\frac{1 + |\ln R|}{R}, \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} &= O(1)\frac{1 + |\ln R|}{R^{2/3}y^{1/3}}. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Итак, выведены все оценки, при помощи которых в предыдущем параграфе было доказано, что $\bar{\mu}(s)=O$.

Далее, на основании теорем I—IV, легко показать, что оценки, выведенные первоначально для $\bar{\mu}$ и $\bar{z}$, имеют место также для μ и

$$z=\frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{S}} \hat{q}_{n'}\,\mu(s')\,ds',$$

откуда следует, что $z(x, y)$ принадлежит к классу тех решений, для которых доказана теорема единственности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О некоторых частных решениях уравнения

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Приведем примеры решений уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, опровергающие три ошибочные теоремы, содержащиеся в статье Трикоми (2).

Первая из этих теорем [(2), § 2] гласит:

Решение уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ *не может оставаться ограниченным в окрестности изолированной эффективно особой точки, принадлежащей к оси* x.

Трикоми называет точку «эффективно особой», если ее нельзя превратить в регулярную, изменяя значение функции только в этой точке. При этом Трикоми заранее ограничивается рассмотрением полуплоскости $y>0$; в этом смысле и понимается изолированность особой точки.

Теорема опровергается примером функции

$$z=T^*\left(\frac{4}{9}\frac{y^3}{x^2}\right),\ *$$

где

$$T^*(t)=\int_0^t \frac{ds}{s^{2/3}(1+s)^{5/6}}\quad\left(=2\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sin^{1/3}\theta},\ \theta=\operatorname{arctg}\sqrt{t}\right),$$

В самом деле, для этой функции

$$z=0 \text{ при } y=0,\ x>0 \text{ и}$$

$$z=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \text{ при } y=0,\ x<0,$$

а во всех остальных точках полуплоскости $y\geqslant 0$ значение z лежит между двумя указанными.

Производные $\frac{\partial z}{\partial y}$ конечны и непрерывны вдоль всей оси x, за исключением начала координат. Действительно,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{9\cdot 4^{1/3}}{x^{2/3}},$$

* Эта функция была дана Трикоми [(2), § 3] в связи с другим вопросом.

Ошибка может быть исправлена, если к предпосылкам теоремы прибавить требование, чтобы в упомянутой изолированной особой точке функция $z(x, 0)$ оставалась непрерывной. Тогда доказательство Трикоми останется в силе.

Что касается двух остальных теорем, то, повидимому, даже при уточнении предпосылок они остаются ошибочными.

Вторая теорема [(2), § 2] гласит:

Пусть дано решение z уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ $(y \geqslant 0)$, регулярное в окрестности начала координат, которое расходится в этой точке (т. е. при любом приближении к этой точке стремится либо к $+\infty$, либо к $-\infty$). Тогда

$$z=z_0+a\rho^{-\frac{1}{3}} \quad \left(\rho=\sqrt{x^2+\frac{4}{9}y^3}\right),$$

где a — постоянная и z_0 — функция, регулярная в начале координат, если только функция $\nu(x)=z_y(x, 0)$ интегрируема в окрестности точки $x=0$.

Это утверждение опровергается примером функции

$$z=\rho^{-\frac{1}{6}} F\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right]. \, {}^*$$

Это решение расходится в начале координат, но не может быть представлено в виде $z=z_0+a\rho^{-\frac{1}{3}}$. На оси x $(x \neq 0)$ оно остается регулярным, так как

$$z=\frac{2}{\sqrt{3}}x^{-\frac{1}{6}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2\pi}{3^{1/6}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}x^{-\frac{5}{6}} \quad \text{при} \quad x>0,$$

$$z=(-x)^{-\frac{1}{6}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad x<0.$$

Функция $\nu(x)$, как легко видеть, интегрируема в окрестности точки $x=0$.

Третья теорема [(2), § 4] гласит:

Необходимым и достаточным условием существования решения задачи Коши для уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ в области $y \geqslant 0$, $x^2+\frac{4}{9}y^3<1$ является аналитичность функции

$$f_1(x_0)=\tau(x_0)+\gamma\int_{-1}^{1}\left[|x-x_0|^{-\frac{1}{3}}-(1-xx_0)^{-\frac{1}{3}}\right]\nu(x)\,dx$$

на отрезке $y=0$, $-1<x<1$, где

$$\tau(x)=z(x, 0), \quad \nu(x)=z_y(x, 0), \quad \gamma=\frac{3^{\frac{2}{3}}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{4\pi^2}.$$

---

* Пример взят из серии решений уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ основного мемуара Трикоми [(1), гл. III, § 4].

В действительности это условие необходимо, но *не достаточно*, как легко установить на примере приведенного нами фундаментального решения

$$q=\left(\frac{2y'}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\bar{F}\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6};\ 1;\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)$$

при $y'=\frac{1}{2}$; $x'=0$.

Считаю необходимым сделать к моим предыдущим работам некоторые исправления и дополнения.

В работе «О задаче Коши», 8 (1944), 195—224.

Формула (10) на стр. 197 должна быть заменена следующей

$$y'=\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^y\sqrt{f(y)}\,dy\right)^{2/3}. \tag{10}$$

В (120) на стр. 218, а также в (120 a)—(120 f) на стр. 219 следует заменить множитель $(\mu-\lambda)^{-2/3}$ через $(\mu-\lambda)^{-1/3}$, а показатели степени разности $\mu_0-\lambda_0$ уменьшить на $^1/_3$.

В работе «К теории сопел Лаваля», 9 (1945), 387—422.

В (15) и (16) на стр. 416 следует слагаемое $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ заменить на $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. В соответствии с этим в (19) на стр. 416, (5), (5a), (8), (8a) на стр. 417 множитель $\sqrt{3}$ стоит не в числителе, а в знаменателе. В (3) на стр. 416 следует переменить знаки первых членов правых частей. Функция $\lambda(\xi)$ (§ 6, (14)) может быть выражена через бесселевы функции (см. ([8])):

$$\lambda(\xi)=\frac{3^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi}K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\,\xi^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\xi}\,.$$

Как мне указал С. В. Фалькович (см. также в книге ([9]) стр. 58), гипергеометрическая функция $F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};t\right)$ является алгебраической:

$$F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};t\right)=\cos\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{t}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{-t}+\sqrt{1-t})^{\frac{2}{3}}+(\sqrt{-t}+\sqrt{1-t})^{-\frac{2}{3}}\right];$$

в связи с этим выводы параграфов 3 и 4 могут быть существенно упрощены.

Поступило
4. X. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Tricomi F., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto, Memorie della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, (V), t. XIV, 1923.

[2] Tricomi F., Ulteriori ricerche sull'equazione $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, LII, 1928.

[3] Tricomi F., Ancora sull'equazione $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, VI, 1927.

[4] Holmgren E., Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 19 B, 1926.
[5] Гурса Э., Курс математического анализа, М. — Л., 1933,
[6] Уиттекер-Ватсон, Курс современного анализа, М. — Л., 1933.
[7] Gellerstedt S., Sur un probèlme aux limites pour une équation linéaire aux derivées partielles du second ordre de type mixte, Uppsala, 1935.
[8] Фок В. А., Таблицы функций Эйри, Москва, 1946.
[9] Kampé de Fériet J., La fonction hypergéométrique, Paris, 1937.

F. FRANKL. ON THE THEORY OF THE EQUATION

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

SUMMARY

In this paper we solve two boundary problems for the equation

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

which we call Darboux-Tricomi's equation after the authors who dealt with it.

The solutions are sought on a domain lying within the semi-plane $y > 0$, where the equation (1) is elliptique. The boundary of the domain is supposed to coincide with the x-axis somewhere. As to the part of the boundary that lies within the semi-plane $y > 0$ it is supposed to be sufficiently smooth and to approach the x-axis normally.

The following boundary problem are here considered:

1°. Dirichlet's problem.

2°. The problem in which the values of the unknown function are given on the part of boundary lying within the semi-plane $y > 0$, while the normal derivatives are given on the part of the boundary which coincides with the x-axis.

These problems were already considered by F. Tricomi in (¹), as well as in the papers (²) and (³), with the use of considerably complicated methods: the author either used Schwarz's alternating method or passed to the limit having proceeded from the domains lying, together with their boundaries, within the semi-plane $y > 0$. In both cases Tricomi used two-dimensional integral equations of Fredholm's type.

The second problem was solved by S. Gellerstedt (⁷) by reducing it to one-dimensional Fredholm equations of the 2nd kind. Gellerstedt, however, assumed that the ends of the curve L (see Fig. 1) coincided with arcs of a certain algebraic curve which Tricomi called «normal curve». In this paper we remove this restriction by means of some suitable estimates in both problems in question.

In Appendix we give three particular solutions of the equation (¹) which refute some false assertions by Tricomi in (²).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 167—184 Série mathématique

Н. ДМИТРИЕВ и Е. ДЫНКИН

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

(Представлено академиком **А. Н. Колмогоровым**)

Изучается распределение на комплексной плоскости характеристических корней стохастических матриц порядка n. Получаемые результаты могут быть истолкованы как теоремы об относительном расположении характеристических корней произвольной матрицы с неотрицательными членами.

§ 1. Постановка задачи

1. Стохастические матрицы возникают в теории вероятностей, точнее, в теории цепей Маркова. Пусть некоторая система может находиться в одном из состояний $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$. Пусть, находясь в некоторый момент в состоянии $\mathcal{E}_i$, она переходит по истечении единицы времени в состояние $\mathcal{E}_j$ с вероятностью, равной a_{ij}. Числа a_{ij}, определяющие цепь Маркова, подчинены условиям:

1° $a_{ij} \geqslant 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$,

2° $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Матрица A, элементы a_{ij} которой удовлетворяют этим двум условиям, называется *стохастической*.

Из теории марковских цепей возник поставленный А. Н. Колмогоровым вопрос об определении совокупности M_n всех комплексных чисел λ, являющихся характеристическими корнями стохастических матриц порядка n. Изучению этого вопроса посвящена настоящая заметка.

2. Наша задача допускает другую, геометрическую, формулировку. Для того чтобы λ принадлежало M_n, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых $a_{ij} \geqslant 0$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \; (i = 1, 2, \ldots, n)$, и некоторых комплексных чисел x_i (среди которых есть отличные от нуля) выполнялись равенства

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Но эти равенства выражают условия того, что многоугольник, представляющий собой выпуклую оболочку точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, переходит

в свою часть при умножении на число λ*. Таким образом $\lambda \in M_n$ тогда и только тогда, когда некоторый выпуклый k-угольник Q $(k \leqslant n)$, не состоящий из одной точки O, при умножении на λ переходит в свою часть. Ясно, что это возможно только тогда, когда $|\lambda| \leqslant 1$, ибо в противном случае площадь многоугольника Q при умножении на λ увеличивается. Таким образом, M_n содержится в круге радиуса 1 с центром в точке 0. Непосредственно очевидно также, что $M_n \subset M_{n+1}$.

3. Назовем многоугольник Q *циклическим, порожденным* μ, если Q — выпуклая оболочка точек $1, \mu, \ldots, \mu^n, \ldots$ Примером циклического многоугольника может служить правильный n-угольник с вершинами в точках $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$. Он порождается точкой $e^{i\frac{2\pi p}{n}}$ для любого p, взаимно простого с n.

Легко видеть, что произведение двух точек циклического многоугольника — снова точка этого многоугольника; поэтому если $\lambda \in Q$, то $\lambda Q \subset Q$. Следовательно, M_n содержит все циклические k-угольники для $k \leqslant n$. Можно предположить, что никаких других точек M_n не содержит. Все полученные нами результаты подтверждают эту гипотезу. В частности, она полностью доказана нами для $n \leqslant 5$.

§ 2. Основная теорема

4. Если $\lambda Q \subset Q$ и $0 < \alpha < 1$, то $\alpha\lambda Q \subset \lambda Q \subset Q$; поэтому если $\lambda \in M_n$, то и $\alpha\lambda \in M_n$. Кроме того, как легко видеть, M_n — замкнутое множество. В силу этого для определения M_n достаточно найти числа λ из M_n, для которых $\beta\lambda \bar{\in} M_n$ при любом $\beta > 1$. Такие λ мы будем называть *экстремальными*.

В § 2 мы докажем условие, необходимое для того, чтобы число λ было экстремальным. Мы дадим три эквивалентные формулировки этого условия: геометрическую, алгебраическую и теоретико-вероятностную.

5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть экстремальное число λ принадлежит $M_n - M_{n-1}$. Пусть $2\pi \cdot \frac{p}{n} \leqslant \arg \lambda \leqslant 2\pi \cdot \frac{p+1}{n}$.*

5.1. *Если выпуклый n-угольник Q содержит λQ и если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вершины Q, занумерованные по порядку при обходе контура Q против часовой стрелки, то*

$$\lambda x_k = \alpha_k x_{k+p} + \beta_k x_{k+p+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha_k \geqslant 0, \quad \beta_k \geqslant 0, \quad \alpha_k + \beta_k = 1.$$

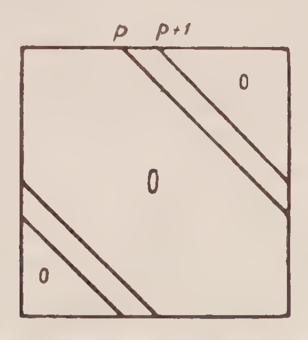
(Индексы приводятся по модулю n)**.

5.2. *Если стохастическая матрица A порядка n имеет λ характе-*

* Заметим, что при обычной геометрической интерпретации комплексных чисел умножение некоторой совокупности Q комплексных чисел на число λ означает поворот фигуры Q вокруг точки 0 на угол, равный $\arg \lambda$, и последующее растяжение с коэффициентом $|\lambda|$.

** Попутно нами будет доказана невозможность того, чтобы одновременно некоторое $\alpha_i = 0$ и некоторое $\beta_j = 0$. Формулировки 5.2 и 5.3 могут быть соответственно усилены. Однако это обстоятельство в дальнейшем использовано не будет.

ристическим корнем, то изменением порядка нумерации координат она может быть приведена к виду



где все елементы, кроме, быть может, элементов p-ой и $p+1$-ой диагонали, равны 0.

5.3. *Если некоторая система может находиться в одном из состояний $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ и если вероятности a_{ij} перехода из состояния $\mathcal{E}_i$ в состояние $\mathcal{E}_j$ образуют матрицу A, имеющую число λ характеристическим корнем, то при надлежащей нумерации состояний $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ система может перейти за единицу времени из состояния $\mathcal{E}_i$ лишь в состояния $\mathcal{E}_{i+p}$ и $\mathcal{E}_{i+p+1}$.*

6. Мы будем доказывать основную теорему в геометрической формулировке 5.1. Фиксируем экстремальное число $\lambda \in M_n - M_{n-1}$ и рассмотрим (не оговаривая этого каждый раз особо) только выпуклые n-угольники, переходящие в свою часть при умножении на λ. Каждому такому n-угольнику λQ отнесем четыре целые числа $\alpha(Q)$, $\beta(Q)$, $\beta_1(Q)$ и $\beta_2(Q)$:

(1) число вершин n-угольника λQ, попавших внутрь Q, обозначается через $\alpha(Q)$;

(2) число сторон n-угольника Q, свободных от точек λQ, обозначается через $\beta(Q)$, $\beta_1(Q)$ или $\beta_2(Q)$ в зависимости от того, включаем ли мы в сторону оба ее конца или только первый, или только второй т. е. идет ли речь о сторонах типа $[xy]$, или $[xy)$ или $(xy]$ *.

Мы докажем последовательно три теоремы: *Для всякого* Q:

ТЕОРЕМА I. $\alpha(Q) = 0$.

ТЕОРЕМА II. $\beta(Q) = 0$.

ТЕОРЕМА III. *Либо* $\beta_1(Q) = 0$, *либо* $\beta_2(Q) = 0$.

План доказательства всех трех теорем одинаков. Последняя в основном эквивалентна теореме n° 5.1. Доказательству теорем I — III мы предпошлем несколько определений и лемм. Условимся обозначать соответствующие друг другу элементы (вершины, стороны и т. д.) в подобных многоугольниках Q и λQ одними и теми же буквами, ставя над

* Для обозначения отрезка контура многоугольника Q с концами x и y мы пользуемся записью $[xy]$, если концы включаются, и записью (xy), если они исключаются. Если включается один из концов x или y и исключается другой конец, то мы пишем, соответственно, $[xy)$ или $(xy]$. При этом мы ставим на первом месте букву, обозначающую первый конец нашего отрезка, считая против часовой стрелки.

буквами, обозначающими элементы λQ, волну. Для контура n-угольника Q мы введем обозначение $K(Q)$. Отрезок одного из контуров $K(Q)$, $K(\lambda Q)$ назовем **свободным**, если он не содержит точек другого контура.

7. ЛЕММА I. *Основная теорема* n° 5.1 *и, следовательно, теоремы* I, II *и* III *выполняются для многоугольника* Q, *если*:

7.1. *для некоторой последовательности* $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ *его вершин*

$$\lambda x_0 = x_1, \quad \lambda x_1 = x_2, \ \ldots, \ \lambda x_{p-1} = x_0$$

или

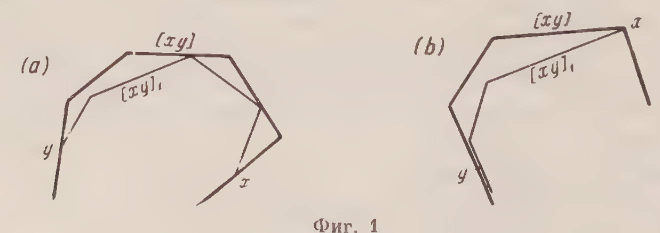
7.2. *для некоторой последовательности* $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ *его сторон*

$$\lambda a_0 \subset a_1, \quad \lambda a_1 \subset a_2, \ \ldots, \ \lambda a_{p-1} \subset a_0.$$

Доказательство. В случае 7.1, $\lambda^p x_0 = x_0$. Ни один многоугольник не переходит в свою часть при сжатии и повороте вокруг своей вершины. Поэтому $x_0 \neq 0$, и $\lambda^p = 1$.

В случае 7.2, $\lambda^p a_i \subset a_i$ для $i = 0, 1, \ldots, p-1$, и либо $\lambda^p = 1$, либо $0 \in a_i$ для $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Последнее возможно лишь при $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1}$. Но тогда $\lambda a_0 \subset a_0$ и $\lambda \in M_2$. Очевидно, что M_2 совпадает с отрезком $[-1, +1]$ действительной оси, а так как λ — экстремальное число, то $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$ и $\lambda^2 = 1$.

Таким образом, во всех случаях, для некоторого k, $\lambda^k = 1$. Поскольку $|\lambda| = 1$, площадь λQ равна площади Q, и так как $\lambda Q \subset Q$, то $\lambda Q = Q$. Поэтому, если y — одна из вершин Q, то точки $\lambda y, \lambda^2 y, \ldots$ будут также вершинами Q. Выпуклая оболочка вершин $y, \lambda y, \lambda^2 y, \ldots$ — правильный многоугольник, совмещающийся с собой при умножении на λ, с числом вершин, не превосходящим n. Это число равно n, ибо $\lambda \in M_{n-1}$, и многоугольник совпадает с Q. Если $\lambda = e^{i\frac{2\pi p}{n}}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — вершины Q, занумерованные по порядку против часовой стрелки, то $\lambda y_k = y_{k+p}$. Теорема 5.1 выполняется, следовательно, для наших случаев.



Фиг. 1

8. ЛЕММА II. *Пусть точки* x *и* y *принадлежат пересечению* $K(Q)$ *и* $K(\lambda Q)$. *Пусть* $[xy]$ *и* $[xy]_1$ — *определяемые ими отрезки* $K(Q)$ *и* $K(\lambda Q)$ (фиг. 1, *a*). *Если* p — *число вершин* Q, *лежащих на* $[xy]$, *а* q — *число вершин* λQ, *лежащих на* $[xy]_1$, *то* $p \leqslant q$.

Равенство $p = q$ *имеет место во всяком случае тогда, когда каждая из точек* x, y *либо будет вершиной как для* Q, *так и для* λQ, *либо не будет вершиной ни для* Q, *ни для* λQ (фиг. 1, *b*).

Доказательство. Отрежем от многоугольника Q часть, ограниченную ломаными $[xy]$ и $[xy]_1$ (фиг. 1). Мы получим многоугольник

Q', удовлетворяющий условию $\lambda Q \subset Q' \subset Q$, откуда $\lambda Q' \subset \lambda Q \subset Q'$. Заметим, что число вершин многоугольника Q' равно $n-p+q$. Так как $\lambda \overline{\in} M_{n-1}$, то $n-p+q \geqslant n$, т. е. $p \leqslant q$.

Для доказательства второй части леммы построим многоугольник $\lambda Q''$, приставив к λQ область, ограниченную $[xy]$ и $[xy]_1$ (фиг. 1, b). Тогда $\lambda Q \subset \lambda Q'' \subset Q$, и поэтому $\lambda Q'' \subset Q \subset Q''$. Число вершин $\lambda Q''$ (а следовательно, и Q'') в случаях, перечисленных во второй части леммы, равно $n-q+p$.

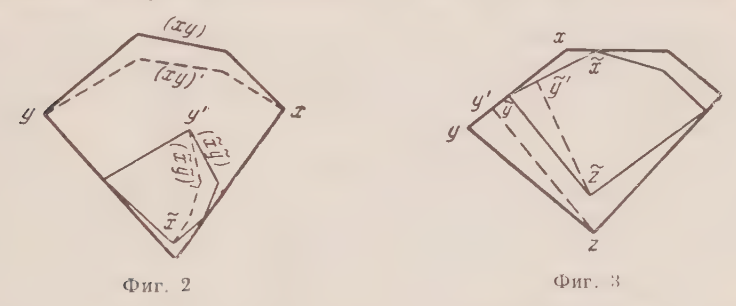
Поскольку $\lambda \overline{\in} M_{n-1}$, то $n-q+p \geqslant n$, откуда $p \geqslant q$ и, значит, $p=q$.

9. ЛЕММА III. *Пусть x и y — вершины Q, причем отрезок (xy) состоит не менее, чем из двух сторон Q. Тогда отрезок (xy) и соответствующий отрезок $(\tilde{x}\tilde{y})$ контура $K(\lambda Q)$ либо оба свободны, либо оба несвободны.*

ЛЕММА IV. *Пусть x, y, z — три последовательные вершины Q. Если $[yz]$ свободна и $\tilde{y} \in K(Q)$, то $[\tilde{x}\tilde{y}] \subset K(Q)$.*

Мы докажем леммы III и IV вначале лишь в предположении, что для произвольного n-угольника Q' $\alpha(Q') \leqslant \alpha(Q)$. Эти ослабленные леммы нам будут достаточны для доказательства теоремы I, из которой следует, что наше предположение не накладывает на Q дополнительных ограничений.

9.1. Доказательство леммы III. Пусть (xy) свободна. Построим новый n-угольник Q', заменив в контуре Q ломаную (xy) ломаной $(xy)'$ с тем же числом звеньев, теми же концами, расположенную целиком внутри Q, но вне λQ (фиг. 2). Тогда $\lambda Q'$ получается



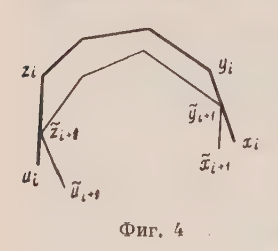
Фиг. 2 Фиг. 3

из λQ заменой $(\tilde{x}\tilde{y})$ на $(\tilde{x}\tilde{y})' = \lambda(xy)'$, расположенную внутри λQ. Отрезок $(\tilde{x}\tilde{y})'$ контура $K(\lambda Q')$ свободен. С другой стороны, $\lambda Q' \subset \lambda Q \subset Q'$. Следовательно, $\alpha(Q') < \alpha(Q)$, и ни одна вершина ломаной $(\tilde{x}\tilde{y})$ не может лежать на $K(Q)$. Вторая часть леммы доказывается вполне аналогично.

9.2. Доказательство леммы IV. Пусть Q' — многоугольник, получающийся из Q срезанием треугольника yzy', где $y' \in (xy)$ (фиг. 3). Отрезок $[yz)$ свободен; поэтому можно выбрать точку y' настолько близко к y, чтобы треугольник yzy' не имел общих точек с λQ, и тогда $Q' \supset \lambda Q$ и $\lambda Q' \subset Q'$. Если $[\tilde{x}\tilde{y}] \not\subset K(Q)$, то $\tilde{y}' \in K(Q)$, и, следовательно, $\tilde{y}' \overline{\in} K(Q')$. Но это противоречит предположению, что $\alpha(Q') \leqslant \alpha(Q)$.

10. Доказательство теоремы I. Предположим, что для всякого n-угольника Q' $\alpha(Q') \leqslant \alpha(Q)$. Покажем, что $\alpha(Q)=0$. Пусть

это не так и пусть $\tilde{w}$ — вершина λQ, лежащая внутри Q. Максимальный свободный отрезок контура $K(\lambda Q)$, содержащий точку $\tilde{w}$, не совпадает со всем контуром $K(\lambda Q)$, ибо, в противном случае, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имело бы место $(1+\varepsilon)\lambda Q \subset Q$, и λ не было бы экстремальным числом. Итак, наш максимальный свободный отрезок имеет вид $(\tilde{y}_0\tilde{z}_0)$, где $\tilde{y}_0$ и $\tilde{z}_0$ — вершины n-угольника λQ, лежащие на $K(Q)$. В силу леммы III, отрезок (y_0z_0) контура $K(Q)$ свободен, но отрезки (x_0z_0) и (y_0u_0) несвободны (x_0 — вершина Q, непосредственно предшествующая y_0; u_0 — вершина Q, непосредственно следующая за z_0). Стало быть, на стороне $(x_0y_0]$ лежат вершины λQ. Ближайшую из них к y_0 назовем $\tilde{y}_1$. На стороне $[z_0u_0)$ также лежат вершины λQ. Ближайшую из них к z_0 назовем z_1. Ломаная $(\tilde{y}_1\tilde{z}_1)$ контура $K(\lambda Q)$ свободна, число ее звеньев не меньше числа звеньев (y_0z_0) (лемма II), и подавно, не меньше двух. Ломаная $(\tilde{y}_1\tilde{z}_1)$ обладает, таким образом, всеми свойствами исходного отрезка $(\tilde{y}_0\tilde{z}_0)$; поэтому можно построить отрезок $(\tilde{y}_2\tilde{z}_2)$, отправляясь от $(\tilde{y}_1\tilde{z}_1)$, так же, как мы построили $(\tilde{y}_1\tilde{z}_1)$, отправляясь от $(\tilde{y}_0\tilde{z}_0)$, и т. д. Повторяя это построение несколько раз, мы определим свободные отрезки $(\tilde{y}_2\tilde{z}_3)$, ..., $(\tilde{y}_i\tilde{z}_i)$, ... и на некотором шаге p получим отрезок $(\tilde{y}_p\tilde{z}_p)$, равный $(\tilde{y}_0\tilde{z}_0)$ (фиг. 4). При этом



Фиг. 4

$$\tilde{y}_{i+1} \in (x_iy_i] \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1),$$

где x_i — вершина Q, непосредственно предшествующая y_i. Заметим еще, что так как число звеньев ломаной $(y_{i+1}z_{i+1})$ не меньше числа звеньев ломаной (y_iz_i), то все ломаные (y_0z_0), (y_1z_1), (y_2z_2), ..., $(y_{p-1}z_{p-1})$ состоят из равного числа звеньев.

Возможны четыре типа расположения сторон $a_i=(x_iy_i]$ и $\tilde{a}_{i+1}=$ $=(\tilde{x}_{i+1}\tilde{y}_{i+1}]$ друг относительно друга:

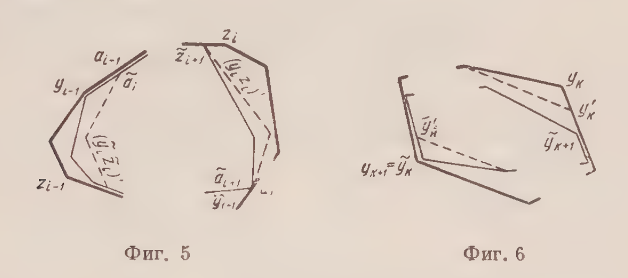
(1) $y_i=\tilde{y}_{i+1}$, $a_i \not\supset \tilde{a}_{i+1}$; (2) $y_i=\tilde{y}_{i+1}$, $a_i \supset \tilde{a}_{i+1}$; (3) $y_i \neq y_{i+1}$, $a_i \supset \tilde{a}_{i+1}$; (4) $y_i \neq \tilde{y}_{i+1}$, $a_i \not\supset \tilde{a}_{i+1}$.

Мы отнесем индекс i к классу K_1, K_2, K_3 или K_4 в зависимости от того, к какому из этих четырех типов принадлежит пара a_i, $\tilde{a}_{i+1}$.

Покажем, что, несколько изменив n-угольник Q, всегда можно достичь того, чтобы класс K_4 оказался пуст. Действительно, пусть $i \in K_4$. Построим n-угольник Q' (фиг. 5), заменив в контуре $K(Q)$ ломаную (y_iz_i) ломаной $(y_iz_i)'$, близкой к ломаной $(\tilde{y}_{i+1}\tilde{z}_{i+1})$ контура $K(\lambda Q)$, имеющей то же число звеньев и те же концы, что и $(\tilde{y}_{i+1}\tilde{z}_{i+1})$, и рас-

положенной вне λQ, но внутри Q. Тогда $\lambda Q' \subset Q'$ и $\alpha(Q') = \alpha(Q)$. При переходе от Q к Q' номер i попадает в класс K_1, номер $i-1$ — в класс K_3, остальные номера не меняют класса. Повторяя это построение в случае надобности несколько раз, мы придем к многоугольнику Q_1, для которого $\alpha(Q_1) = \alpha(Q)$ и класс K_4 пуст.

Для многоугольника Q_1 один из классов K_1 или K_3 пуст. Предположим, что это не так. В силу леммы IV номер из класса K_3 не может следовать за номером из K_1 непосредственно. Следовательно, они отделены несколькими номерами из K_2. Мы укажем сейчас деформацию n-угольника Q_1, уменьшающую число этих разделяющих номеров. Повторением такой деформации можно уменьшить это число до нуля и притти к противоречию с леммой IV. Таким образом, для доказательства пустоты одного из классов K_1, K_3 остается определить упомянутую выше деформацию Q_1.



Фиг. 5 Фиг. 6

Пусть $i \in K_1$; $i+1, \ldots, k-1 \in K_2$; $k \in K_3$. Заменим в n-угольнике Q_1 вершину y_k на $y'_k \in (\tilde{y}_{k+1} y_k)$, достаточно близкую к y_k для того, чтобы получившийся n-угольник Q'_1 содержал λQ (фиг. 6). Тогда $Q'_1 \supset \lambda Q'_1$ и для него $k-1 \in K_3$, $k \in K_3$; все остальные номера остались в прежних классах.

Если для Q_1 пуст класс K_1, то $\tilde{a}_{i+1} = \lambda a_{i+1} \subset a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$. Если пуст класс K_3, то $\tilde{y}_{i+1} = \lambda y_{i+1} = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$. В обоих случаях, по лемме I, выполняется теорема I, $\alpha(Q_1) = 0$, что противоречит предположенному неравенству $\alpha(Q) > 0$, ибо $\alpha(Q_1) = \alpha(Q)$.

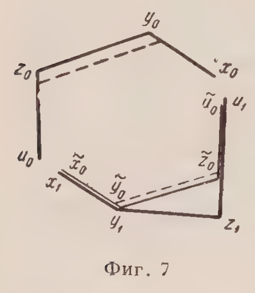
11. Доказательство теоремы II. Пусть для всякого n-угольника Q' $\beta(Q') \leqslant \beta(Q)$. Предположим, что $\beta(Q) > 0$. Пусть $[y_0 z_0]$ — некоторая свободная сторона n-угольника Q и $[x_0 y_0]$, $[z_0 u_0]$ — стороны Q, к ней примыкающие. По теореме I, $\tilde{y}_0$ и $\tilde{z}_0$ лежат на $K(Q)$. В силу этого, по лемме IV, $[\tilde{x}_0 \tilde{y}_0] \subset [x_1 y_1]$ и $[\tilde{z}_0 \tilde{u}_0] \subset [z_1 u_1]$, где $[x_1 y_1]$ и $[z_1 u_1]$ — некоторые стороны Q.

Из второй части леммы II легко вытекает, что вершины y_1 и z_1 будут концами одной стороны. Покажем, что сторона $[y_1 z_1]$ свободна. Отрежем от Q достаточно узкую полоску, параллельную $[y_0 z_0]$ (фиг. 7). Мы получим n-угольник Q', для которого $\lambda Q' \subset Q'$ и $[y_1 z_1]$ — свободная сторона.

Если $[y_1 z_1]$ — не свободная сторона для Q, то $\beta(Q) < \beta(Q')$, что противоречит предположению. Построим ломаную $x_2 y_2 z_2 u_2$ n-угольника

Q, отправляясь от свободной стороны $[y_1z_1]$, подобно тому, как мы построили $x_1y_1z_1u_1$, отправляясь от свободной стороны $[y_0z_0]$.

Повторяя это построение, получим последовательность трехзвенных ломаных $x_iy_iz_iu_i$ контура Q, причем $[y_iz_i]$ свободны и $[\tilde{x}_{i-1}\tilde{y}_{i-1}] \subset \subset [x_iy_i]$, $[\tilde{z}_{i-1}\tilde{u}_{i-1}] \subset [z_iu_i]$. В силу леммы I, теорема II выполняется для Q. Мы пришли к противоречию.



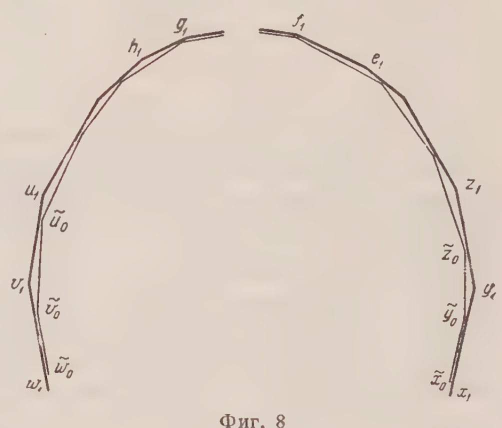
Фиг. 7

12. Доказательство теоремы III. Допустим, что для всякого n-угольника Q' $\beta_1(Q')\beta_2(Q') \leqslant \beta_1(Q)\beta_2(Q)$. Пусть $\beta_1(Q)\beta_2(Q) > 0$. Выберем пару свободных сторон $[y_0z_0)$ и $(u_0v_0]$ таким образом, чтобы ломаная (z_0u_0) имела возможно меньшее число k звеньев. Покажем, что точки $\tilde{z}_0$ и $\tilde{u}_0$ лежат в некоторых вершинах z_1 и u_1 n-угольника Q, причем стороны $[y_1z_1)$ и $(u_1v_1]$ свободны. Применив этот результат к паре свободных сторон $[y_1z_1)$ и $(u_1v_1]$ (по лемме II, ломаная (z_1u_1) имеет, как и ломаная $(\tilde{z}_0\tilde{u}_0)$, k звеньев), мы увидим, что $\tilde{z}_1$ и $\tilde{u}_1$ лежат в вершинах z_2, u_2 n-угольника Q, $[y_2z_2)$ и $(u_2v_2]$ свободны.

Повторяя то же построение, получим последовательность вершин z_j n-угольника Q такую, что $\tilde{z}_i = z_{i+1}$, и, применив лемму I, придем к противоречию с предположенным неравенством

$$\beta_1(Q)\beta_2(Q) > 0.$$

Итак, остается показать, что $\tilde{z}_0 = z_1$, $\tilde{u}_0 = u_1$ и $[y_1z_1)$, $(u_1v_1]$ свободны. По лемме IV, $[\tilde{x}_0\tilde{y}_0]$ содержится в некоторой стороне n-угольника Q. Назовем эту сторону $[x_1y_1]$. Аналогично, назовем $[v_1w_1]$ сторону, в которой содержится $[\tilde{v}_0\tilde{w}_0]$ (фиг. 8). Если $\tilde{y}_0 \neq y_1$, то из теоремы II непосредственно следует, что $\tilde{z}_0 \in (y_1, z_1]$; если же $\tilde{y}_0 = y_1$, то, сдвинув достаточно мало вершину y_0 n-угольника Q по стороне (x_0y_0), получим n-угольник Q', для которого $\lambda Q' \subset Q'$ и $\tilde{y}_0 \neq y_1$. Аналогично можно показать, что $\tilde{u}_0 \in [u_1v_1)$.



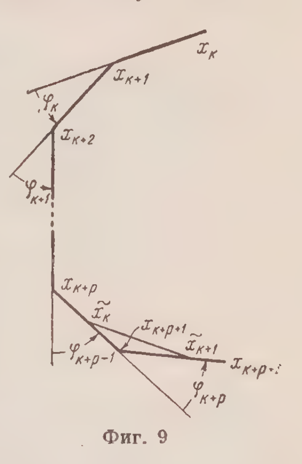
Фиг. 8

Из леммы II следует, что число звеньев ломаной $[y_1v_1]$ равно числу $k+2$ звеньев ломаной $[\tilde{y}_0\tilde{v}_0]$.

Предположим, что ни одна из вершин ломаной $[z_1u_1]$ не лежит на $K(\lambda Q)$. Тогда внутри каждого звена этой ломаной лежит по меньшей мере одна вершина λQ (по теореме II). Всего, таким образом, на (z_1u_1) лежит не менее k вершин λQ. Эти вершины принадлежат ломаной $[\tilde{z}_0\tilde{u}_0]$, имеющей всего $k+1$ вершину. Итак, все вершины этой ломаной, кроме, быть может, одного из концов, лежат на (z_1u_1). Но это

невозможно, ибо, как мы доказали, $\tilde{z}_0 \in (y_1 z_1]$ и $\tilde{u}_0 \in [u_1 v_1)$. Следовательно, некоторые из вершин ломаной $[z_1 u_1]$ лежат на контуре $K(\lambda Q)$.

Пусть f_1 — первая и g_1 — последняя из этих вершин. Из леммы II следует, что ломаные $[z_1 f_1]$ и $[\tilde{z}_0 f_1]$ имеют равное число q звеньев. Так ка ни одна из вершин ломаной $[z_1 f_1]$, исключая f_1, не лежит на $K(\lambda Q)$, то, по теореме II, каждое звено этой ломаной, кроме, быть может, звена $(e_1 f_1)$, предшествующего f_1, содержит *внутри* хотя бы по одной вершине λQ. Следовательно, из $q+1$ вершин ломаной $[\tilde{z}_0 f_1]$ не менее $q-1$ лежит на $(z_1 e_1)$, одна $\tilde{z}_0 \in (y_1 z_1]$ и одна попадает в точку f_1 Таким образом, сторона $[e_1 f_1)$ свободна. Точно так же можно убедиться, что сторона $(g_1 h_1]$, следующая за g_1, свободна. По нашему предположению о числе k звеньев ломаной $[z_0 u_0]$ число звеньев ломаной $[f_1 g_1]$ контура $K(Q)$ не меньше k. Так как $[f_1 g_1]$ содержится в $[z_1 u_1]$, имеющей k звеньев, то $[f_1 g_1] = [z_1 u_1]$, т. е. z_1 и u_1 лежат на $K(\lambda Q)$, и, следовательно, $z_1 = \tilde{z}_0$, $u_1 = \tilde{u}_0$. Сторона $[y_1 z_1)$ обязательно будет свободной, ибо иначе, сдвинув вершину y_0 n-угольника Q достаточно мало по стороне $(x_0 y_0)$, мы получили бы n-угольник Q', для которого $\lambda Q' \subset Q'$ и $\beta_1(Q')\beta_2(Q') > \beta_1(Q)\beta_2(Q)$, что невозможно. По аналогичным соображениям сторона $(u_1 v_1]$ также свободна.



Фиг. 9

13. **Доказательство основной теоремы n° 5. 1.** По теореме III, либо $\beta_1(Q)=0$, либо $\beta_2(Q)=0$. Пусть, например, $\beta_1(Q)=0$. Тогда, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вершины Q, занумерованные по порядку против часовой стрелки, то каждая из сторон $[x_i x_{i+1})$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ содержит вершины λQ, которых всего n. Следовательно, каждая из сторон $[x_i x_{i+1})$ содержит по одной вершине λQ, и для некоторого p и $k=1, 2, \ldots, n$ имеем $\lambda x_k \in [x_{k+p} x_{k+p+1})$. В случае $\beta_2(Q)=0$ мы пришли бы к условиям $\lambda x_k \in (x_{k+p} x_{k+p+1}]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Оба случая можно объединить формулами

$$\lambda x_k = \alpha_k x_{k+p} + \beta_k x_{k+p+1}, \quad \alpha_k \geqslant 0, \ \beta_k \geqslant 0, \ \alpha_k + \beta_k = 1 \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что $2\pi \frac{p}{n} \leqslant \arg \lambda \leqslant 2\pi \frac{p+1}{n}$. Обозначим через φ_k (фиг. 9) угол, на который надо повернуть против часовой стрелки направление стороны $[x_k x_{k+1}]$, чтобы получить направление стороны $[x_{k+1} x_{k+2}]$. При умножении на λ сторона $[x_k x_{k+1}]$ поворачивается на угол, равный $\arg \lambda$, и при этом ее концы попадают на стороны $[x_{k+p} x_{k+p+1}]$ и $[x_{k+p+1} x_{k+p+2}]$. Следовательно,

$$\varphi_k + \ldots + \varphi_{k+p-1} \leqslant \arg \lambda \leqslant \varphi_k + \ldots + \varphi_{k+p-1} + \varphi_{k+p} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Суммируя эти неравенства и замечая, что $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 2\pi$, получаем

$$2\pi p \leqslant n \arg \lambda \leqslant 2\pi (p+1).$$

§ 3. Изучение фигуры M_n

14. ТЕОРЕМА IV. *Если экстремальное число λ принадлежит пересечению $M_n - M_{n-1}$ с углом $<0, \frac{2\pi}{n}>$ *, то λ лежит на отрезке прямой, соединяющем точки 1 и $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Из всех выпуклых n-угольников переходят при умножении на λ в свою часть только правильные n-угольники с центром в точке 0**.*

Доказательство. Если $\lambda Q < Q$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вершины Q, занумерованные по порядку против часовой стрелки, то, по основной теореме n° 5.1,

$$\lambda x_k = \alpha_k x_k + \beta_k x_{k+1}, \qquad \alpha_k \geqslant 0,\ \beta_k \geqslant 0,\ \alpha_k + \beta_k = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Построим n-угольник Q' с вершинами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, положив

$$y_k = x_k \quad (k \neq i), \qquad y_i = \varepsilon x_{i-1} + (1-\varepsilon) x_i, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Простая выкладка показывает, что

$$\lambda y_k = \alpha_k y_k + \beta_k y_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, i-2, \ldots, i+1, \ldots, n),$$
$$\lambda y_{i-1} = \alpha'_{i-1} y_{i-1} + \beta'_{i-1} y_i,$$
$$\lambda y_i = \omega'_i y_{i-1} + \alpha'_i y_i + \beta'_i y_{i+1},$$

где

$$\alpha'_{i-1} = \alpha_{i-1} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\beta_{i-1}, \qquad \alpha'_i = \alpha_i + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\beta_{i-1} \geqslant 0,$$
$$\beta'_{i-1} = \frac{1}{1-\varepsilon}\beta_{i-1} \geqslant 0, \qquad \beta'_i = (1-\varepsilon)\beta_i \geqslant 0,$$
$$\omega'_i = \varepsilon\left(\alpha_{i-1} - \alpha_i - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\beta_{i-1}\right).$$

Одновременное выполнение неравенств $\alpha'_{i-1} > 0$ и $\omega'_i > 0$ означало бы, что $Q' \supset \lambda Q'$, причем вершина λy_i n-угольника $\lambda Q'$ лежит внутри Q'. Но это противоречит теореме I. Пусть $\alpha_{i-1} > 0$; тогда для достаточно малого ε $\alpha'_{i-1} > 0$ и, следовательно, $\omega'_i \leqslant 0$. Стало быть, неравенство $\alpha_{i-1} > 0$ влечет за собой $\alpha_{i-1} - \alpha_i \leqslant 0$, т. е. $\alpha_i \geqslant \alpha_{i-1}$. Таким образом, либо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, либо для некоторого q $\alpha_q > 0$ и тогда

$$\alpha_q \leqslant \alpha_{q+1} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_q,$$

т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$ и $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = \beta$. Итак, во всех случаях

$$\lambda x_k = \alpha x_k + \beta x_{k+q}, \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Отсюда выводим:

$$\frac{\lambda - \alpha}{\beta} x_k = x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\left(\frac{\lambda-\alpha}{\beta}\right)^n x_1 = x_1, \qquad \left(\frac{\lambda-\alpha}{\beta}\right)^n = 1.$$

---

* Под углом $<\varphi_1, \varphi_2>$ мы понимаем совокупность комплексных чисел λ, для которых $\varphi_1 \geqslant \arg \lambda \geqslant \varphi_2$.

** Прямое доказательство теоремы IV, не опирающееся на понятие экстремального числа и теорему n° 5, опубликовано нами в Докладах АН (2).

Следовательно, $\frac{\lambda-\alpha}{\beta}=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ и $\lambda=\alpha+\beta e^{\frac{2\pi i}{n}}$, а

$$x_{k+1}=x_1 e^{\frac{2\pi ik}{n}} \quad (k=1, \ldots, n-1).$$

Равенство $\frac{\lambda-\alpha}{\beta}=e^{\frac{2\pi ip}{n}}$ при $p \neq 1$ невозможно потому, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ располагаются по порядку против часовой стрелки.

15. Теорема IV полностью определяет фигуру M_n в углу $<0, \frac{2\pi}{n}>$. Для того чтобы изучить M в углу $<\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}>$, вернемся к теоретико-вероятностной интерпретации нашей проблемы. Если вероятность перехода из состояния $\mathcal{E}_i$ в $\mathcal{E}_j$ в течение единицы времени равна a_{ij}, то вероятность перехода из $\mathcal{E}_i$ в $\mathcal{E}_j$ за две единицы времени $a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$, так что если числа a_{ij} составляют матрицу A, то числа $a_{ij}^{(2)}$ образуют матрицу A^2. Вообще вероятности $a_{ij}^{(m)}$ перехода из $\mathcal{E}_i$ в $\mathcal{E}_j$ за m единиц времени образуют матрицу A^m.

Предположим, что пребывание системы в начальный момент в каждом из состояний $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ равновероятно. Тогда вероятность того, что по истечении единицы времени система вернется в исходное состояние $\sigma_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. След $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ матрицы A равен сумме $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ ее характеристических корней. Следовательно, $\sigma_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Поскольку характеристические корни матрицы A^m суть $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m$, то вероятность возвращения системы в исходное состояние через m единиц времени

$$\sigma_m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(m)}=\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\lambda_i^m.$$

16. ТЕОРЕМА V. *Пусть экстремальное число λ принадлежит пересечению M_n-M_{n-1} с углом $<\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}>$, причем $n=2q-1$ — нечетное число. Тогда λ порождает циклический n-угольник и может быть определено из уравнения*

$$\lambda^n=\alpha+\beta\lambda, \ \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0, \alpha+\beta=1, \ \textit{если} \ \lambda \in <\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n-1}>,$$

или

$$\lambda^n=\alpha+\beta\lambda^q, \ \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0, \ \alpha+\beta=1, \ \textit{если} \ \lambda \in <\frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{n}>.$$

Углу $<\frac{2\pi}{n-1}, \frac{2\pi}{q}>$ λ принадлежать не может.

Доказательство. Пусть стохастическая матрица A имеет λ характеристическим корнем. По теореме n° 5.3 в соответствующей цепи Маркова возможны в течение единицы времени лишь переходы из $\mathcal{E}_i$ в $\mathcal{E}_{i+1}$ или $\mathcal{E}_{i+2}$. Следовательно, вероятность σ_m оказаться в исходном состоянии по истечении m единиц времени равна нулю, если $2m < n$.

Итак,

$$\left.\begin{aligned} n\sigma_m &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m = 0 \qquad (m \leqslant q), \\ n\sigma_m &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \geqslant 0 \quad (q+1 \leqslant m \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы в виде

$$\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n. \tag{2}$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ связаны с величинами $s_m = n\sigma_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m$ рекуррентной формулой Ньютона

$$s_m = a_1 s_{m-1} + a_2 s_{m-2} + \ldots + a_{m-1}s_1 + a_m \cdot m \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Из этих формул видно, что

$$\left.\begin{aligned} a_m &= 0 \qquad\qquad (m \leqslant q), \\ a_m &= \frac{1}{m} s_m \geqslant 0 \quad (q+1 \leqslant m \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Уравнение (2) принимает вид

$$\lambda^n = a_{q+1}\lambda^q + a_{q+2}\lambda^{q-1} + \ldots + a_n. \tag{4}$$

Элементы a_{ij} произвольной стохастической матрицы удовлетворяют соотношениям $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Эти равенства означают, что 1 является характеристическим корнем любой стохастической матрицы, в частности, 1 является корнем уравнения (4):

$$1 = a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots + a_n. \tag{5}$$

Обозначим через Q выпуклую оболочку точек $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$. В силу (3), (4) и (5), $\lambda Q \subset Q$. Следовательно, Q — n-угольник, ибо $\lambda \,\overline{\in}\, M_{n-1}$. Очевидно, что Q содержит точки $\lambda^n, \lambda^{n+1}, \ldots$ и является циклическим n-угольником, порожденным λ.

Предположим теперь, что $\lambda \,\overline{\in} < \frac{2\pi}{p}, \frac{2\pi}{p-1} >$, где $q+1 \leqslant p \leqslant n$. Тогда при обходе контура Q против часовой стрелки его вершины располагаются в такой последовательности:

$$1, \lambda^p, \lambda, \lambda^{p+1}, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-p-1}, \lambda^{n-1}, \lambda^{n-p}, \lambda^{n-p+1}, \ldots, \lambda^{p-1}.$$

По теореме n° 5.1,

$$\lambda^n = \lambda \cdot \lambda^{n-1} = \alpha\lambda^{n-p} + \beta\lambda^{n-p+1}, \quad \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1,$$

т. е.

$$\lambda^p = \alpha + \beta\lambda, \quad \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1.$$

Следовательно, выпуклая оболочка точек $1, \lambda, \ldots, \lambda^{p-1}$ переходит при умножении на λ в свою часть, что возможно лишь для $p \geqslant n$, а так как $p \leqslant n$, то $p = n$.

Итак,

1° $\lambda \,\overline{\in} < \frac{2\pi}{n-1}, \frac{2\pi}{q} >$.

2° Если $\lambda \,\overline{\in} < \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n-1} >$, то $\lambda^n = \alpha + \beta\lambda$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Остается рассмотреть случай, когда $\lambda \in < \frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{n} >$. Если при этом обходить контур Q против часовой стрелки, то порядок вершин окажется следующий:

$$1,\ \lambda^{q+1},\ \lambda,\ \ldots,\ \lambda^{n-1},\ \lambda^{q}.$$

По теореме n° 5.1,

$$\lambda^n = \lambda \cdot \lambda^{n-1} = \alpha + \beta\lambda^q, \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

17. ТЕОРЕМА VI. *Если λ — экстремальное число, лежащее в пересечении $M_n - M_{n-1}$ с углом $< \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n-1} >$, причем $n = 2q$ — число четное, то λ порождает циклический n-угольник и удовлетворяет соотношению*

$$\lambda^n = \alpha + \beta\lambda, \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения предыдущего n°, мы придем к тому, что характеристическое уравнение стохастической матрицы A, имеющей λ характеристическим корнем, имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^n = a_q\lambda^q + a_{q+1}\lambda^{q-1} + \ldots + a_n, \\ a_q \geqslant 0,\ a_{q+1} \geqslant 0,\ \ldots,\ a_{n-1} \geqslant 0, \quad a_q + a_{q+1} + \ldots + a_n = 1. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Отличие от случая нечетного n в том, что для $\lambda \in < \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} >$ коэффициент a_n может оказаться отрицательным. Мы покажем, однако, что в нашем случае, когда $\lambda \in < \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n-1} >$, $a_n \geqslant 0$.

Пусть $a_n < 0$. Тогда уравнение (6) можно преобразовать к виду

$$b_1\lambda^n + b_2 = c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_q\lambda^q,$$

$$b_1 > 0,\ b_2 \geqslant 0,\ b_1 + b_2 = 1,\ c_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, \ldots, q),\ \sum_{i=1}^{q} c_i = 1.$$

Это соотношение означает, что отрезок прямой $(1, \lambda^n]$, соединяющий точки 1 и λ^n, пересекает выпуклую оболочку P точек $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ В силу условия $\lambda \in < \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n-1} >$, λ^n принадлежит углу $< 0, \arg\lambda >$, но ни одна из вершин многоугольника P не попадает внутрь этого угла (фиг. 10). Поэтому, если отрезок $(1, \lambda^n]$ имеет общие точки с P, то $\lambda^n \in P$. Но если

$$\lambda^n = d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \ldots + d_{n-1}\lambda^{n-1},$$

$$d_1 \geqslant 0,\ d_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ d_{n-1} \geqslant 0,$$

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = 1,$$

Фиг. 10

или

$$\lambda^{n-1} = d_1 + d_2\lambda + \ldots + d_{n-1}\lambda^{n-2},$$

то выпуклая оболочка точек $1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-2}$ переходит при умножении на λ в свою часть, что невозможно, ибо $\lambda \bar{\in} M_{n-1}$. Итак, $a_n \geqslant 0$ и доказательство теоремы завершается, как в предыдущим n°.

§ 4. Примеры

18. В этом параграфе мы построим M_n для $n \leqslant 5$. Сделаем прежде всего общее замечание. Фигура M_n симметрична относительно действительной оси, так как если λ — характеристический корень стохастической матрицы A, то и $\bar{\lambda}$ будет характеристическим корнем A. Поэтому для описания фигуры M_n достаточно описать часть этой фигуры, расположенную в углу $< 0, \pi >$.

Как уже упоминалось, M_2 представляет собой отрезок действительной оси, соединяющий точки 1 и -1. Из теорем IV и V следует, что M_3 состоит из отрезка $[-1, 1]$ и правильного треугольника с вершинами в точках $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Далее, теоремы IV, V и VI дают возможность построить пересечение M_4 с углом $< 0, \frac{2}{3}\pi >$ и M_5 с углом $< 0, \frac{4}{5}\pi >$. Определим недостающую часть M_4, лежащую в углу $< \frac{2}{3}\pi, \pi >$, и недостающую часть M, находящуюся в углу $< \frac{4}{5}\pi, \pi >$.

19. Пусть число λ экстремально, принадлежит $M_4 - M_3$ и расположено в углу $< \frac{2}{3}\pi, \pi >$. Пусть стохастическая матрица A имеет λ характеристическим корнем. По теореме n° 5.2 A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_i \geqslant 0, \ \beta_i \geqslant 0, \ \alpha_i + \beta_i = 1.$$

Напишем характеристическое уравнение A:

$$\lambda^4 = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2, \tag{7}$$

где

$$f_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4,$$
$$f_1 \geqslant 0,$$
$$f_2 = \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_4.$$

Заметим, что

$$f_2^2 + 4f_0 = (\beta_1\beta_3 - \beta_2\beta_4)^2 + 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \geqslant 0.$$

Положим $f_2^2 + 4f_0 = 4c^2$. Выразим f_0 через f_2 и c и подставим в уравнение (7). Мы приведем уравнение (7) к виду

$$(\lambda^2 - a)^2 = b^2\lambda + c^2, \tag{8}$$

где $a = \frac{1}{2} f_2$, $b = \sqrt{f_1}$. Отметим, что

$$0 \leqslant a \leqslant 1, \quad b > 0, \quad (1-a)^2 = b^2 + c^2. \tag{9}$$

Положим теперь $\lambda = \mu^2$, причем $\frac{4}{3}\pi \leqslant \arg\mu \leqslant \frac{3}{2}\pi$. Тогда $\arg\mu \leqslant \arg\mu^4 = 4\arg\mu - 4\pi$ * и, следовательно,

$$\mu^4 = \alpha + \beta\mu, \quad \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0. \tag{10}$$

---

* $\arg\mu$ обозначает то из значений аргумента числа μ, для которого выполнено неравенство $0 \leqslant \arg\mu \leqslant 2\pi$.

Подставляя $\lambda=\mu^2$, $\mu^4=\alpha+\beta\mu$ в уравнение (8), получаем квадратное уравнение относительно μ:

$$(\alpha-a+\beta\mu)^2=b^2\mu^2+c^2.$$

Поскольку μ невещественно, дискриминант этого уравнения отрицателен или равен нулю (если уравнение обращается в тождество), что приводит к соотношению

$$\left(\frac{\alpha-a}{c}\right)^2+\left(\frac{\beta}{b}\right)^2\leqslant 1.$$

Положим

$$\frac{\alpha-a}{c}=R\cos\varphi,\quad \frac{\beta}{b}=R\sin\varphi,\quad R\leqslant 1.$$

Воспользовавшись соотношениями (9) и неравенством Шварца, получим

$$\alpha+\beta=a+R\,(c\cos\varphi+b\sin\varphi)\leqslant a+R\sqrt{b^2+c^2}=$$
$$=a+R\,(1-a)\leqslant a+(1-a)=1. \tag{11}$$

Условия (10) и (11) показывают, что μ порождает циклический четырехугольник Q. Ясно, что $\lambda Q=\mu^2Q\subset Q$.

Если $\alpha+\beta<1$, то вершина μ^2 при умножении на $\lambda=\mu^2$ попадает внутрь Q, что противоречит теореме n° 5.1. Таким образом, $\alpha+\beta=1$. Подставляя в (10) $\mu=\sqrt{\lambda}$ и освобождаясь от иррациональности, приходим к следующему определяющему λ уравнению:

$$(\lambda^2-\alpha)^2=\beta^2\lambda,\quad \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1.$$

20. Совершенно аналогично разбирается случай, когда экстремальное число λ принадлежит M_5-M_4 и расположено в углу $<\frac{4}{5}\pi,\ \pi>$. Подсчитываем, что, если λ — характеристический корень стохастической матрицы A, то характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\lambda^5=f_0+f_1\lambda+f_3\lambda^3,\quad f_0\geqslant 0,\quad f_3^2+4f_1\geqslant 0. \tag{12}$$

Преобразуем уравнение (12) к виду

$$\lambda\,(\lambda^2-a)^2=b^2+c^2\lambda, \tag{13}$$

где

$$a=\frac{1}{2}f_3,\qquad b=\sqrt{f_0},\qquad c=\frac{1}{2}\sqrt{f_3^2+4f_1}.$$

Подставляем в уравнение (13) $\lambda=\mu^2$, где $\mu\in<\frac{2}{5}\pi,\ \frac{1}{2}\pi>$:

$$(\mu^5-a\mu)^2=b^2+c^2\mu^2. \tag{14}$$

Замечаем, что

$$\mu^5=\alpha+\beta\mu,\quad \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0 \tag{15}$$

и подставляем это выражение для μ в уравнение (14):

$$(\alpha+(\beta-a)\,\mu)^2=b^2+c^2\mu^2.$$

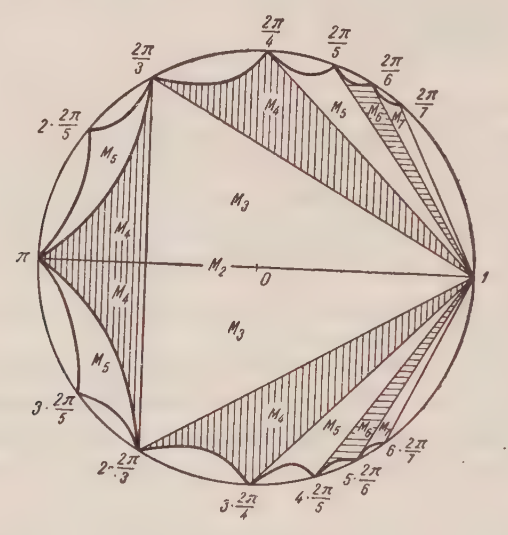
Как и прежде, заключаем отсюда, что $\alpha+\beta=1$. Таким образом, μ порождает циклический пятиугольник, и λ оказывается вершиной этого пятиугольника. Из равенства (15) получаем уравнение для определения λ:

$$\lambda\,(\lambda^2-\beta)^2=\alpha^2,\quad \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1.$$

21. Результаты этого параграфа могут быть резюмированы следующей теоремой:

ТЕОРЕМА VII. *Для* $n \leqslant 5$ M_n *будет объединением циклических* k*-угольников* ($k \leqslant n$).

В заключение приведем чертеж (фиг. 11), схематически изображающий фигуры M_2, M_3, M_4, M_5 и те части фигур M_n для $n > 5$, которые нам известны.



Фиг. 11

Добавление

Все изложенные выше результаты могут быть без труда перенесен со стохастических матриц на произвольные матрицы с неотрицател ным элементами.

ТЕОРЕМА VIII *. *Нераспадающаяся*** *матрица* $A = (a_{ij})_1^n$ *с неотрицательными элементами эквивалентна**** *матрице* ρB, *где* ρ — *максимум модуля характеристических корней матрицы* A, *а* B — *стохастическая матрица порядка* n.

Доказательство. В силу теоремы Perron'a (3) ρ является характеристическим корнем матрицы A, и все координаты соответствующего собственного вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неотрицательны. Они положительны, поскольку матрица A не распадается. Действительно, если бы $x_i = 0$ для $i = p_1, p_2, \ldots, p_r$ и $x_i > 0$ для $i = q_1, \ldots, q_s$, то, в силу равенств

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \rho x_i$, мы имели бы $a_{p_\alpha q_\beta} = 0$ для $\alpha = 1, \ldots, r$, $\beta = 1, \ldots, s$.

---

* Теорема VIII сообщена нам А. Н. Колмогоровым.

** Матрица $(a_{ij})_1^n$ называется распадающейся [Romanovsky (1), стр. 153], если индексы 1, 2, ..., n можно разбить на две группы $p_1, p_2, \ldots, p_r$ и $q_1, q_2, \ldots, q_s$ так, чтобы $a_{p_\alpha q_\beta} = 0$ для $\alpha = 1, \ldots, r$, $\beta = 1, \ldots, s$.

*** Эквивалентна, т. е. представляет то же линейное преобразование в другой системе координат, следовательно, имеет те же характеристические числа.

Матрица C с элементами $c_{ij}=a_{ij}\frac{x_j}{x_i}$ эквивалентна A. Действительно, $C=X^{-1}AX$, где

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & x_2 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots x_n \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $c_{ij}\geqslant 0$, и $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}=\rho$. Следовательно, C имеет вид ρB, где B — стохастическая матрица.

ТЕОРЕМА IX. *Характеристические корни матрицы A порядка n с неотрицательными элементами принадлежат фигуре ρM_n, где M_n — фигура, изученная в §§ 1—4, а ρ — максимум модуля характеристических корней матрицы A.*

Доказательство. Для нераспадающейся матрицы теорема IX следует прямо из теоремы VIII. Если же A распадается, то изменением порядка нумерации координат мы можем привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} & \dots A_{kk} \end{pmatrix},$$

где матрицы $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{kk}$ не распадаются. Отсюда видно, что каждый из характеристических корней матрицы A является корнем одной из матриц $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{kk}$ и, значит, принадлежит одной из фигур $\rho_\nu M_{e_\nu}$, где e_ν — порядок матрицы $A_{\nu\nu}$, а ρ_ν — наибольший из модулей корней $A_{\nu\nu}$. Стало быть, подавно все корни A лежат в фигуре ρM_n, если ρ — наибольшее из чисел ρ_ν.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20. IX. 1945.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Romanovsky V., Recherches sur les chaînes de Markoff, Premier mémoire, Acta math., 66 (1936), 147—251.

[2] Дмитриев Н. и Дынкин Е., О характеристических числах стохастической матрицы, Доклады АН, 49:3 (1945), 159—163.

[3] Perron O., Jacobischer Kettenbruchalgorithmus, Math. Annalen, 64 (1907), 1—76.

N. DMITRIEV and E. DYNKIN. ON CHARACTERISTIC ROOTS OF STOCHASTIC MATRICES

SUMMARY

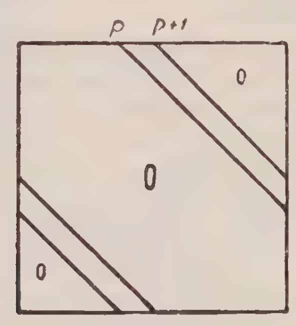
1. In the present paper we investigate the set M_n of complex numbers λ that are characteristic roots of at least one stochastic matrix of the nth order. The matrix $A=(a_{ij})_1^n$ is called stohastic if all its elements a_{ij} are non-negative and $\sum_j a_{ij}=1$ for every $i=1, \dots, n$.

2. It is proved in § 1 that a number λ belongs to M_n if and only if there exists a convex k-angular polygon ($k\leqslant n$) which, being rotated

by arg λ and contracted with coefficient $|\lambda|$ about a certain point of the plane, is mapped into itself. This result enables us to use elementary geometrical methods in the investigation of M_n.

3. A number λ is called extremal if $\lambda \in M_n$, but $\alpha\lambda \bar{\in} M_n$, whenever $\alpha > 1$. To obtain M_n it suffices to find its extremal numbers. In § 2 we give the following condition that is necessary for extremality of a number λ:

FUNDAMENTAL THEOREM. *Suppose that an extremal number* λ *belongs to* $M_n - M_{n-1}$. *Let* $2\pi \frac{p}{n} \leqslant \arg\lambda \leqslant 2\pi \frac{p+1}{n}$. *If a stochastic matrix* A *of the* n*th order has a characteristic root* λ, *then, by chosing a suitable numeration of coordinates,* A *may be put in the form shown schematically*



where all the elements, except possibly those belonging to the p*th and* $(p+1)$*th diagonals, are zero.*

The results of §§ 3—4 are corollaries of the Fundamental Theorem.

4. Suppose the points of a plane to be associated with complex numbers in a usual way. A plane k-angular polygon Q is said to be cyclic, generated by a number μ if Q coincides with the convex hull over the points $1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^n, \ldots$ We prove that, if λ belongs to a cyclic k-angular polygon $(k \leqslant n)$, then $\lambda \in M_n$; conversely, if $\lambda \in M_n$, then λ lies within a cyclic k-angular polygon, provided

1) $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \frac{2\pi}{n-1}$ (Theorems IV, V and VI) or

2) $n \leqslant 5$ (Theorem VII).

These results enable us to obtain the intersection of M_n with the region $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \frac{2\pi}{n-1}$ and to draw in detail the plane sets M_2, M_3, M_4, M_5 (see Fig. 11). In particular, we show that the segments of the circle $|\lambda| \leqslant 1$ cut by the chords $[1, e^{\frac{2\pi i}{n}}]$ and $[1, e^{-\frac{2\pi i}{n}}]$ contain no points of M_n. This result is applicable to the theory of Markoff's chains.

5. In Appendix the results of §§ 3—4 are extended to arbitrary matrices with non-negative elements. We have

THEOREM IX. *Characteristic roots of a matrix* A *of the* n*th order with non-negative elements belong to the set* ρM_n, *where* ρ *is the maximum of the moduli of characteristic roots of* A.

Член редколлегии проф. *Б. И. Сегал*

Подписано к печати 8/IV 1946 г. А 00265
Объем $5^1/_2$ печ. л., 9 уч.-изд л. Тираж 2500 экз.
Цена 9 руб. Заказ 195

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров РСФСР
Москва, Трехпрудный, 9.

Содержание

Sommaire

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 19
Adresse de la rédaction: B. Kaloujskaja, 19 Moscou

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 185—196 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ $\int\limits_0^\infty |y|^s d\psi(s)$ НА ОТРЕЗКЕ $(-1, +1)$

Автор применяет свой метод определения асимптотического значения наилучшего приближения функций, имеющих данную особенность на рассматриваемом отрезке, к функциям вида $\int\limits_0^\infty |y|^s d\psi(s)$.

1. В настоящей статье метод исследования наилучшего приближения $|y|^s$ на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочленов высокой степени n, изложенный в монографии (¹), распространяется на функции вида

$$f(y) = \int\limits_0^\infty |y|^s d\psi(s), \tag{1}$$

где $\psi(s)$ — данная функция ограниченной вариации.

При этом нужно, чтобы существовала такая определенная постоянная $A > 0$, что

$$\frac{E_n[f_A(y)]}{E_n[f(y)]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \tag{A}$$

где

$$f_A(y) = \int\limits_0^A |y|^s d\psi(s). \tag{1bis}$$

Таким образом, в дальнейшем, при выводе асимптотических формул для наилучшего приближения мы можем ограничиться рассмотрением функций вида (1 bis).

Этому условию удовлетворяет, например, функция

$$2\int\limits_a^\infty |y|^{2s} e^{2b(a-s)} ds = \frac{|y|^{2a}}{b - \ln|y|}, \tag{2}$$

где $a \geqslant 0$, $b > 0$, когда $\ln|y| < b$ (что, в частности, выполнено в промежутке $-1 \leqslant y \leqslant +1$).

Действительно,

$$2\int\limits_a^A |y|^{2s} e^{2b(a-s)} ds = \frac{|y|^{2a} - |y|^{2A}}{b - \ln|y|}, \tag{3}$$

где $A > a$; но из классических теорем следует, что порядок наилучшего

приближения $\frac{|y|^{2A}}{b-\ln|y|}$ выше порядка наилучшего приближения $\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}$. Ниже приближение функции (2) будет подробно исследовано.

Кроме того, функцию $\psi(s)$ подчиним условиям:

$$\text{(B)} \qquad \int_0^\infty su^{2s}|d\psi(s)| = O\left[\frac{1}{|\ln u|^{1+\alpha}}\right]$$

при $u>0$ близком к нулю, где $\alpha>0$ — какое-нибудь определенное число;

(C) существует такое значение $\rho<\frac{1}{2}$, что

$$E_n[f(y)] > e^{-n^\rho}$$

для достаточно больших значений n.

Воспользуемся соотношением [([1]), стр. 98, формула (48)]

$$(1-x)^s - P_{n,s}(x) = \frac{\sin \pi s}{\pi} T_n(x) \int_1^\infty \frac{(1-x)(z-1)^{s-2}}{(z-x)T_n(z)} dz, \tag{4}$$

где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева степени n, а $P_{n,s}(x)$ — соответствующий интерполяционный многочлен.

Делая замену

$$1-x=2y^2$$

и полагая $m=2n$, преобразуем формулу (2) (учитывая, что $T_n(1-2y^2) = (-1)^n T_m(y)$) к виду

$$2^s|y|^{2s} - P^*_{m,s}(y) = (-1)^n \frac{\sin \pi s}{\pi} T_m(y) \int_1^\infty \frac{2y^2(z-1)^{s-1}dz}{(z-1+2y^2)T_n(z)}, \tag{4 bis}$$

где $P^*_{m,s}(y) = P_{n,s}(1-2y^2)$ — четный многочлен степени m относительно y.

Умножая обе части равенства (4 bis) на $d\psi(s)$ и интегрируя по s от 0 до A, получаем

$$\int_0^A |y|^{2s}d\psi(s) - Q_m(y) = \frac{(-1)^n T_m(y)}{\pi} \int_0^A \int_1^\infty \frac{y^2 \sin \pi s \left(\frac{z-1}{2}\right)^{s-1} dz\, d\psi(z)}{(z-1+2y^2)T_n(z)} = \frac{(-1)^n T_m(y)}{\pi} G(y), \tag{5}$$

где $Q_m(y) = \int_0^A \frac{P^*_{m,s}(y)}{2^s} d\psi(s)$ есть многочлен степени m по y, а $G(y)$ означает соответствующий двойной интеграл.

При достаточно больших значениях n $G(y)$ имеет смысл в силу условия (B).

Для вычисления асимптотического значения $G(y)$ произведем замену переменных:

$$z+\sqrt{z^2-1}=\sigma;$$

тогда

$$z=\sigma+\frac{1}{\sigma}, \quad z-1==\frac{(\sigma-1)^2}{2\sigma},$$

$$z-1+2y^2 = \frac{(\sigma-1)^2+4\sigma y^2}{2\sigma},$$

откуда

$$G(y)=4\int_0^A\int_1^\infty \frac{y^2 \sin \pi s\,(\sigma+1)\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)^{2s-1} d\psi(s)\, d\sigma}{[(\sigma-1)^2+4\sigma y^2]\,\sigma^s\left(\sigma^n+\frac{1}{\sigma^n}\right)}\,, \qquad (6)$$

и применим формулу [(¹), стр. 92, формула (37)]

$$\int_0^\infty F(z)\,\varphi^n(z)\,dz \simeq \frac{\varphi^n(a)}{n}\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}} F\left(a+\frac{u}{n}\right)du, \qquad (7)$$

которая имеет место при условиях:

1) $\int_a^\infty |F(z)\,\varphi^h(z)|\,dz$ имеет смысл при достаточно большом h;

2) существует некоторый определенный произвольно малый интервал $(a, a+\alpha)$, где $\varphi(z)$ и ее производные первых двух порядков ограничены и, кроме того, $\varphi(z)>0$, $\varphi'(z)<0$;

3) вне промежутка $(a, a+\alpha)$

$$|\varphi(z)|<\varphi(a+\alpha);$$

4) существует значение $\rho<\frac{1}{2}$ такое, что

$$\left|\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}} F\left(a+\frac{u}{n}\right)du\right| > e^{-n^\rho}$$

при n достаточно большом.

В данном случае $\varphi(\sigma)=\frac{1}{\sigma}$ и первые три условия всегда выполняются;

$$F(\sigma)=4\int_0^A \frac{y^2 \sin \pi s\,(\sigma+1)\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)^{2s-1} d\psi(s)}{[(\sigma-1)^2+4\sigma y^2]\,\sigma^s\left(1+\frac{1}{\sigma^{2n}}\right)}\,.$$

Тогда $(m=2n)$

$$G(y)=\int_1^\infty \varphi^n(\sigma)\,F(\sigma)\,d\sigma \simeq \frac{\varphi^n(1)}{n}\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}} F\left(1+\frac{u}{n}\right)du=$$

$$=\frac{4}{n}\int_0^\infty \frac{e^{-u}y^2\left(2+\frac{u}{n}\right)du}{\left[\left(\frac{u}{n}\right)^2+4y^2\left(1+\frac{u}{n}\right)\right]\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2n}}\right]}\int_0^A \frac{\sin \pi s\left(\frac{u}{2n}\right)^{2s-1} d\psi(s)}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^s}\simeq$$

$$\simeq \frac{4}{m}\int_0^\infty \frac{du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}\int_0^A \frac{\sin \pi s\, u^{2s-1}\, d\psi(s)}{m^{2s-1}} \qquad (8)$$

при условиях (B) и (C).

Отсюда, обозначая, вообще, через $\rho_m(f(y))$ разность между функцией $f(y)$ и ее интерполяционным многочленом степени m, соответствующим

узлам $x_k = \cos\frac{2k+1}{2m}\pi$ $(k=0, \ldots, m-1)$ и $x_m = 0$, получаем при сделанных выше предположениях (A), (B) и (C) асимптотическое выражение для (5):

$$\rho_m\left(\int_0^\infty |y|^{2s} d\psi(s)\right) = \int_0^\infty |y|^{2s} d\psi(s) - Q_m(y) \simeq$$

$$\simeq \frac{(-1)^n 4}{\pi m} T_m(y) \int_0^\infty \frac{y^2 \Phi\left(\frac{u}{m}\right) du}{(e^u + e^{-u})\left(y^2 + \frac{u^2}{m^2}\right)}, \qquad (9)$$

где

$$\Phi(u) = \int_0^A \sin \pi s\, u^{2s-1} d\psi(s).$$

2. Приложим полученный результат к функции (2). Как уже указывалось, условие (A) здесь выполнено и, следовательно, достаточно найти асимптотическое значение наилучшего приближения для функции (3). В этом случае

$$\Phi\left(\frac{u}{m}\right) = 2\int_a^A \sin \pi s \left(\frac{u}{m}\right)^{2s-1} e^{2b(a-s)} ds, \qquad (10)$$

$$\Phi\left(\frac{u}{m}\right) = \frac{2}{4k^2+\pi^2}\left[\left(\frac{u}{m}\right)^{2a-1}(\pi\cos\pi a + 2k\sin\pi a) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{u}{m}\right)^{2A-1}(\pi\cos\pi A + 2k\sin\pi A)\, e^{2b(a-A)}\right], \qquad (10\text{ bis})$$

причем последнее равенство справедливо, когда $k = b - \ln\left(\frac{u}{m}\right) > 0$.

Разобьем $\int_0^\infty$ в формуле (9) на два слагаемых:

$$\int_0^\infty = \int_0^{2\ln m} + \int_{2\ln m}^\infty .$$

Подставляя значение $\Phi\left(\frac{u}{m}\right)$ из формулы (10) и полагая m достаточно большим, чтобы $u^{2a-1} < e^{-\frac{u}{2}}$ при $u > 2\ln m$, находим для второго слагаемого оценку

$$\int_{2\ln m}^\infty \frac{\left|\Phi\left(\frac{u}{m}\right)\right| du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{m^2 y^2}\right)} < \frac{1}{b}\int_{2\ln m}^\infty \left(\frac{u}{m}\right)^{2a-1} e^{-u} du <$$

$$< \frac{1}{b}\int_{2\ln m}^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}} du}{m^{2a-1}} = \frac{2}{bm^{2a}} . \qquad (11)$$

Пользуясь для вычисления первого слагаемого $\int\limits_0^{2\ln m}$ формулой (10 bis) и учитывая, что, как сейчас увидим, порядок его ниже, чем $\frac{1}{m^{2a}}$, получаем

$$\rho_m\left(2\int\limits_a^\infty |y|^{2s}e^{2b(a-s)}\,ds\right)\simeq\frac{(-1)^n 8}{\pi m}T_m(y)\cdot$$

$$\int\limits_0^{2\ln m}\frac{\left(\frac{u}{m}\right)^{2a-1}(\pi\cos\pi a+2k\sin\pi a)-\left(\frac{u}{m}\right)^{2A-1}(\pi\cos\pi A+2k\sin\pi A)e^{2b(a-A)}}{(4k^2+\pi^2)(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}\,du\simeq$$

$$\simeq\frac{(-1)^n 8}{\pi m}T_m(y)\int\limits_0^{2\ln m}\frac{\left(\frac{u}{m}\right)^{2a-1}(\pi\cos\pi a+2k\sin\pi a)\,du}{(4k^2+\pi^2)(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}.$$

Предположим сначала, что a — нецелое число: $a>[a]\geqslant 0$. Тогда имеем

$$\int\limits_0^{2\ln m}\frac{u^{2a-1}}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}\cdot\frac{\pi\cos\pi a+2k\sin\pi a}{4k^2+\pi^2}\,du=$$

$$=\int\limits_0^{2\ln m}\frac{u^{2a-1}}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}\cdot\frac{\sin\pi a\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi a+k\right)}{2\left(k^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}\,du\simeq$$

$$\simeq\int\limits_0^{2\ln m}\frac{u^{2a-1}\sin\pi a}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}\frac{du}{2k}\simeq\frac{\sin\pi a}{2\ln m}\int\limits_0^{2\ln m}\frac{u^{2a-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)},$$

так как $\frac{k}{\ln m}\to 1$ за исключением промежутка $\left(0,\frac{1}{\ln m}\right)$, в котором $\frac{k}{\ln m}>1$ и

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\ln m}}u^{2a-1}\,du=\frac{1}{2a(\ln m)^{2a}}.$$

Таким образом,

$$\rho_m\left(2\int\limits_a^\infty |y|^{2s}e^{2b(a-s)}\,ds\right)\simeq\frac{(-1)^n 4\sin\pi a}{\pi m^{2a}\ln m}T_m(y)\int\limits_0^\infty\frac{u^{2a-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}. \qquad (12)$$

Сравнивая эту формулу с соответствующей формулой для $\rho_m(|y|^{2a})$ [1] заключаем, что асимптотическое значение наилучшего приближения для функции $\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}$ отличается от асимптотического значения наилучшего приближения функции $|y|^{2a}$ только численным множителем $\frac{1}{\ln m}$:

$$E_m\left[\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}\right]\simeq\frac{1}{\ln m}E_m\left[|y|^{2a}\right]\quad (b>0,\quad a>[a]\geqslant 0). \qquad (13)$$

Если $a > 0$ — целое число: $a = [a] > 0$, то, применяя то же вычисление, находим, что

$$\rho_m\left(\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}\right) \simeq \pm \frac{2}{m^{2a}(\ln m)^2} T_m(y) \int_0^\infty \frac{u^{2a-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)},$$

так как $\pi\cos\pi a + 2k\sin\pi a = \pm\pi$.

Таким образом, в этом случае порядок наилучшего приближения $E_m\left[\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}\right]$ равен $\frac{1}{m^{2a}(\ln m)^2}$.

3. В случае $a=0$ условие (B) соблюдено, и, так как попрежнему порядок второго слагаемого $\int\limits_{2\ln m}^{\infty}$ выше порядка $\int\limits_0^{2\ln m}$, находим, что $(m=2n)$

$$\rho_m\left(\frac{1}{b-\ln|y|}\right) \simeq (-1)^n\, 2T_m(y) \int_0^{2\ln m} \frac{du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right) u(\ln m-\ln u)^2}.$$

Разбивая $\int\limits_0^{2\ln m}$ на два слагаемых

$$\int_0^{2\ln m} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{2\ln m},$$

замечаем, что

$$\int_{\alpha}^{2\ln m} \frac{du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right) u(\ln m-\ln u)^2} = o\left(\frac{1}{\ln m}\right),$$

если $\alpha \geqslant \frac{1}{m^\varepsilon}$, где $\varepsilon \to 0$ при $m \to \infty$.

В самом деле,

$$\int_{\alpha}^{2\ln m} < \int_{\alpha}^{2\ln m} \frac{du}{2u(\ln m-\ln u)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln m-\ln u}\Bigg|_{\alpha}^{2\ln m} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln m-\ln\ln m-\ln 2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln m-\ln\alpha} =$$

$$= \frac{-\ln\alpha+\ln\ln m+\ln 2}{2(\ln m-\ln\ln m-\ln 2)(\ln m-\ln\alpha)} < \frac{-\ln\alpha+\ln\ln m+\ln 2}{2\ln m(\ln m-\ln\ln m-\ln 2)} = o\left(\frac{1}{\ln m}\right),$$

так как $\ln\frac{1}{\alpha} = o(\ln m)$.

Таким образом, полагая $\alpha = \frac{1}{(\ln m)^2}$, имеем

$$\rho_m\left(\frac{1}{b-\ln|y|}\right) =$$

$$= (-1)^n\, 2T_m(y) \int^{\frac{1}{(\ln m)^2}} \frac{du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right) u(\ln m-\ln u)^2} + \frac{\varepsilon_m(y)}{\ln m}, \qquad (14)$$

где $\varepsilon_m(y) \leqslant \varepsilon_m$ при $|y| \leqslant 1$ равномерно стремится к нулю при $m \to \infty$.

Обозначая через $E'_m[f(y)]$ наилучшее приближение функции $f(y)$ в промежутке $(-1, +1)$ при помощи многочленов степени m, обращающихся в нуль при $y = 0$, заключаем непосредственно из формулы (14), что

$$E'_m\left[\frac{1}{b - \ln|y|}\right] < \int_0^{\frac{1}{(\ln m)^2}} \frac{du}{u(\ln m - \ln u)^2} + \frac{\varepsilon_m}{\ln m} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\ln m + \ln(\ln m)^2} \simeq \frac{1}{\ln m}. \tag{15}$$

С другой стороны, применяя обобщенную теорему Валле-Пуссена, легко проверить, что

$$E'_m\left[\frac{1}{b - \ln|y|}\right] > \frac{1 - \varepsilon'_m}{\ln m}, \tag{16}$$

где $\varepsilon'_m \to 0$ при $m \to \infty$. Действительно,

$$2T_m(y) \int_0^{\frac{1}{(\ln m)^2}} \frac{du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{m^2y^2}\right) u(\ln m - \ln u)^2} =$$

$$= 2T_m(y) \frac{1}{(e^{u_0} + e^{-u_0})\left(1 + \frac{u_0^2}{m^2y^2}\right)} \int_0^{\frac{1}{(\ln m)^2}} \frac{du}{u(\ln m - \ln u)^2},$$

где $0 \leqslant u_0 \leqslant \frac{1}{(\ln m)^2}$. Таким образом, множитель при $T_m(y)$ равняется

$$\frac{1}{\ln m} + \frac{\delta_m(y)}{\ln m},$$

где $\delta_m(y) \to 0$, когда $|y| \geqslant \frac{1}{m \ln m}$. Следовательно, по формуле (14) разность $\rho_m\left(\frac{1}{b - \ln|y|}\right)$ получает асимптотически значение $\frac{1}{\ln m}$ с последовательно чередующимися знаками в $\frac{m}{2} + 1$ точках $y_k = \cos\frac{k\pi}{m}$, где $T_m\left(\cos\frac{k\pi}{m}\right) = (-1)^k$, $k = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1$, и в точке $y_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{m \ln m}$, так как в последней точке

$$T_m\left(\frac{1}{m \ln m}\right) = \cos m \arccos \frac{1}{m \ln m} = \cos m\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{m \ln m}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{m}{2}} \cos m \arcsin \frac{1}{m \ln m} \simeq (-1)^{\frac{m}{2}} \cos\frac{1}{\ln m} \simeq (-1)^{\frac{m}{2}}.$$

Отсюда следует (16), а из (15) и (16) заключаем, что

$$E'_m\left[\frac{1}{b - \ln|y|}\right] \simeq \frac{1}{\ln m}. \tag{17}$$

Формулу (14) можно также использовать для определения асимптотического значения $E_m\left[\frac{1}{b - \ln|y|}\right]$. Для этого заметим сначала, что

вследствие легко проверяемого неравенства [([1]), стр. 61]

$$E_n[f(x)] \geqslant \frac{1}{2} E'_n[f(x)].$$

Мы покажем, что в данном случае асимптотически справедливо и обратное неравенство, так что

$$E_m\left[\frac{1}{b-\ln|y|}\right] \simeq \frac{1}{2} E'_m\left[\frac{1}{b-\ln|y|}\right] \simeq \frac{1}{2\ln m}. \qquad (18)$$

Для этого, делая подстановку $y^2 = \frac{1-x}{2}$, замечаем, что $(m=2n)$

$$E_m\left[\frac{1}{y^2+a^2}\right] = 2E_n\left[\frac{1}{1+2a^2-x}\right] =$$

$$= \frac{2}{[(1+2a^2)^2-1]\cdot[1+2a^2+\sqrt{(1+2a^2)^2-1}]^n} = \frac{1}{2a^2(a^2+1)[a+\sqrt{a^2+1}]^m}. \qquad (19)$$

Но наилучшее приближение $\frac{1}{b-\ln|y|}$ асимптотически равно, вследствие формулы (14), наилучшему приближению

$$2T_m(y)\int_0^\alpha \frac{y^2\,du}{(e^u+e^{-u})\left(y^2+\frac{u^2}{m^2}\right)u(\ln m-\ln u)^2} \quad \left(\alpha=\frac{1}{(\ln m)^2}\right),$$

которое не больше, чем интеграл от наилучшего приближения подинтегральной функции; но вследствие формулы (19)

$$E_m\left[\frac{y^2T_m(y)}{y^2+\frac{u^2}{m^2}}\right] = E_m\left[\frac{\frac{u^2}{m^2}T_m\left(\frac{u}{m}i\right)}{y^2+\frac{u^2}{m^2}}\right] =$$

$$= \frac{\frac{u^2}{m^2}\left[\left(\frac{u}{m}+\sqrt{\frac{u^2}{m^2}+1}\right)^m+\left(\frac{u}{m}-\sqrt{\frac{u^2}{m^2}+1}\right)^m\right]}{4\frac{u^2}{m^2}\left(\frac{u^2}{m^2}+1\right)\left[\frac{u}{m}+\sqrt{\frac{u^2}{m^2}+1}\right]^m} \simeq \frac{1}{2},$$

так как $|u| \leqslant \frac{1}{(\ln m)^2} \to 0$; и окончательно получаем, что интеграл от наилучшего приближения подинтегральной функции асимптотически равен

$$\int_0^\alpha \frac{du}{(e^u+e^{-u})u(\ln m-\ln u)^2}.$$

Следовательно, асимптотически

$$E_m\left[\frac{1}{b-\ln|y|}\right] \leqslant \frac{1}{2\ln m}.$$

Таким образом, равенство (18) доказано.

Делая замену переменных $y=\frac{x}{\lambda}$, мы получим приближенный многочлен степени n относительно x в промежутке $(-\lambda, +\lambda)$ для функции $\frac{1}{b-\ln\left|\frac{x}{\lambda}\right|}$, подставляя $\frac{x}{\lambda}$ вместо y в соответствующий приближенный

многочлен для функции $\frac{1}{b-\ln|y|}$ в промежутке $(-1, +1)$. Отсюда следует, что наилучшее приближение на любом отрезке $(-\lambda, +\lambda)$ для функции $\frac{1}{b-\ln|y|}$, где $\lambda < e^b$, также асимптотически равно $\frac{1}{2\ln m}$. И вообще $E_n\left[\frac{1}{b-\ln|y|}; \alpha, \beta\right]$ — наилучшее приближение функции $\frac{1}{b-\ln|y|}$ на отрезке (α, β), где $\beta > 0 > \alpha$ и $b - \ln|y| > 0$ — асимптотически равняется $\frac{1}{2\ln m}$.

Полагая $y^2 = x$, находим, что наилучшее приближение $E_n\left[\frac{2}{2b-\ln x}\right]$ в промежутке $(0,1)$ равняется $\frac{1}{2\ln m}$, откуда

$$E_n\left[\frac{2}{2b-\ln x}; 0,1\right] \simeq \frac{1}{4\ln n};$$

длина промежутка, так же как и в предыдущем случае, не играет роли (лишь бы он не включал других особых точек рассматриваемой функции).

Переходя к периодическим функциям и обозначая через $E_n^*[f(\theta)]$ наилучшее приближение $f(\theta)$ при помощи тригонометрической суммы порядка n, выводим отсюда, что

$$E_n^*\left[\frac{1}{b-\ln|\cos\theta-a|}\right] \simeq \frac{1}{2\ln n}, \text{ если } |a|<1$$

и

$$E_n^*\left[\frac{1}{b-\ln|\cos\theta-1|}\right] \simeq \frac{1}{4\ln n};$$

но, как известно, E_n^* убывает в геометрической прогрессии при $a > 1$, так как $\ln|\cos\theta - a|$ регулярна тогда при всех вещественных θ.

Поступило
13. II. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, М.—Л. 1937.

S. BERNSTEIN. SUR LA MEILLEURE APPROXIMATION DES FONCTIONS $\int_0^\infty |y|^s d\psi(s)$ SUR LE SEGMENT $(-1, +1)$

RÉSUMÉ

1. Soit

$$f(y) = \int_0^\infty |y|^s \, d\psi(s), \quad f_A(y) = \int_0^A |y|^s \, d\psi(s), \tag{1}$$

où $\psi(s)$ est une fonction donnée à variation bornée (pour $y<A$). Supposons de plus qu'il éxiste une constante $A > O$ telle que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n[f(y)]}{E_n[f_A(y)]} = 1, \tag{A}$$

que

$$\int_0^A su^{2s} |d\psi(s)| = O\left[\frac{1}{|\ln|u||^{1+\alpha}}\right] \tag{B}$$

pour $u > 0$ assez petit, où $\alpha > 0$ est une constante donnée; qu'il existe une constante $\rho < \frac{1}{2}$ telle que

$$E_n[f(y)] > e^{-n^\rho} \tag{C}$$

pour n assez grand.

Dans ces conditions, en désignant par $\rho_m(f(y))$ la différence entre $f(y)$ et son polynome interpolateur de degré pair $m = 2n$ correspondant aux noeds: y_k, où $T_m(y_k) = \cos m \arccos y_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ et $y_m = 0$, on a uniformément l'égalité asymptotique

$$\rho_m(f(y)) \simeq \frac{(-1)^n}{m\pi} 4T_m(y) \int_0^\infty \frac{y^2 \Phi\left(\frac{y}{m}\right) du}{(e^u + e^{-u})\left(y^2 + \frac{u^2}{m^2}\right)}, \tag{9}$$

où

$$\Phi(u) = \int_0^A u^{2s-1} \sin \pi s \, d\psi(s).$$

2. En appliquant la formule (9) à la fonction, définie par la formule

$$2\int_a^\infty |y|^{2s} e^{2b(a-s)} ds = \frac{|y|^{2a}}{b - \ln|y|}, \tag{3}$$

où $b > 0$, $a \geqslant 0$ qui est valable pour $|y| < e^b$ (en particulier, pour $|y| \leqslant 1$), on trouve d'abord que $(m = 2n)$

$$\rho_m\left(2\int_a^\infty |y|^{2s} e^{2b(a-s)}\,ds\right) \simeq \frac{(-1)^n 8}{\pi m^{2a}} T_m(y) \int_0^{2\ln m} \frac{u^{2a-1}(\pi\cos\pi a + 2k\sin\pi a)\,du}{(4k^2+\pi^2)(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)},$$

en posant $k = b - \ln\frac{u}{m}$.

En supposant d'abord que $a > [a] \geqslant 0$ est un nombre positif quelconque non entier, on déduit de là qu' en ce cas

$$\rho_m\left(\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}\right) \simeq \frac{(-1)^n 4\sin\pi a}{\pi m^{2a}\ln m} T_m(y) \int_0^\infty \frac{u^{2a-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)}. \tag{12}$$

En comparant cette formule avec la formule correspondante pour $\rho_m(|y|^{2a})$ qui ne diffère de la formule (12) que par l'absence du facteur $\frac{1}{\ln m}$, nous en concluons que

$$E_m\left[\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}\right] \simeq \frac{1}{\ln m} E_m[|y|^{2a}] \quad (b>0,\ a>[a]\geqslant 0). \tag{13}$$

Dans le cas, où $a=[a]>0$ est un entier positif, on obtient par un calcul analogue

$$\rho_m\left(\frac{|y|^{2a}}{b-\ln|y|}\right) \simeq \pm\frac{2}{m^{2a}(\ln m)^2} T_m(y) \int_0^\infty \frac{u^{2a-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)^2}.$$

3. Le cas, où $a=0$ éxige un éxamen spécial: les conditions (A), (B), (C) sont encore remplies, et on déduit d'abord de (9) que

$$\rho_m\left(\frac{1}{b-\ln|y|}\right) \simeq (-1)^n 2T_m(y) \int_0^{2\ln m} \frac{du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{m^2y^2}\right)u\left(\ln\frac{m}{u}\right)^2}$$

et ensuite en observant que (quel que soit y) la valeur asymptotique de l'intégrale au second membre ne change pas, si la limite supérieure de l'intégrale est remplacé par $\alpha = \left(\frac{1}{\ln m}\right)^2$, on obtient la formule

$$\rho_m\left(\frac{1}{b-\ln|y|}\right) =$$

$$= (-1)^n 2T_m(y) \int_0^{\frac{1}{(\ln m)^2}} \frac{y^2\,du}{(e^u+e^{-u})\left(y^2+\frac{u^2}{m^2}\right)u\left(\ln\frac{m}{u}\right)^2} + \frac{\varepsilon_m(y)}{\ln m}, \tag{14}$$

où $|\varepsilon_m(y)| < \varepsilon_m$ tend uniformément vers 0 pour $|y|\leqslant 1$, lorsque $m\to\infty$.

On conclut de là d'abord que

$$E'_m\left[\frac{1}{b-\ln|y|}\right]\simeq\frac{1}{\ln m},\tag{17}$$

où E'_m désigne la meilleure approximation par des polynomes de degré m s'annulant pour $y=0$.

On démontre, enfin, que

$$E_m\left[\frac{1}{b-\ln|y|}\right]\simeq\frac{1}{2}E'_m\left[\frac{1}{b-\ln|y|}\right]\simeq\frac{1}{2\ln m}.\tag{18}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 197—206 Série mathématique

Б. М. ГАГАЕВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ*

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Рассматривается вопрос об отыскании ортогональной относительно $q(x)$ системы функций, производные которых образуют ортогональную относительно $p(x)$ систему, где $p(x)$ и $q(x)$ — данные функции, непрерывные и неотрицательные на отрезке ортогональности.

В работе ([1]) я доказал, что единственной системой ортогональных функций инвариантной (до постоянного множителя) относительно дифференцирования, если только она содержит более четырех функций, является тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots \tag{1}$$

Б. Гнеденко показал ([2]), что мною была пропущена система

$$\cos\frac{2n+1}{2}x, \ \sin\frac{2n+1}{2}x \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

являющаяся также инвариантной (до постоянного множителя) относительно дифференцирования. Употребленный мною метод позволяет также доказать, что системы (1) и (2) являются единственными системами ортогональных функций, производные которых содержатся в данной системе, или которые содержатся в системе, образованной производными.

В связи с этим возникает следующая более общая проблема, поставленная Н. Г. Чеботаревым: отыскать ортогональные относительно $q(x)$ системы функций, производные которых образуют ортогональную относительно $p(x)$ систему. Как обычно, предполагается, что $p(x)$ и $q(x)$ на отрезке ортогональности $[a, b]$ непрерывны и неотрицательны.

В настоящей работе доказывается, что при некоторых предположениях такая система является единственной, а именно доказывается следующая.

ТЕОРЕМА. *Система $\varphi_n(x)$ ортогональных относительно $q(x)$ функций, производные которых образуют ортогональную относительно $p(x)$ систему при условии, что производные образуют замкнутую систему, а система $\varphi_n(x)$ содержит единицу, причем*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right] \quad (n=1, 2, \ldots)$$

непрерывны, $p(x)$ и $q(x)$ обращаются в нуль лишь в конечном числе точек и $\frac{1}{p(x)}$ с интегрируемым квадратом, является системой, удов-

---

* Выражаю благодарность С. Н. Андрианову и Е. Д. Меньшову за ряд ценных указаний по поводу различных деталей настоящей работы.

летворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]+\lambda_n q(x)\varphi_n(x)=0, \tag{3}$$

где λ_n — *некоторые постоянные числа, и условию*

$$p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=b}=p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=a}=0. \tag{4}$$

Ортогональная система, удовлетворяющая всем этим условиям, будет единственной, если $p(x)$ *в точках* a *и* b *не обращается одновременно в нуль или если обращается в них одновременно в нуль, то имеет вид* $(x-c)^{\alpha}E(x)$, *где* $\alpha>0$, $E(x)$ *непрерывна при* $x=c$, $E(c)\neq 0$ *и* c *равно одному из чисел* a *или* b.*

Для доказательства теоремы предположим, что $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$ образуют замкнутую ортонормированную относительно $p(x)$ систему, система $\varphi_n(x)$ содержит единицу, а $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая условию

$$f(a)=f(b)=0.$$

Пусть разложение $f'(x)$ по системе $\varphi_n'(x)$ имеет вид

$$\sum_{n-1}^{\infty}a_n\varphi_n'(x) \quad **. \tag{5}$$

Очевидно,

$$a_n=\int_a^b p(x)f'(x)\varphi_n'(x)\,dx=$$

$$=p(x)f(x)\varphi_n'(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_n'(x)]\,dx=$$

$$=-\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_n'(x)]\,dx. \tag{6}$$

Легко показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n[\varphi_n(x)-\varphi_n(a)],$$

полученный интегрированием ряда (5) по какому-либо отрезку $[a, x]$, равномерно сходится к $f(x)$, если интеграл

$$\int_a^x\frac{dx}{p(x)}$$

* Величина α имеет вообще различные значения для $c=a$ и для $c=b$.

** Мы предполагаем, что $\varphi_n'(x)$ образуют *нормированную* систему. Тогда система функций $\varphi_n(x)$ вообще не будет нормированной.

существует. Действительно,

$$\left| \int_a^x \left[f'(x) - \sum_{n=1}^m a_n \varphi_n'(x) \right] dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b p(x) \left[f'(x) - \sum_{n=1}^m a_n \varphi_n'(x) \right]^2 dx \int_a^b \frac{dx}{p(x)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

откуда вследствие полноты системы $\varphi_n'(x)$ и следует справедливость утверждения. Так как $\varphi_n(x)$ образуют ортогональную относительно $q(x)$ систему, содержащую единицу, то, если $\varphi_n(x) \not\equiv 1$,

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\, q(x)\, \varphi_n(x)\, dx}{\int_a^b q(x)\, [\varphi_n(x)]^2\, dx},$$

или, положив

$$\int_a^b q(x)\, [\varphi_n(x)]^2\, dx = \frac{1}{\lambda_n},$$

получим

$$a_n = \lambda_n \int_a^b f(x)\, q(x)\, \varphi_n(x)\, dx.$$

Следовательно, на основании (6), если $\varphi_n(x)$ не равно тождественно единице, имеем

$$\int_a^b f(x) \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right] + \lambda_n q(x)\, \varphi_n(x) \right\} dx = 0.$$

В силу основной леммы вариационного исчисления

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right] + \lambda_n q(x)\, \varphi_n(x) = 0 \qquad (7)$$

всюду на отрезке $[a, b]$. Если теперь $\varphi_n(x)$ равна тождественно единице, то она удовлетворяет уравнению (7) при $\lambda_n = 0$.

Итак, системы, удовлетворяющие условию теоремы, удовлетворяют уравнению (7). Но если функции $\varphi_n(x)$ системы удовлетворяют уравнению (7) и ортогональны относительно $q(x)$, то при $n \neq m$ и для $\varphi_m(x) \not\equiv 1$

$$0 = \int_a^b q(x)\, \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = -\frac{1}{\lambda_m} \int^b \varphi_n(x) \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_m(x)}{dx} \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_m} p(x)\, \varphi_n(x) \frac{d\varphi_m(x)}{dx} \Big|_a^b + \frac{1}{\lambda_m} \int_a p(x) \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \frac{d\varphi_m(x)}{dx}\, dx. \qquad (8)$$

Отсюда, вследствие ортогональности производных $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$ относительно $p(x)$, получаем $(n \neq m)$

$$p(x)\, \varphi_n(x) \frac{d\varphi_m(x)}{dx} \Big|_{x=b} - p(x)\, \varphi_n(x) \frac{d\varphi_m(x)}{dx} \Big|_{x=a} = 0. \qquad (9)$$

Если же $\varphi_m(x) \equiv 1$, то равенство (9), очевидно, также справедливо. Изучим граничные условия, которым удовлетворяют функции $\varphi_n(x)$,

удовлетворяющие условиям теоремы. Так как по условиям теоремы система $\varphi_n(x)$ содержит единицу, то, полагая в (9) $\varphi_n(x)=1$, получаем

$$p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\Big|_{x=b}-p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\Big|_{x=a}=0. \tag{10}$$

Равенство (10) вместе с (9) дает, что или все функции $\varphi_n(x)$, кроме, быть может, одной, удовлетворяют условиям

$$\varphi_m(b)-\varphi_m(a)=0, \tag{11}$$

или же при всяком m

$$p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\Big|_{x=b}=p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\Big|_{x=a}=0. \tag{12}$$

Но условия (11) противоречат предположению замкнутости системы

$$\frac{d\varphi_m(x)}{dx}, \tag{13}$$

так как в этом случае функция

$$\omega(x)=\frac{1}{p(x)}$$

ортогональна всем функциям (13), кроме, быть может, одной, относительно $p(x)$ и, вследствие замкнутости системы (13), она содержит функцию $\frac{1}{p(x)}$ *. Следовательно, система $\varphi_m(x)$ должна содержать функцию

$$C'\int\limits_a^x\frac{dx}{p(x)}+C,$$

где C и C' — некоторые постоянные величины и $C'\neq 0$. Но тогда второе условие (11) дает

$$\int\limits_a^b\frac{dx}{p(x)}=0,$$

что невозможно вследствие постоянства знака $p(x)$.

Докажем обратно, что всякая система $\varphi_n(x)$, состоящая из всех функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (7) для каких-либо λ_n и условию (12), ортогональна относительно $q(x)$, содержит единицу, а система (13) ортогональна относительно $p(x)$ и замкнута. При этом мы будем предполагать, что все числа λ_n различны.

Ортогональность систем $\varphi_n(x)$ и $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$ непосредственно следует из уравнения (7) и условия (12). Докажем, что система (13) замкнута.

---

* В самом деле, если $\frac{1}{p(x)}$ ортогональна относительно $p(x)$ ко всем функциям $\frac{d\varphi_m(x)}{dx}$ для $m\neq m_0$, где m_0 — некоторое определенное число, то $\frac{1}{p(x)}=$ $=C'\frac{d\varphi_{m_0}(x)}{dx}+\sum\limits_{m\neq m_0}C_m\frac{d\varphi_m(x)}{dx}$, где $C_m=0$ для $m\neq m_0$. Тогда $\frac{1}{p(x)}=$ $=C'\frac{d\varphi_{m_0}(x)}{dx}$.

Система $\varphi_n(x)$, как состоящая из всех собственных функций самосопряженного уравнения (7), удовлетворяющих условию (12), замкнута. Если бы система (13) была не замкнута, существовала бы такая функция $\psi(x)$ с интегрируемым квадратом, не равная тождественно 0, что для любого n

$$\int_a^b p(x)\,\psi(x)\,\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\,dx=0. \tag{14}$$

Пусть

$$\int_a^x \psi(x)\,dx=\psi_1(x).$$

Тогда

$$\int_a^b p(x)\,\psi(x)\,\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\,dx=p(x)\,\psi_1(x)\,\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_a^b-$$

$$-\int_a^b \psi_1(x)\,\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]dx,$$

откуда на основании (7), (12) и (14)

$$\lambda_n\int_a^b \psi_1(x)\,q(x)\,\varphi_n(x)\,dx=0,$$

т. е. $\psi_1(x)$ ортогональна всем функциям $\varphi_n(x)$, не равным тождественно единице *, что вследствие замкнутости этой системы невозможно, так как $\psi_1(a)=0$ и, следовательно, $\psi_1(x)$ не может тождественно равняться единице.

Докажем теперь, что каждому значению λ_n соответствует не более одного решения уравнения (7), удовлетворяющего условиям (4), условию $\int_a^b p(x)\,[\varphi_n'(x)]^2\,dx<+\infty$ и имеющего вид $(x-a)^{\alpha_1}f_1(x)$ и $(x-b)^{\alpha_2}f_2(x)$ соответственно в окрестностях точек $x=a$ и $x=b$, где α_1 и α_2 — постоянные числа, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывны и имеют непрерывные производные соответственно при $x=a$ и при $x=b$, причем $f_1(a)\neq 0$ и $f_2(b)\neq 0$.

Если не имеем одновременно

$$p(b)=0,\quad p(a)=0,$$

то все функции системы удовлетворяют по крайней мере одному из условий

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=b}=0,\qquad \frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=a}=0, \tag{15}$$

а именно эти условия удовлетворяются для той точки из a, b, в которой $p(x)\neq 0$. Пусть, например, все функции удовлетворяют условию

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=b}=0. \tag{16}$$

* Если $\varphi_n(x)\neq 1$, то $\lambda_n\neq 0$.

Если бы для некоторого λ_n существовали две различные функции, удовлетворяющие уравнению (7) при данном λ_n и условию (16), то общий интеграл уравнения (7) удовлетворял бы этому условию (16), что невозможно.

Рассмотрим случай, когда одновременно

$$p(b)=0, \quad p(a)=0.$$

Пусть

$$p(x)=(x-b)^{\alpha} E(x) \quad (\alpha>0),$$

где $E(x)$ непрерывна при $x=b$ и $E(b) \neq 0$. Положим

$$\varphi_n(x)=(x-b)^{\beta} F_n(x),$$

где $F_n(x)$ непрерывна, имеет непрерывную производную при $x=b$ и $F_n(b) \neq 0$.

Тогда из существования интеграла

$$\int_a^b p(x)\left[\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]^2 dx$$

следует, что

$$\beta>\frac{1-\alpha}{2}. \tag{17}$$

Предположим, что существует второй интеграл $\psi_n(x)$ уравнения (7) линейно-независимый от $\varphi_n(x)$. Тогда, по предположению, интеграл

$$\int_a^b p(x)\left[\psi_n'(x)\right]^2 dx \tag{18}$$

существует. Кроме того,

$$\psi_n(x)=(x-b)^{\gamma} \Omega_n(x),$$

где γ — постоянное число, $\Omega_n(x)$ — непрерывна и имеет непрерывную производную при $x=b$, причем $\Omega_n(b) \neq 0$. Тогда из существования интеграла (18) следует, что

$$\gamma>\frac{1-\alpha}{2}. \tag{19}$$

Но, положив

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x) \int_b^x \omega_n(x)\, dx \; *$$

для значений x, близких к b, найдем из уравнения (7), что $\omega_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega_n(x)}{dx}+\left[\frac{2}{\varphi_n(x)} \frac{d\varphi_n(x)}{dx}+\frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx}\right] \omega_n(x)=0.$$

Следовательно,

$$\omega_n(x)=C \frac{1}{p(x)\left[\varphi_n(x)\right]^2},$$

---

* Так как функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ входят в доказательство равноправно, то, не уменьшая общности, мы можем предположить, что $\gamma \geqslant \beta$, а тогда отношение $\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)}=(x-b)^{\gamma-\beta} \frac{\Omega_n(x)}{F_n(x)}$ имеет суммируемую производную $\omega_n(x)$ во всех точках $x<b$ и достаточно близких к b.

где C — постоянная величина и

$$\psi_n(x) = C \cdot \psi_n(x) \int_b^x \frac{dx}{p(x)\,[\varphi_n(x)]^2}.$$

Отсюда $\gamma = 1 - \beta - \alpha$. Но тогда неравенство (19) дает

$$\beta < \frac{1-\alpha}{2},$$

что противоречит неравенству (17).

Следовательно, уравнение (7) для любого λ_n не может иметь двух линейно-независимых интегралов, удовлетворяющих условиям (12), для которых существуют интегралы типа (18).

Нетрудно показать, что входящие в условия теоремы требования замкнутости системы $\varphi_n'(x)$ и содержания единицы в системе $\varphi_n(x)$ существенны.

Действительно, пусть система $\varphi_n(x)$ не содержит единицы. Подберем постоянные C_n так, чтобы система

$$\omega_n(x) = \varphi_n(x) + C_n$$

была ортогональна относительно $q(x)$.

Если $\varphi_n(x)$ нормированы, то, положив

$$\int_a^b q(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \alpha_n, \quad \int_a^b q(x)\,dx = \beta,$$

из условия ортогональности $\omega_n(x)$ и $\omega_m(x)$ находим

$$C_n\alpha_m + C_m\alpha_n + C_nC_m\beta = 0 \quad (n \neq m), \tag{20}$$

причем так как система $\varphi_n(x)$ не содержит единицы, то по крайней мере одна из величин $\alpha_m \neq 0$.

Предположим сначала, что для данного m

$$\alpha_m + C_m\beta \neq 0.$$

Из (20) находим

$$C_n = -\frac{\alpha_n C_m}{\alpha_m + C_m\beta} \quad (n \neq m).$$

Точно так же

$$C_p = -\frac{\alpha_p C_m}{\alpha_m + C_m\beta} \quad (p \neq m).$$

Подставив значения C_n и C_p в соотношение

$$C_n\alpha_p + C_p\alpha_n + C_nC_p\beta = 0,$$

получим

$$-2\alpha_n\alpha_p C_m(\alpha_m + C_m\beta) + \alpha_n\alpha_p\beta C_m^2 = 0. \tag{21}$$

Равенство (21) удовлетворяется, если

$$C_m = 0 \quad \text{или} \quad C_m = -\frac{2\alpha_m}{\beta}.$$

Так как $\alpha_m \neq 0$, то второе значение C_m также не равно нулю. Следовательно, для этого значения C_m

$$\omega_m(x) \neq \varphi_m(x).$$

Но если положить

$$C_m = -\frac{2\alpha_m}{\beta},$$

то

$$\alpha_m + C_m\beta = -\alpha_m \neq 0,$$

что оправдывает сделанное вначале предположение.

Легко показать, что полученная функция $\omega_m(x)$ не только не равна $\varphi_m(x)$, но не может равняться и никакой другой функции $\varphi_n(x)$. Действительно, предположим, что при каком-либо n

$$\omega_m(x) = \varphi_n(x).$$

Тогда на основании уравнения (3)

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\right] + \lambda_m q(x)\varphi_m(x) = 0$$

и

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\right] + \lambda_n q(x)[\varphi_m(x) + C_m] = 0.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$(\lambda_n - \lambda_m) q(x)\varphi_m(x) + \lambda_n C_m q(x) = 0.$$

Так как $q(x)$ лишь в отдельных точках может обращаться в нуль, то вследствие непрерывности $\varphi_m(x)$ получаем, что всюду в $[a, b]$

$$(\lambda_n - \lambda_m)\varphi_m(x) + \lambda_n C_m = 0,$$

т. е. $\varphi_m(x) = \text{const}$ *, что невозможно, так как по предположению система $\varphi_n(x)$ не содержит единицы.

Итак, если система $\varphi_m(x)$ не содержит единицы, то наряду с системой $\varphi_m(x)$ и система функций

$$\omega_m(x) = \varphi_m(x) - \frac{2\alpha_m}{\beta}$$

ортогональна относительно $q(x)$, а система их производных ортогонально $p(x)$, причем по крайней мере одна из функций $\omega_m(x)$ не равна ни одной из функций $\varphi_n(x)$.

Если $\varphi'_m(x)$ образуют замкнутую систему, то и $\omega'_m(x)$ образуют замкнутую систему. Итак, если отбросить условие, что система $\varphi_m(x)$ содержит единицу, то искомая система не будет единственной и может даже состоять из функций, не удовлетворяющих уравнению (7) ни при каком значении λ. Например, если $p(x) = q(x) = 1$, то система

$$\cos\frac{2n+1}{2}x, \quad \sin\frac{2n+1}{2}x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

---

* В этом доказательстве мы предполагаем, что каждому значению λ_n соответствует не более одного решения уравнений (7), удовлетворяющего условиям (4).

и точно так же система, образованная из ее первых производных, ортогональна для отрезка ортогональности $[0,2\pi]$ и замкнута.

Наряду с системой (22) этими свойствами обладает и система

$$\cos\frac{2n+1}{2}x-\frac{2}{(2n+1)\pi},\qquad \sin\frac{2n+1}{2}x-\frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

Точно так же, если система $\varphi_m(x)$ не содержит единицы, то она может состоять из функций, удовлетворяющих уравнению (7) и условию

$$p(x)\varphi_n(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\Big|_{x=b}-p(x)\varphi_n(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\Big|_{x=a}=0. \tag{23}$$

Но условию (23) могут удовлетворять различные системы функций, например системы, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_n(b)=\varphi_n(a)=0, \tag{24}$$

или условиям

$$\varphi_n(b)=\varphi_n(a),\quad p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=b}=p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=a}, \tag{25}$$

или же условиям

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=b}=\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_{x=a},\quad p(b)\varphi_n(b)=p(a)\varphi_n(a).$$

Так, при $p(x)=q(x)=1$, $a=0$, $b=2\pi$ условиям (23) удовлетворяет система

$$\sin\frac{n}{2}x\quad (n=1, 2, \ldots), \tag{26}$$

условиям (24) удовлетворяет система

$$1, \cos nx, \sin nx\quad (n=1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Система (27), хотя и содержит единицу, но система, образованная из ее первых производных, незамкнутая и может быть пополнена единицей. Этот пример показывает, что требование замкнутости системы $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$ является существенным для справедливости теоремы. Так как система (26) не содержит единицы, то, исходя из нее, можно построить систему

$$\sin\frac{n}{2}x+a_n.$$

Последняя система состоит из функций

$$\sin\frac{n}{2}x-\frac{2[1+(-1)^{n+1}]}{n\pi}.$$

Если система $\varphi_n'(x)$ не замкнута, то система $\varphi_n(x)$ может состоять из функций, удовлетворяющих уравнению (7) и условию (24). Интересно было бы отыскать все системы ортогональных относительно $q(x)$ функций, производные которых образуют ортогональную относительно $p(x)$ систему.

Укажем некоторые примеры ортогональных систем, удовлетворяющих условиям теоремы.

Если $p(x)=q(x)=1$, $a=0$, $b=2\pi$, то условиям теоремы удовлетворяет лишь система

$$1, \cos\frac{x}{2}, \cos x, \ldots, \cos\frac{n}{2}x.$$

Если $p(x)=q(x)=x$, $a=0$, $b=1$, то такой системой будет лишь система функций Бесселя

$$I_0(\lambda_n x),$$

где λ_n — корни уравнения

$$I_1(\lambda)=0.$$

Пользуясь методом, изложенным в настоящей работе, можно решить и следующую задачу: найти ортогональные относительно $q(x)$ функции, k-е производные которых образуют ортогональную относительно $p(x)$ систему.

Как и для случая $k=1$, для единственности системы в случае ее замкнутости на искомые функции нужно наложить дополнительные условия.

Казанский государственный университет

Поступило
20. XI. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gagaeff B., Sur l'unicité du système de fonctions orthogonales invariant relativement à la dérivation, C. R. **188** (1929), 222—224.

[2] Гнеденко Б., О единственности системы ортогональных функций, инвариантной относительно дифференцирования, Доклады Ак. Наук СССР, **14** (1939), 159—161.

B. GAGAEFF. SUR QUELQUES CLASSES DE FONCTIONS ORTHOGONALES

RÉSUMÉ

On demontre le théorème suivant:

Si les fonctions $\varphi_n(x)$ sont orthogonales par rapport à $q(x)$,

$$\int_a^b q(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx=0 \qquad (n\neq m),$$

leurs premières dérivées $\varphi_n'(x)$ sont orthogonales par rapport à $p(x)$,

$$\int_a^b p(x)\varphi_n'(x)\varphi_m'(x)\,dx=0 \qquad (n\neq m),$$

les fonctions $\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]$, $q(x)$, $\varphi_n(x)$ sont continues, le système de leurs dérivées est fermé et $\{\varphi_n\}$ contient l'unité, alors le système $\varphi_n(x)$ est unique, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]+\lambda_n q(x)\varphi_n(x)=0$$

et vérifie la condition

$$p(x)\frac{d\varphi_n(y)}{dx}\bigg|_{x=b}=p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\bigg|_{x=a}=0.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 207—256 Série mathématique

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В СРЕДНЕМ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе изучается приближение принадлежащих к различным классам функций f периода 2π тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x)$ данного порядка $n-1$, причем в качестве меры приближения берется величина

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - T_{n-1}(x)|\, dx.$$

Устанавливается также связь этих приближений (в среднем) с обычными (равномерными) приближениями.

§ 1. Введение

За последнее десятилетие математическая литература обогатилась рядом работ, в которых получены точные и асимптотические оценки приближений периодических функций тригонометрическими полиномами. К числу их относятся работы А. Н. Колмогорова, J. Favard'а, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, B. Nagy и автора*.

Во всех этих работах рассматривался некоторый класс $\mathfrak{M}$ функций f и некоторый метод приближения U_n, приводящий в соответствие каждой функции f из $\mathfrak{M}$ приближающий ее тригонометрический полином $U_n(f, x)$ порядка ниже n, а также решалась задача о нахождении верхней грани

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \max_x |f(x) - U_n(f, x)|$$

уклонений (равномерных) функций f от их приближений, распространенной на класс $\mathfrak{M}$, либо задача о нахождении верхней грани вида

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M}, x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |f(x) - U_n(f, x)|.$$

В данной работе рассматриваются подобные задачи, но основной целью является получение оценок, когда за отклонение функции f от ее приближения принимается величина

$$\|f - U_n(f)\|_L = \int_0^{2\pi} |f(t) - U_n(f, t)|\, dt,$$

характеризующая приближение в среднем.

---

* См. цитированную литературу.

В § 2 доказываются две элементарные теоремы, принадлежащие к теории линейных нормированных пространств Banach'a [3], и даются некоторые приложения этих теорем применительно к пространствам (M) и (L).

Как обычно, (M) обозначает пространство ограниченных измеримых на некотором интервале (a, b) функций f с нормой, равной существенному максимуму $\|f\|_M = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \operatorname{vrai} |f(t)|$ ее абсолютной величины на этом интервале, а (L) — пространство суммируемых на (a, b) функций f с нормой $\|f\|_L = \int\limits_a^b |f(t)|\,dt$.

Обозначения (M) и (L) сохраняются также для пространств периодических функций периода ω (или 2π), соответственно ограниченных или суммируемых на $(0, \omega)$, с нормами

$$\|f\|_M = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \operatorname{vrai} |f(t)| \quad \text{или} \quad \|f\|_L = \int\limits_0^\omega |f(t)|\,dt.$$

В § 3 дается решение следующей задачи: пусть $W^{(r)}LK$ обозначает класс функций f периода 2π, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и производную $f^{(r)}$ порядка r, для которой

$$\|f^{(r)}\|_L = \int\limits_0^{2\pi} |f^{(r)}(t)|\,dt \leqslant K.$$

Зададим систему $\{\lambda\}$ чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ и приведем в соответствие каждой функции f из класса $W^{(r)}LK$ ее приближение в виде тригонометрической суммы вида

$$U_n(f, \lambda) = U_n(f, \lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.1}$$

Требуется определить верхнюю грань

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}LK; \lambda)_L = \sup \|f - U_n(f, \lambda)\|_L. \tag{1.2}$$

Обозначим через $W^{(r)}MK$ класс функций f периода 2π, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и ограниченную производную r-го порядка $f^{(r)}$, для которой $\|f^{(r)}\|_M \leqslant K$, и пусть

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}MK; \lambda)_M = \sup_{f \in W^{(r)}MK} \|f - U_n(f, \lambda)\|_M. \tag{1.3}$$

Оказывается, между величинами (1.2) и (1.3) существует тесная связь. Именно, при любой системе чисел $\{\lambda\}$ имеет место неравенство

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}LK; \lambda)_L \leqslant \mathscr{E}_n(W^{(r)}MK; \lambda)_M, \tag{1.4}$$

которое в ряде интересных случаев (сумм Фурье, сумм Фейера, наилучших линейных методов приближения) обращается в точное или асимптотическое равенство.

§ 4 посвящён установлению этого асимптотического равенства в случае сумм Фурье ($\lambda_k=1$). Асимптотическое выражение правой части (1.4) для этого случая было дано А. Н. Колмогоровым. Доказывается, что левая часть (1.4) асимптотически равна правой.

В § 4 даются также оценки для верхних граней уклонений аналитических периода 2π функций, заданных в некоторой полосе комплексной плоскости, содержащей посредине действительную ось, от их сумм Фурье (в случаях M и L).

В § 5 даются оценки левой части (1.4) в случае сумм Фейера $\left(\lambda_k=\frac{n-k}{n}\right)$, для которых асимптотическое выражение правой части уже известно из прежних работ автора.

В § 6 исследуется задача о нахождении верхней грани наилучших приближений при помощи тригонометрических полиномов порядка $(n-1)$ функций f вида

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\varphi(t)\,dt,$$

где $K(t)$ — заданное суммируемое периода 2π ядро. При этом рассматриваются два случая:

1) Случай (M), когда φ пробегает класс H_M ограниченных с $\|\varphi\|_M\leqslant 1$ функций периода 2π, вообще говоря, ортогональных к тригонометрическим полиномам данного порядка. В этом случае наилучшие приближения $E_n(f)_M$ функций f понимаются в обычном смысле, т. е. как равномерные ($E_n(f)_M=E_n(f)$).

2) Случай (L), когда φ пробегает класс H_L суммируемых периода 2π функций с $\|\varphi\|_L\leqslant 1$, удовлетворяющих тем же условиям ортогональности. В этом случае наилучшее приближение $E_n(f)_L$ функций f понимается в среднем:

$$E_n(f)_L=\min_{T_{n-1}}\|f-T_{n-1}\|_L$$

(минимум берется по всем тригонометрическим полиномам T_{n-1} порядка $n-1$).

Случай (M) для отдельных, важных в приложениях, ядер рассматривался в работах J. Favard'a, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна и B. Nagy. Каждое из рассмотренных в этих работах ядер обладало тем свойством, что к нему можно было подобрать (интерполяционный) тригонометрический полином T^*_{n-1} порядка $n-1$, такой, что функция $K_*(t)=K(t)-T^*_{n-1}(t)$ обращалась в нуль с переменой знака в $2n$ равноотстоящих точках и только в них. На основании этого доказывалось, что

$$\sup_{\varphi\in H_M} E_n(f)_M=\min_{T_{n-1}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K(t)-T_{n-1}(t)|\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K_*(t)|\,dt, \qquad (1.5)$$

где минимум распространен на все тригонометрические полиномы T_{n-1} порядка $n-1$. Эти равенства и являлись решающими для получения нужных оценок.

В § 6 доказывается, в частности, что равенства (1.5) имеют место, если ядро $K(t)$ удовлетворяет следующему более общему условию:

Условие (A_n^*). Существует тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка T_{n-1}^* и положительное число $\lambda \leqslant \frac{\pi}{n}$ такое, что если

$$K_n(t) = K(t) - T_{n-1}^*(t) \quad \text{и} \quad \varphi_*(t) = \operatorname{sign} K_*(t),$$

то

$$\varphi_*(t+\lambda) = -\varphi_*(t)$$

для почти всех t.

Это условие является не только достаточным для выполнения (1.5), но и *необходимым*, если разность $K(t) - T_{n-1}(t)$, где $T_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином, обращается в нуль на множестве меры нуль, что обычно имеет место вследствие аналитического характера $K(t)$.

Равенства (1.5) остаются в силе при выполнении условия (A_n^*), если в них заменить M на L. Установленне этого факта, а также связи, которая возникает при этом между случаями M и L, является основной целью § 6.

В § 7 приводятся оценки верхних граней наилучших приближений $E_n(f)_L$ в среднем в ряде случаев, рассмотренных для $E_n(f)_M$ в упомянутых выше работах.

§ 2. Общие теоремы

ТЕОРЕМА 1. *Пусть E обозначает пространство элементов $x, y, \ldots$ Банаха и $F, F_1, F_2, \ldots, F_n$ — линейные функционалы, определенные на E. Если H — подпространство элементов $x \in E$, для которых одновременно $F_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то имеет место равенство*

$$\min_{\lambda} \left\| F - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k \right\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\, x \in H} F(x), \tag{2.1}$$

где минимум распространен на всевозможные системы чисел λ_k, а верхняя грань — на всевозможные элементы $x \in H$ с $\|x\| \leqslant 1$.

Если $x_0 \in H$, $\|x_0\| = 1$ и $F(x_0) = \|F\|$, то минимум (2.1) достигается для $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Будем считать, что функционалы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ линейно независимы; в противном случае к этому задачу всегда можно свести.

Существует система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что $F_k(x_i) = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Если $x \in E$, то элемент u, определяемый равенством

$$x = \sum_{k=1}^{n} F_k(x) x_k + u, \tag{2.2}$$

принадлежит, очевидно, к H.

Правая часть (2.1) представляет собой норму $\|F\|_H$ линейного функционала F, рассматриваемого на подпространстве H. Пусть Φ — его

любое продолжение на E, т. е. Φ есть линейный функционал, определенный на E, такой, что $\Phi(x)=F(x)$ для $x \in H$. На основании (2.2)

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\Phi(x_k)+F(u)=\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\Phi(x_k)+F(x)-$$
$$-\sum_{k=1}^{n} F_k(x)F(x_k)=F(x)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k(x), \tag{2.3}$$
$$\lambda_k=F(x_k)-\Phi(x_k) \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, всякое продолжение Φ функционала F, заданного на H, имеет вид (2.3), где λ_k — соответствующим образом подобранные числа. При этом очевидно

$$\left\| F-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k\right\| \geqslant \| F\|_H.$$

С другой стороны, существует, как известно, продолжение, сохраняющее норму. Этим равенство (2.1) доказано.

Если $x_0 \in H$, $\|x_0\|=1$ и $F(x_0)=\|F\|$, то для любых чисел λ_k

$$\left\| F-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k\right\| \geqslant F(x_0)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k(x_0)=F(x_0)=\|F\|,$$

что доказывает вторую часть теоремы 1.

ЛЕММА. *Если F — линейный функционал, определенный в пространстве E Банаха, и L — подпространство элементов $x \in E$, на которых $F(x)=0$, то для любого $x \in E$*

$$|F(x)|=\|F\|=r(x, L), \tag{2.4}$$

где $r(x, L)$ — расстояние элемента x до L, т. е.

$$r(x, L)=\inf_{u\in L}\|x-u\|.$$

Доказательство. Если $x \in E$ и $u \in L$, то

$$|F(x)|=F(x-u)\leqslant \|F\|\,\|x-u\|$$

и так как это неравенство справедливо для всех $u \in L$, то

$$|F(x)|\leqslant \|F\|\, r(x, L).$$

С другой стороны, как бы ни было мало $\varepsilon>0$, существует элемент $x_0 \in E$ с $\|x_0\|=1$ такой, что

$$|F(x_0)|>\|F\|-\varepsilon.$$

Всегда можно элемент x представить в виде $x=\alpha x_0+u'$, где α — некоторое число, а $u' \in L$. Поэтому, приняв во внимание очевидное равенство

$$r(x, L)=|\alpha|\, r(x_0, L),$$

будем иметь

$$|F(x)|=|\alpha F(x_0)|>(\|F\|-\varepsilon)|\alpha|\,\|x_0\|\geqslant$$
$$\geqslant(\|F\|-\varepsilon)|\alpha|\, r(x_0, L)=(\|F\|-\varepsilon)\, r(x, L,$$

что в силу произвольности ε влечет неравенство

$$|F(x)|\geqslant\|F\|\, r(x, L).$$

Таким образом, равенства (2.4) доказаны.

Заметим, что если x — элемент пространства Банаха и F — линейный функционал, определенный в E с $\|F\| \leqslant 1$, то $|F(x)| \leqslant \|x\|$. С другой стороны, существует линейный функционал F, для которого $F(x) = \|x\|$. Поэтому

$$\|x\| = \max_{\|F\| \in 1} \|F(x)\|,$$

причем максимум в правой части достигается.

ТЕОРЕМА 2. *Если $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — элементы пространства E Банаха, то*

$$\min_{\lambda} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| = \max_{\|F\| \in 1,\, F(x_k)=0} F(x), \tag{2.5}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где минимум распространен на всевозможные системы чисел λ_k, а максимум — на всевозможные линейные функционалы F, определенные на E с $\|F\| \leqslant 1$, удовлетворяющие равенствам $F(x_k) = 0$. Правая часть (2.5) достигается для некоторого функционала F.

Если для элемента x существует только один функционал F_0 с $\|F_0\| \leqslant 1$, для которого $F_0(x) = \|x\|$, и левая часть (2.5) достигает минимума при $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $F_0(x_k) = 0$ для всех k.

Доказательство. Обозначим через R' линейное подпространство E элементов вида $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Будем считать, что x не принадлежит к R', в противном случае равенство (2.5) тривиально. Пусть минимум (2.5) достигается для чисел $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)}$, $z = x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{0} x_k$ и R — наименьшее линейное подпространство, содержащее z и R'. Всякий элемент $x \in R$ можно, очевидно, единственным образом представить в виде суммы $x = \alpha z + u$, где α — число, а $u \in R'$. Определим в R линейный функционал F_1 при помощи равенств:

$$F_1(z) = \|z\|, \quad F_1(u) = 0 \text{ для } u \in R';$$

тогда на основании леммы

$$|F_1(z)| = \|F_1\|_R \, r(z, R') \leqslant \|F_1\|_R \, \|z\|$$

и так как $|F_1(z)| = \|z\|$, то $\|F_1\|_R = 1$. Продолжим теперь функционал F_1 на E с сохранением нормы. В результате получим

$$\min_{\lambda} \left\| x - \sum_{k} \lambda_k x_k \right\| = \|z\| = F_1\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(0)} x_k \right) = F_1(x),$$

причем

$$\|F_1\| = 1, \quad F_1(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Первая часть теоремы доказана. Далее, из самого доказательства следует существование линейного функционала F, удовлетворяющего

условиям $\|F\| \leqslant 1$, $F(x_k)=0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, для которого достигается максимум правой части (2.5), а это доказывает вторую часть теоремы.

Следствие 1. *Если $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — функции, суммируемые на сегменте $[a, b]$, и одновременно имеют место равенства*

$$\int_a^b \varphi_k(t) \operatorname{sign} f(t)\, dt = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{2.6}$$

то

$$\min_\lambda \int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(t) \right| dt = \int_a^b |f(t)|\, dt. \tag{2.7}$$

Наоборот, если множество значений t сегмента $[a, b]$, на котором $f(t)=0$, имеет меру нуль, то из (2.7) будет следовать (2.6).

Доказательство. Из (2.6) следует для любых чисел λ_k

$$\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(t) \right| dt \geqslant \int_a^b \left\{ f(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(t) \right\} \operatorname{sign} f(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b f(t) \operatorname{sign} f(t)\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Чтобы доказать вторую часть следствия, будем трактовать $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ как элементы пространства (L) суммируемых на $[a, b]$ функций, а интеграл $F(\psi) = \int_a^b g(t)\psi(t)\, dt$, где g — ограниченная измеримая на $[a, b]$ функция и $\psi \in (L)$, — как линейный функционал $F(\psi)$, определенный в (L). Тогда $\|F\| = \sup_t \operatorname{vrai} |g(t)|$ и равенство (2.7) на основании теоремы 2 можно записать в виде

$$\min_\lambda \left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|_L = \|f\|_L = \max_{\substack{|g(t)| \leqslant 1 \\ \int_a^b g(t)\varphi_k(t)\, dt = 0}} \int_a^b g(t) f(t)\, dt \tag{2.8}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n).$$

Но если множество, на котором $f(t)=0$, имеет меру нуль, то существует, с точностью до меры нуль, единственная функция $g_0(t) = \operatorname{sign} f(t)$, для которой

$$\max_{|g(t)| \leqslant 1} \int_a^b g(t) f(t)\, dt = \int_a^b g_0(t) f(t)\, dt = \|f\|_L.$$

Следовательно, на основании второй части теоремы 2, в этом случае из (2.8) или, что все равно, из (2.7) следует (2.6).

Следствие 2. *Пусть $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — функции, принадлежащие соответственно к пространствам (M) и (L), а $H_L^{(n)}$ и $H_M^{(n)}$ — множество элементов $h = h(t) \in L$ с $\|h\|_L \leqslant 1$ и, соответственно, множе-*

ство элементов $h \in M$ *с* $\|h\|_M \leqslant 1$, *удовлетворяющих условиям*

$$\int\limits_a h(t)\varphi_k(t)\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(*при* $n = 0$ *эти условия исключаются*). *Тогда имеют место равенства*

$$\min_{\lambda_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \right\|_M = \sup_{h \in H_L^{(n)}} \int\limits_a^b f(t)\,h(t)\,dt \tag{2.9}$$

и

$$\min_{\lambda_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \right\|_L = \sup_{h \in H_M^{(n)}} \int\limits_a^b f(t)\,h(t)\,dt. \tag{2.9'}$$

(*Для случая периодических функций нужно положить* $a = 0$, $b = \omega$).

Доказательство. Если функции $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ принадлежат к (M), то интегралы

$$F(h) = \int\limits_a^b f(t)\,h(t)\,dt, \quad F_k(h) = \int\limits_a^b \varphi_k(t)\,h(t)\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

можно рассматривать как линейные функционалы, определенные в пространстве $h \in (L)$. Если же функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ принадлежат к (L), то те же интегралы можно рассматривать как линейные функционалы, определенные в пространстве $h \in (M)$, причем

$$\left\| F - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \right\|_L.$$

Таким образом, равенства (2.9) и (2.9′) — частные случаи равенства (2.1).

Следствие 3. *Пусть* $(\tilde{L})$ *обозначает подпространство пространства* (L) *функций* h, *для которых выполняется дополнительное равенство*

$$\int\limits_a^b h(t)\,dt = 0 \tag{2.10}$$

и $f(x)$ — *непрерывная на* $[a, b]$ *функция. Тогда*

$$\sup_{\|h\|_{\tilde{L}} \leqslant 1} \int\limits_a^b f(t)\,h(t)\,dt = \frac{1}{2}\{\max_t f(t) - \min_t f(t)\} = \\ = \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2 \in [a,b]} \{f(t_1) - f(t_2)\}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Полагая в равенстве (2.9) $n = 1$ и $\varphi_1(t) = 1$, будем иметь

$$\sup_{\|h\|_{\tilde{L}} \leqslant 1} \int\limits_a^b f(t)\,h(t)\,dt = \min_\lambda \|f - \lambda\|_M = \min_\lambda \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - \lambda|;$$

при этом правая часть полученного равенства равна, очевидно, правой части (2.11).

Следствие 4. *Если $f \in (L)$ и $(\tilde{M})$ — подпространство пространства (M) функций $h(t)$, для которых выполняется дополнительное условие* (2.10), *то*

$$\sup_{\|h\|_{\tilde{M}} \leq 1} \int_a^b f(t)\, h(t)\, dt = \min_\lambda \int_b^a |f(t) + \lambda|\, dt. \tag{2.12}$$

Доказательство. Равенство (2.12) есть частный случай (2.9) когда $n = 1$ и $\varphi_1(t) = 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть (L) — пространство функций f периода ω, суммируемых на $[0, \omega]$, и $(\tilde{L})$ — его подпространство функций h, для которых имеет место* (2.10) *при $a = 0$, $b = \omega$. Если функция $K(t)$ принадлежит к (L), то*

$$I = \sup_{\|h\|_{\tilde{L}} \leq 1} \int_0^\omega \left| \int_0^\omega K(t - x)\, h(t)\, dt \right| dx = \frac{1}{2} \max_t \int_0^\omega |K(x) - K(t + x)|\, dx. \tag{2.13}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение пространство (M) функций $g = g(t)$, измеримых и ограниченных на $[0, \omega]$ с нормой $\|g\|_M = \sup_t \operatorname{vrai} |g(t)|$. Тогда, используя следствие 3, будем иметь

$$I = \sup_{\|h\|_{\tilde{L}} \leq 1} \left\{ \sup_{\|g\|_M \leq 1} \int_0^\omega g(x) \int_0^\omega K(t - x)\, h(t)\, dt\, dx \right\} =$$

$$= \sup_g \left\{ \int_0^\omega h(t) \int_0^\omega K(t - x)\, g(x)\, dx\, dt \right\} =$$

$$= \sup_g \left\{ \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2} \int_0^\omega [K(t_1 - x) - K(t_2 - x)]\, g(x)\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{t_1, t_2} \left\{ \sup_g \int_0^\omega [K(t_1 - x) - K(t_2 - x)]\, g(x)\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2} \int_0^\omega |K(t_1 - x) - K(t_2 - x)|\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \max_t \int_0^\omega |K(x) - K(t + x)|\, dx.$$

Примечание. Для любого значения t имеет место неравенство

$$\frac{1}{2} \int_0^\omega |K(x) - K(t + x)|\, dx \leqslant \int_0^\omega |K(x)|\, dx,$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, если

$$-K(t + x)\, K(x) \geqslant 0 \tag{2.14}$$

почти для всех x. Отсюда вытекает

Следствие 5. *Равенство*

$$\frac{1}{2}\max_t \int_0^\omega |K(x)-K(t+x)|\,dx = \int_0^\omega |K(x)|\,dx \qquad (2.15)$$

имеет место тогда и только тогда, если существует такое t, при котором почти всюду выполняется (2.14).

§ 3. Произвольные методы суммирования рядов Фурье

Пусть функция f принадлежит к классу $W^{(r)}LK$ (§ 1). Тогда, интегрируя по частям r раз коэффициенты Фурье f, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_1^{(r)}(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \qquad (3.1)$$

где $\varphi(t)=f^{(r)}(t)$ и

$$D_1^{(r)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}. \qquad (3.2)$$

При этом, в силу периодичности $f^{(r-1)}$,

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0. \qquad (3.3)$$

Обозначим через (L) пространство функций φ периода 2π, суммируемых на $[0, 2\pi]$, с нормой $\|\varphi\|_L=\int_0^{2\pi}|\varphi(t)|\,dt$, и через $(\tilde{L})$ — его подпространство функций, удовлетворяющих равенству (3.3). Тогда класс $W^{(r)}LK$ есть класс функций f вида (3.1), где $\varphi\in(\tilde{L})$ и $\|\varphi\|_{\tilde{L}}\leqslant K$.

Пусть теперь задан метод суммирования (1.1), определяемый некоторой заданной системой чисел λ_k. Если $f\in W^{(r)}LK$, то после интегрирования по частям получим

$$U_n(f;\lambda)=U_n(f,x,\lambda)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_\lambda(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \qquad (3.4)$$

где

$$K_\lambda(t)=K_{n\lambda}^{(r)}(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right).$$

Из (3.1) и (3.4) следует

$$f(x)-U_n(f,x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_\lambda(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \qquad (3.5)$$

где

$$\Psi_\lambda(t)=\Psi_{n\lambda}^{(r)}(t)=D_1^{(r)}(t)-K_{n\lambda}^{(r)}(t) \qquad (3.6)$$

и

$$\|f-U_n(f;\lambda)\|_L=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\Psi_\lambda(t-x)\,\varphi(t)\,dt\right|dx.$$

Отсюда, на основании теоремы 3 и при использовании обозначений (1.2), будем иметь

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L=\sup_{f\in W^{(r)}LK}\|f-U_n(f;\lambda)\|_L=$$

$$=\sup_{\|\varphi\|_{\tilde L}\in K}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\Psi_\lambda(t-x)\varphi(t)\,dt\right|dx=$$

$$=\frac{K}{2\pi}\max_t\int_0^{2\pi}|\Psi_\lambda(x)-\Psi_\lambda(t+x)|\,dx. \qquad (3.7)$$

Класс $W^{(r)}MK$ (§ 1) можно определить, как класс функций f, определяемых равенством (3.1), где φ принадлежит к подпространству $(\tilde M)$ пространства (M) ограниченных периода 2π функций с нормой $\|\varphi\|_M=\sup_t|\varphi(t)|$, удовлетворяющих дополнительному равенству (3.3). В силу равенств (3.5) и (2.12) при использовании обозначений (1.3) получим

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}MK;\lambda)_M=\sup_{f\in W^{(r)}MK}\sup_x|f(x)-U_n(f,x,\lambda)|=$$

$$=\sup_{\|\varphi\|_{\tilde M}\in K}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_\lambda(t)\varphi(t)\,dt=$$

$$=\frac{K}{\pi}\min_{\lambda_0}\int_0^{2\pi}|\Psi_\lambda(t)+\lambda_0|\,dt. \qquad (3.8)$$

Но каково бы ни было λ_0 и t,

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|\Psi_\lambda(x)-\Psi_\lambda(t+x)|\,dx\leqslant\int_0^{2\pi}|\Psi_\lambda(x)+\lambda_0|\,dx.$$

Сопоставление последнего неравенства с (3.7) и (3.8) дает

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L\leqslant\mathscr{E}_n(W^{(r)}MK;\lambda)_M. \qquad (3.9)$$

§ 4. Суммы Фурье

1. Сумма Фурье $S_n(f,x)$ функции f порядка $n-1$ есть частный случай (1.1) при $\lambda_k=1$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$. В этом случае

$$\Psi_\lambda(t)=D_n^{(r)}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}. \qquad (4.1)$$

Положим

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}LK;1)_L=\mathscr{E}_{S_n}(W^{(r)}LK)_L$$

и

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}MK;1)_M=\mathscr{E}_{S_n}(W^{(r)}MK)_M;$$

тогда на основании (3.7)

$$\mathscr{E}_{S_n}(W^{(r)}LK)_L=\frac{K}{2\pi}\max_t\int_0^{2\pi}|D_n^{(r)}(x)-D_n^{(r)}(t+x)|\,dx.$$

А. Н. Колмогоров ([7]) показал, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(W^{(r)}MK)_M = \frac{4K}{\pi^2}\frac{\lg n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4.2}$$

Покажем, что имеет место также равенство

$$\mathscr{E}_{S_n}(W^{(r)}LK)_L = \frac{4K}{\pi^2}\frac{\lg n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4.3}$$

Для этого, принимая во внимание общее неравенство (3.9), нужно только доказать, что левая часть (4.3) не меньше правой.

В упомянутой работе ([7]) показано, что если δ_n и δ'_n — переменные, имеющие порядок, в точности равный $O\left(\frac{1}{n}\right)$, и если функцию $D_n^{(r)}$ представить в виде

$$D_n^{(r)}(t) = -\frac{A_n^{(r)}(t)}{n^r} + \Phi_n^{(r)}(t), \tag{4.4}$$

где

$$A_n^{(r)}(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2}x + \frac{r\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}},$$

то

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta_n}^{2\pi-\delta'_n} |A_n^{(r)}|\, dt = \frac{4}{\pi^2}\lg n + O(1), \quad \int_{\delta_n}^{2\pi-\delta'_n} |\Phi_n^{(r)}|\, dt = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{4.5}$$

откуда при $t_n = \frac{2\pi}{2n-1}$, следует

$$\max_t \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(x) - D_n(t+x)|\, dx \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{2\pi-2t_n} |D_n(x) - D_n(t_n+x)|\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n^r}\int_{t_n}^{2\pi-2t_n} |A_n^{(r)}(x) - A_n^{(r)}(t_n+x)|\, dx + O\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi n^r}\int_{t_n}^{2\pi-2t_n}\left|\sin\left(\frac{2n-1}{2}x + \frac{r\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{x+t_n}{2}}\right)\right| dx +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^r}\right) = \frac{1}{2\pi n^r}\left(\int_{t_n}^{2\pi-2t_n} |A_n^{(r)}|\, dt + \int_{2t_n}^{2\pi-t_n} |A_n^{(r)}|\, dt\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\frac{\lg n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

и, таким образом, равенство (4.3) доказано.

Примечание 1. Равенство Колмогорова (4.2) впоследствии было доказано (см. ([11])) для дробного $r > 0$, когда производная понимается в смысле Weyl'я. Для произвольного дробного r справедливо также и равенство (4.3), так как соотношения (4.4) и (4.5) остаются в силе и в этом случае (см. ([11])).

Примечание 2. Можно было бы рассмотреть класс функций $\overline{W^{(r)}LK}$, сопряженных в смысле рядов Фурье к функциям класса .. LK, и, рассуждая аналогично, получить равенство

$$\mathcal{E}_{S_n}(\overline{W^{(r)}LK})_L = \frac{4}{\pi^2}\frac{\lg n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

2. Пусть A — множество функций F, обладающих следующим свойством: $F(w)$ $(w = t + iu)$ — аналитическая периода 2π функция в полосе $-h < u < h$, вещественная на вещественной оси.

Обозначим через $A_M\ K$ класс функций $F \in A$, для которых в полосе $-h < u < h$ выполняется

$$|\operatorname{Re} F(t + iu)| \leqslant K, \tag{4.6}$$

где $\operatorname{Re}F$ — вещественная часть F, и через A_LK — класс функций $F \in A$, для которых в той же полосе

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(t + iu)|\, dt \leqslant K. \tag{4.7}$$

Если функция $F \in A_MK$, то существует почти всюду предел

$$\lim_{u \to h} \operatorname{Re} F(t + iu) = \varphi(t)$$

и имеет место равенство, доказанное Н. И. Ахиезером (([1a]) или ([1b])):

$$F(w) = F(t + iu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t - \theta + iu)\,\varphi(t)\,dt, \tag{4.8}$$

где

$$H(t) = 1 + 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 + q^{2m}} \cos mt \qquad (q = e^{-h}). \tag{4.9}$$

Наоборот, если φ — вещественная измеримая периода 2π функция, удовлетворяющая условию $|\varphi(t)| < K$, то функция F, определяемая равенством (4.8), принадлежит к A^M.

Пусть теперь функция F принадлежит к классу A_LK. Получим для нее, несколько видоизменяя рассуждения Н. И. Ахиезера, равенство, аналогичное (4.8).

В силу периодичности $F(w)$ функция $F\left(\frac{1}{i}\lg z\right)$ в кольце $q < |z| < \frac{1}{q}$ $(q = e^{-h})$ регулярна. Поэтому в этом кольце имеет место разложение в ряд Лорана

$$F\left(\frac{1}{i}\lg z\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu z^\nu,$$

где

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\oint F\left(\frac{1}{i}\lg z\right)\frac{dz}{z^{\nu+1}} \quad (\nu = 0, \pm 1, \ldots)$$

и в качестве контура интегрирования можно взять окружность $|z| = r = e^{\sigma}$ $(-h < \sigma < h)$.

Таким образом,

$$c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta - i\sigma) e^{-\nu\sigma} e^{-i\nu\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta + i\sigma) e^{\sigma\nu} e^{-i\nu\theta} d\theta$$

и, приняв во внимание, что $F(\theta - i\sigma) = \overline{F(\theta + i\sigma)}$, получим

$$c_{\nu} \frac{e^{\nu\sigma} + e^{-\nu\sigma}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta, \sigma) e^{-i\nu\theta} d\theta, \tag{4.10}$$

где $\varphi(\theta, \sigma)$ — вещественная часть $F(\theta + i\sigma)$.

Положим

$$\Phi(\theta, \sigma) = \int_0^{\theta} \varphi(t, \sigma) dt;$$

тогда, силу условия (4.7), полная вариация $\Phi(\theta, \sigma)$ на интервале $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi(\theta, \sigma)\|_v = \operatorname*{var}_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \Phi(\theta, \sigma) = \int_0^{2\pi} |\varphi(t, \sigma)| dt \leqslant K \quad (-h < \sigma < h)$$

и на основании известной теоремы Helly существуют последовательность σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и функция $\Phi(\theta)$ с полной вариацией $\|\Phi\|_v \leqslant K$ такие, что

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_k = h, \quad \lim_{k \to \infty} F(\theta, \sigma_k) = \Phi(\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Представляя интеграл в равенстве (4.10) в виде

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta, \sigma) e^{-i\nu\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} dF(\theta, \sigma),$$

полагая $\sigma = \sigma_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, будем иметь

$$c_{\nu} = \overline{c_{-\nu}} = \frac{1}{\pi} \frac{q^{\nu}}{1 + q^{2\nu}} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} d\Phi(\theta) \quad (q = e^{-h}).$$

Отсюда следует, что всякая функция $F \in A_L K$ представима в виде

$$F(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(t - \theta + iu) d\Phi(\theta) \tag{4.11}$$

$$(w = t + iu, \quad -h < u < h, \quad \|\Phi\|_v \leqslant K),$$

где H определяется по (4.9). Наоборот, если функция $F(w)$ представима в виде интеграла, стоящего в правой части (4.11), где $\|\Phi\|_v \leqslant 1$, то она принадлежит к классу $A_L K$. В частности, условие (4.7) вытекает из того обстоятельства, что эллиптическая функция

$$H(v) = \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \operatorname{dn} \frac{\mathbf{K} v}{\pi} = 1 + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu}}{1 + q^{2\nu}} \cos \nu v,$$

где

$$\mathrm{K}=\frac{\pi}{2}\left(1+4\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{\nu}}{1+q^{2\nu}}\right), \quad v=x+iy, \quad -h<y<h$$

имеет положительную вещественную часть и, следовательно,

$$|\operatorname{Re} F(t+iu)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} H(t-\theta+iu)\,|\,d\Phi(\theta)|.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по t и меняя порядок интегрирования в правой части, получим

$$\int_0^{2\pi}|\operatorname{Re} F(t+iu)|\,dt\leqslant\int_0^{2\pi}|\,d\Phi\,|\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} H(t-\theta+iu)\,dt=\|\Phi\|_v\leqslant K.$$

Оценки верхних граней уклонений на вещественной оси функций F, принадлежащих к рассматриваемым классам, от их сумм Фурье $S_n(F)=S_n(F,x)$ даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. *Справедливы равенства*

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}_{S_n}(A_M)_M&=\sup_{F\in A_MK}\|F-S_n(F)\|_M\\ \mathscr{E}_{S_n}(A_L)_L&=\sup_{F\in A_LK}\|F-S_n(F)\|_L\end{aligned}\right\}=\frac{K}{\pi}\int_0^{\pi}|H_n(t)|\,dt=$$
$$=\frac{8K}{\pi}(c_q+\varepsilon_n)\,q^n, \tag{4.12}$$

где $\varepsilon_n\to 0$ *при* $n\to\infty$,

$$H_n(t)=4\sum_{m=n}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos mt \tag{4.13}$$

и

$$c_q=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(4m-1)!!}{(m!)^2}\,\frac{q^{2m}}{2^{2m}(1+q^2)^{2m}}.\,* \tag{4.14}$$

Доказательство. В силу (4.8) для функции $F\in A_MK$ справедливо

$$F(t)-S_n(F,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_n(t-\theta)\,\varphi(t)\,dt \quad (\|\varphi\|_M\leqslant K) \tag{4.15}$$

и в силу (4.11) для $F\in A_LK$

$$F(t)-S_n(F,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_n(t-\theta)\,d\Phi(\theta) \quad (\|\Phi\|_v\leqslant K). \tag{4.16}$$

Из (4.15) и (4.16) следует

$$\mathscr{E}_{S_n}(A_MK)_M=\mathscr{E}_{S_n}(A_LK)_L=\frac{K}{\pi}\int_0^{\pi}|H_n|\,dt.$$

---

* $(4m-1)!!=1\cdot 3\cdots(4m-1)$.

В случае M это очевидно, а в случае L для доказательства вводятся в рассмотрение непрерывные периода 2π функции $h=h(t)$ с нормой $\|h\|_c=\max_t |h(t)|\leqslant 1$. Тогда

$$\pi \sup_{F\in A_L} \|F-S_n(F)\|_L = \sup_{\|\Phi\|_v\leqslant 1} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} H_n(t-\theta)\, d\Phi(\theta) \right| dt =$$

$$= \sup_{\|\Phi\|_v\leqslant 1} \sup_{\|h\|_c\leqslant 1} \int_0 h(t) \int_0^{2\pi} H_n(t-\theta)\, d\Phi(\theta)\, dt =$$

$$= \sup_h \sup_\Phi \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} h(t) H_n(t-\theta)\, dt \right) d\Phi(\theta) = \sup_h \sup_\theta \left| \int_0^{2\pi} h(t) H_n(t-\theta)\, dt \right| =$$

$$= \sup_\theta \sup_h = \int_0^{2\pi} |H_n|\, dt$$

и нам остается оценить интеграл (4.12). Очевидно,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^{2n}} \cos kt = q^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} q^{k-n} \cos kt + \varepsilon_n(t) \right) =$$

$$= q^n \{[\cos nt - q\cos(n-1)t]\, \rho(t) + \varepsilon_n(t)\},$$

где $\varepsilon_n(t) \to 0$ при $n\to\infty$ равномерно и

$$\rho(t) = \frac{1}{1-2q\cos t+q^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |H_n|\, dt = \frac{2}{\pi} q^n \left\{ \int_0^{2\pi} |\cos nt - q\cos(n-1)t|\, \rho(t)\, dt + o(1) \right\}. \quad (4.17)$$

Далее,

$$I_n = \int_0^{2\pi} |\cos nt - q\cos(n-1)t|\, \rho(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left| \cos t - q\cos\frac{n-1}{n} t \right| \rho\left(\frac{t}{n}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \left| \cos u - q\cos\frac{n-1}{n}(u+2k\pi) \right| \rho\left(\frac{u+2k\pi}{n}\right) du =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \left| \cos u - q\cos\left(u - \frac{2k\pi}{n}\right) \right| \rho\left(\frac{2k\pi}{n}\right) du + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos u - q\cos(u-t)|\, \rho(t)\, du\, dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \rho(t) \int_0^{2\pi} |\cos u - q\cos(u-t)|\, du dt + o(1).$$

Функция $\cos u - q\cos(u-t)$ от переменной u при $0<t<\pi$ обращается в нуль с переменой знака в точках вида $u_1 + k\pi\,(k=0,\pm 1,\ldots)$, где $u_1 = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-q\cos t}{q\sin t}\left(0<u_1<\dfrac{\pi}{2}\right)$ и только в этих точках.

Поэтому, принимая во внимание, что

$$\sin u_1 = (1-q\cos t)\sqrt{\rho(t)}, \qquad \cos u_1 = q\sin t\sqrt{\rho(t)},$$

для $0<t<\pi$ будем иметь

$$\int_0^{2\pi} |\cos u - q\cos(u-t)|\,du =$$

$$=\left|\int_{u_1}^{u_1+\pi}(\cos u - q\cos(u-t))\,du - \int_{u_1+\pi}^{u_1+2\pi}(\cos u - q\cos(u-t))\,du\right| =$$

$$=4[\sin u_1 - q\sin(u_1-t)] = \frac{4}{\sqrt{\rho(t)}},$$

так что

$$I_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\rho(t)}\,dt + o(1).$$

Наконец,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|H_n|\,dt = \frac{8}{\pi^2}q^n\left\{\int_0^{\pi}\sqrt{\rho(t)}\,dt + o(1)\right\}.$$

Разлагая $\sqrt{\rho(t)}$ в ряд по степеням $\cos t$ и интегрируя, получим выражение для c_q в виде ряда (4.14).

§ 5. Суммы Фейера

Сумма Фейера $(n-1)$-го порядка $\sigma_n(f,x)$ есть частный случай (1.1) при $\lambda_k = \dfrac{n-k}{n}\,(k=1,2,\ldots,n)$. В этом случае, принимая во внимание (3.6), будем иметь

$$\Psi_\lambda(t) = D_1^{(r)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}\,\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}.$$

Положим

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}LK)_L = \sup_{f\in W^{(r)}KL}\|f-\sigma_n(f)\|_L,$$

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}MK)_M = \sup_{f\in W^{(r)}MK}\ \sup_x |f(x)-\sigma_n(f,x)|.$$

В моей работе ([10a]) было показано, что

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(1)}MK)_M = \frac{2K}{\pi}\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),\\
&\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}MK)_M = \frac{c_rK}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad (r=2,3,\ldots),\\
&c_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^r}.
\end{aligned}\right\}\qquad (5.1)$$

Эти равенства сохраняют силу при замене $\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}MK)_M$ на $\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}LK)_L$. При $r>1$ это обстоятельство вытекает из следующих рассуждений: представим $\Psi_\lambda(t)$ в виде

$$\Psi_\lambda(t)=\frac{1}{n}F_r(t)+H_r(t), \tag{5.2}$$

где

$$F_r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{r-1}}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right).$$

В упомянутой работе ([10a]) было показано, что

$$\int_0^{2\pi}|H_r(t)|\,dt=O\left(\frac{1}{n^r}\right); \tag{5.3}$$

что касается функции $F_r(t)$, то при нечетном $r=3, 5, \ldots$ она меняет знак только в точках t_k вида $t_k=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а при четном $r=2,4,\ldots$ функция $F_r(t)-F\left(\frac{\pi}{r}\right)$ меняет знак только в точках $t_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}&-F_r(\pi+x)F_r(x)\geqslant 0 \quad (r=3, 5, \ldots),\\ &-\left[F_r(\pi+x)-F_r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[F_r(x)-F_r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\geqslant 0 \quad (r=2, 4, \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Отсюда, принимая во внимание (3.7), (5.2) и (5.3), будем иметь

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}LK)_L=\frac{K}{2\pi}\max_t\int_0^{2\pi}|\Psi_\lambda(x)-\Psi_\lambda(x+t)|\,dx=$$

$$=\frac{K}{2\pi n}\max_t\int_0^{2\pi}|F_r(x)-F_r(t+x)|\,dx+O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

что вследствие (5.4) и примечания в конце § 2 дает

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}LK)_L=\frac{K}{\pi n}\int_0^{2\pi}|F_r(x)|\,dx+O\left(\frac{1}{n^r}\right)=\frac{c_rK}{n}+O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

$$(r=3, 5, \ldots),$$

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}LK)_L=\frac{K}{\pi n}\int_0^{2\pi}\left|F_r(x)-F_r\left(\frac{\pi}{r}\right)\right|dx+O\left(\frac{1}{n^r}\right)=\frac{c_rK}{n}+O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

$$(r=2, 4, \ldots).$$

При $r=1$, в силу (4.1),

$$\Psi_\lambda(x)=\Psi(x)=D_1^{(1)}(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\left(kx+\frac{\pi}{2}\right)}{k}\,\frac{n-k}{n}=$$

$$=D_n^{(1)}(x)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin kx,$$

откуда, вследствие (4.4), (4.5) и равенства

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

будем иметь

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(W^{(1)}LK)_L = \frac{K}{2\pi} \max_t \int_0^{2\pi} |\Psi(x) - \Psi(t+x)|\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{K}{2\pi}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} |\Psi(x) - \Psi(x+\pi)|\, dx + \int_{\pi + \frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} |\Psi(x) - \Psi(x+\pi)|\, dx\right) =$$

$$= \frac{K}{4\pi n}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} \left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x+\pi}{2}\right| dx + \int_{\pi + \frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} \left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x+\pi}{2}\right| dx\right) =$$

$$= \frac{K}{\pi n}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\, dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, принимая во внимание (3.9) и (5.1), получим

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(W^{(1)}LK)_L = \frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Наилучшие приближения и наилучшие линейные методы

1. Пусть (L) и (M) обозначают теперь пространства функций периода 2π, соответственно суммируемых и ограниченных на $[0, 2\pi]$, и пусть $K(t)$ — функция, принадлежащая к пространству (L).

Положим

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\varphi(t)\, dt. \tag{6.1}$$

Если $\varphi \in (L)$, то $f \in (L)$, если же $\varphi \in (M)$, то f — непрерывная периода 2π функция.

Обозначим через $H_M^{(p)}$ класс функций $h \in (M)$ с $\|h\|_M \leqslant 1$, ортогональных ко всем тригонометрическим функциям порядка $p-1$ $(p > 0)$:

$$\int_0^{2\pi} h(t) \begin{matrix}\cos kt \\ \sin kt\end{matrix}\, dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{6.2}$$

и через $H_L^{(p)}$ $(p > 0)$ — класс функций $h \in (L)$ с $\|h\|_L \leqslant 1$, для которых выполняются те же равенства (6.2). При этом $H_M^{(0)}$ и $H_L^{(0)}$ пусть обозначают множество функций $h \in (M)$ с $\|h\|_M \leqslant 1$ и соответственно множество функций $h \in (L)$ с $\|h\|_L \leqslant 1$.

Пусть, далее, если f — непрерывная функция,

$$E_n(f)_M = \min_{\alpha_k, \beta_k} \max_t \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right| \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (6.3)$$

$$E_0(f)_M = \| f \|_M$$

и если $f \in (L)$

$$E_n(f)_L = \min_{\alpha_k, \beta_k} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right| dt \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (6.4)$$

$$E_0(f)_L = \| f \|_L.$$

При этих обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если функции f и φ связаны между собой равенством* (6.1), *то*

$$\sup_{\|\varphi\|_M \leq 1} E_n(f)_M = \sup_{\varphi \in H_L^{(n)}} \| f \|_L, \quad (6.5)$$

$$\sup_{\|\varphi\|_L \leq 1} F_n(f)_L = \sup_{\varphi \in H_M^{(n)}} \| f \|_M. \quad (6.5')$$

Доказательство. Воспользовавшись равенством (2.9), где в качестве функций φ_k берем тригонометрические функции порядка не выше $n-1$, будем иметь

$$\pi \sup_{\|\varphi\|_M \leq 1} E_n(f)_M = \sup_{\|\varphi\|_M \leq 1} \sup_{h \in H_L^{(n)}} \int_0^{2\pi} f(x) h(x) dx =$$

$$= \sup_h \sup_\varphi \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^{2\pi} K(t-x) h(x) dx dt =$$

$$= \sup_h \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} K(t-x) h(x) dx \right| dt = \sup_h \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} K(t-x) h(-t) dt \right| dx,$$

откуда, принимая во внимание, что вместе с $h(t)$ к $H_L^{(n)}$ принадлежит и $h(-t)$, следует (6.5).

Равенство (6.5) доказывается аналогично на основании (2.9′).

2. Будем теперь предполагать, что функция $K(t)$ удовлетворяет еще следующему ограничительному условию:

Условие (A_n^*) $(n = 1, 2, \ldots)$.

1° Функция $K(t)$ суммируема, периода 2π и тождественно не равна нулю.

2° Существует тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка

$$T_{n-1}^* = (t) \frac{\mu_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\mu_k^* \cos kt + \nu_k^* \sin kt)$$

и положительное число $\lambda \leq \frac{\pi}{n}$ такое, что если

$$K_*(t) = K(t) - T_{n-1}^*(t), \quad \varphi_*(t) = \operatorname{sign} K_*(t),$$

то для почти всех t

$$\varphi_*(t+\lambda) = -\varphi_*(t). \tag{6.6}$$

Покажем, что в качестве λ всегда можно взять число $\lambda_* = \frac{\pi}{n_*}$, где n_* — целое положительное число $\geqslant n$.

В самом деле, из (6.6) следует, что φ_* имеет период 2λ. Обозначим через $2\omega_*$ наименьший период φ_*. Такой период существует, так как в противном случае существовала бы последовательность h_k $(k=1, 2, \ldots)$ положительных периодов φ_*, сходящаяся при $k \to \infty$ к нулю, и тогда для всякого k

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_*(t)\, e^{-imt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi_*(t)\, e^{-im(t+h_k)}\, dt = e^{-imh_k} c_m$$

$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Но при фиксированном m и k достаточно большом $e^{-imh_k} \neq 1$, откуда $c_m = 0$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, что, принимая во внимание (6.6), влечет справедливое почти всюду равенство $\varphi_*(t) \equiv 0$, из которого следует равенство $K(t) \equiv 0$, противоречащее предположению, что функция K удовлетворяет условию (A_n^*).

Так как $2\omega_*$ — наименьший период, то $\lambda = m\omega_*$, где m — целое положительное число. Оно не может быть четным, так как тогда было бы $\varphi_*(t) \equiv 0$, но для того чтобы удовлетворялось (6.6), оно может быть любым нечетным числом. Полагая $m=1$, будем иметь $\lambda_* = \omega_*$, и так как $2\omega_*$ — наименьший период, а 2π — один из периодов φ_*, то $\pi = n_* \omega_*$, где n_* — целое положительное число.

Обозначим

$$M_n^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_*(t)|\, dt.$$

В дальнейшем, рассматривая ядра $K(t)$, удовлетворяющие условию (A_n^*), мы будем оперировать определенными выше понятиями $\lambda_*, \mu_*, \nu_*, K_*, T_{n-1}^*, \varphi_*, n_*$ $(n_* \geqslant n)$ и M_n^*, не объясняя их.

Очевидно, функция φ_* имеет норму $\|\varphi_*\|_M = 1$. Кроме того, она, в силу (6.6) и периодичности с периодом $\frac{2\pi}{n_*}$, ортогональна ко всякому тригонометрическому полиному $(n-1)$-го порядка и потому принадлежит к $H_M^{(n)}$.

Примечание 1. Так как $\varphi_* \in H_M^{(n)}$, то каков бы ни был тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка T_{n-1},

$$\int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}(t)|\, dt \geqslant \int_0^{2\pi} [K(t) - T_{n-1}(t)]\, \varphi_*(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} K_*(t)\, \varphi_*(t)\, dt = \int_0^{2\pi} |K_*|\, dt = M_n^* \pi, \tag{6.7}$$

откуда следует, что

$$\min_{T_{n-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}(t)|\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K(t) - T^*_{n-1}(t)|\, dt = M^*_n, \quad (6.8)$$

где минимум распространен на все полиномы T_{n-1} порядка $(n-1)$. Таким образом, полином T^*_{n-1} минимизирует задачу (6.8) и, следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы ядро $K(t)$ удовлетворяло условию (A^*_n), необходимо и достаточно, чтобы хоть один из обращающих в минимум задачу (6.8) полином $(n-1)$-го порядка T_{n-1} обладал свойством, сформулированным выше для T^*_{n-1}.*

Примечание 2. Если ядро $K(t)$ непрерывно, то соответствующий ему минимизирующий полином будет, как известно, единственным.

Единственность будет иметь место также и тогда, если в полуинтервале $0 \leqslant t < 2\pi$ существует $2n-1$ точек, где $K_*(t)$ непрерывна и меняет знак. В самом деле, каждую из упомянутых точек t_k можно в этом случае окружить достаточно малым интервалом $(t_k - \delta,\ t_k + \delta)$ таким, что если в левой его половине $\varphi_*(t) = \varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$, то в правой $-\varphi_*(t) = -\varepsilon$. Поэтому, если T_{n-1} — полином, отличный от T^*_{n-1}, то в соотношении (6.7) имеет место строгое неравенство, так как в противном случае полином T_{n-1} должен был бы в упомянутых точках совпадать с $K(t)$, что невозможно, так как это совпадение уже имеет место для T^*_{n-1}.

3. ТЕОРЕМА 3. *Если функции f выражаются через φ при помощи (6.1), где $K(t)$ удовлетворяют условию (A^*_n), то*

$$\sup_{\varphi \in H^{(p)}_M} E_n(f)_M = \sup_{\varphi \in H^{(n)}_M} \|f\|_M = M^*_n, \quad (6.9)$$

$$\sup_{\varphi \in H^{(p)}_L} E_n(f)_L = \sup_{\varphi \in H^{(n)}_L} \|f\|_L = M^*_n \quad (6.9')$$

$$(p = 0, 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Заметим, что в силу (6.5) и (6.5′) при $p = 0$ из равенств (6.9) следуют равенства (6.9′) и наоборот. Достаточно доказать, таким образом, равенства (6.9) для произвольного $p = 0, 1, \ldots, n$ и равенства (6.9′) для $p = 1, 2, \ldots, n$.

Начнем с доказательства (6.9). Если $\varphi \in H^{(n)}_M$, то

$$\left| \int_0^{2\pi} K(t-x)\varphi(t)\, dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} K_*(t-x)\varphi(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^{2\pi} |K_*(t)|\, dt,$$

причем знак неравенства в этой цепи обращается в знак точного равенства при $x = 0$ и $\varphi(t) = \varphi_*(t)$. Этим доказано второе равенство (6.9).

Далее, если $\|\varphi\|_M \leqslant 1$, то, приняв во внимание, что функция

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T^*_{n-1}(t-x)\varphi(t)\, dt$$

есть тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, будем иметь

$$E_n(f)_M \leqslant \max_x \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t-x)\varphi(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_*|\,dt.$$

С другой стороны, функция

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\varphi_*(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t-x)\varphi_*(t)\,dt$$

достигает своего модуль максимума, равного правой части (6.9), с последовательной переменой знака в точках $x = k\lambda_*$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, число которых не меньше $2n$ и, таким образом, отклонение $E_n(f)_M$ функции f от ее наилучшего тригонометрического полинома $(n-1)$-го порядка (тождественно равного нулю) равно этому модуль максимуму.

Если принять во внимание, что функция $\varphi_*(t)$ принадлежит к $H_M^{(n)}$, а следовательно, ко всем $H_M^{(p)}$ при $p < n$, то равенства (6.9) для $p = 0, 1, \ldots, n$ доказаны.

Остается доказать справедливость (6.9′) для $p = 1, 2, \ldots, n$. Так как оно верно для $p = 0$, то достаточно, очевидно, установить справедливость его для $p = n$, т. е. показать, что

$$\sup_{\varphi \in H_L^{(n)}} E_n(f)_L = M_n^*. \tag{6.10}$$

Пусть $t_k = k\lambda_*$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Построим функцию $\varphi_m(t)$ $\left(m > \frac{2}{\lambda_*}\right)$ при помощи равенств

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} \frac{m\lambda_*}{4\pi}(-1)^k & t_k - \frac{1}{m} < t < t_k + \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

Очевидно $\|\varphi_m\|_L = 1$; кроме того, функция $\varphi_m(t)$ имеет период $2\lambda_* = \frac{2\pi}{n_*}$ и среднее ее значение по $(0, 2\pi)$ равно нулю, откуда следует, что она ортогональна ко всем тригонометрическим функциям порядка не выше $(n-1)$ и, таким образом, $\varphi_m \in H_L^{(n)}$.

Положим

$$f_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\varphi_m(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t-x)\varphi_m(t)\,dt \tag{6.11}$$

и оценим снизу величину $E_n(f_m)_L$.

В силу (2.9′) $E_n(f_m)_L$ равна верхней грани интеграла $\int_0^{2\pi} f_m(x)h(x)\,dx$, распространенной на функции $h \in H_M^{(n)}$, а так как функция $\varphi_*(-x)$ при-

надлежит к $H_m^{(n)}$, то

$$E_n(f_m)_L \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_*(-x)\int_0^{2\pi} K_*(t-x)\,\varphi_m(t)\,dt\,dx =$$

$$=\int_0^{2\pi}\varphi_m(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t+s)\,\varphi_*(s)\,ds\right)dt. \qquad (6.12)$$

Непрерывная функция (от t), стоящая в простых скобках, достигает своего модуль максимума, равного M_n^* с последовательной переменой знаков в точках $t_k\,(k=0, \pm 1, \ldots)$. Задав $\varepsilon > 0$, можно подобрать m_0 такое, что при всех $m > m_0$ модуль этой функции превышает $M_n^* - \varepsilon$ во всех интервалах $t_k - \frac{1}{m} < t < t_k + \frac{1}{m}$ и так как $\varphi_m(t)$ вне этих интервалов равна нулю, то из (6.12) следует, что

$$E_n(f_m)_L \geqslant \frac{m\lambda_*}{4\pi}\,\frac{2}{m}\,2n_*\,(M_n^* - \varepsilon) = M_n^* - \varepsilon \quad (m > m_0).$$

Кроме этого, из равенства (6.9′) для $p=0$, справедливость которого уже установлена, вытекает

$$E_n(f_m)_L \leqslant M_n^*.$$

Итак, существует последовательность функций вида (6.11), где $\varphi_m \in H_L^{(n)}$, таких, что $E_n(f_m)_L \to M_n^*$ при $m \to \infty$. Отсюда следует (6.10), и теорема доказана.

4. Заметим, что второе равенство (6.9) справедливо для всякого суммируемого ядра $K(t)$ периода 2π без того, чтобы оно удовлетворяло условию (A_n^*), если M_n^* понимать в смысле (6.8). В самом деле, если принять во внимание, что вместе с $\varphi(t)$ к классу $H_M^{(n)}$ принадлежит также функция $\varphi_1(t) = \varphi(t+x)$ при любом x, то на основании (2.9′)

$$\sup_{\varphi\in H_M^{(n)}} \|f\|_M = \sup_{\varphi\in H_M^{(n)}} \max_x \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\,\varphi(t)\,dt\right| =$$

$$= \sup_{\varphi\in H_M^{(n)}} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\,\varphi(t)\,dt = \min_{T_{n-1}} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}(t)|\,dt = M_n^*.$$

Что касается первого равенства (6.9)

$$\sup_{\|\varphi\|_M \leqslant 1} E_n(f)_M = M_n^*,$$

то для его выполнения условие (A_n^*) является при известных ограничениях на $K(t)$, обычно имеющих место в приложениях, необходимым, как это вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $K(t)$ — суммируемая периода 2π функция и $T_{n-1}^{(0)}(t)$ — тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, для которого имеет место*

$$\sup_{\|\varphi\|_M \leqslant 1} E_n(f)_M = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_0(t)|\,dt = M_n^{(0)}, \qquad K_0(t) = K(t) - T_{n-1}^{(0)}(t). \qquad (6.13)$$

Тогда

$$\min_{T_{n-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}(t)|\, dt = M_n^{(0)} \tag{6.14}$$

и если множество точек t, *на котором* $K_0(t) = 0$, *имеет меру нуль, то* $K(t)$ *удовлетворяет условию* (A_n^*), *и можно считать* $T_{n-1}^{(0)}$, K_0, $M_n^{(0)}$ *соответственно равными* T_{n-1}^*, K_*, M_n^*.

Доказательство. Вместе с T_{n-1} функция

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_{n-1}(t-x)\, \varphi(t)\, dt$$

есть также полином $(n-1)$-го порядка, откуда

$$\underset{\|\varphi\|_M \leqslant 1}{E_n(f)_M} \leqslant \max_x \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} (K(t-x) - T_{n-1}(t-x))\, \varphi(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}(t)|\, dt,$$

что, приняв во внимание (6.13), влечет за собой равенство (6.14).

Далее, из (6.13) следует существование последовательности функций $\varphi_m (m = 1, 2, \ldots)$ с $\|\varphi\|_m \leqslant 1$ таких, что

$$f_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t-x)\, \varphi_m(t)\, dt, \quad \lim_{m \to \infty} E_n(f_m)_M = M_n^{(0)}.$$

Из последовательности функций φ_m можно выбрать подпоследовательность φ_{m_k} такую, что

$$\lim_{m_k \to \infty} \int_0^{2\pi} \varphi_{m_k}(t)\, g(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \varphi_0(t) g(t)\, dt,$$

какова бы ни была функция $g \in (L)$, где φ_0 — некоторая функция, принадлежащая к (M) с $\|\varphi_0\|_M \leqslant 1$.

Справедливость этого утверждения проще всего обнаруживается, если принять во внимание, что интегралы

$$F_m(g) = \int_0^{2\pi} \varphi_m(t) g(t)\, dt \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

где $g \in (L)$, суть линейные функционалы, определенные в сепарабельном пространстве (L) с нормами $\|F_m\| = \|\varphi_m\|_M \leqslant 1$, и использовать теорему функционального анализа, гласящую, что из всякой последовательности линейных функционалов, определенных в сепарабельном пространстве Banach'а, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо к некоторому линейному функционалу, заданному на этом пространстве.

Отсюда следует, что при всяком x

$$\lim_{m_k\to\infty} f_{m_k}(x)=\lim_{m_k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\,\varphi_{m_k}(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\,\varphi_0(t)\,dt=f_0(x). \tag{6.15}$$

Заметим, что для любых значений x и x' и любом m_k справедливо неравенство

$$|f_{m_k}(x)-f_{m_k}(x')|\leqslant\int_0^{2\pi}|K(t-x)-K(t-x')|\,dt,$$

правая часть которого меньше $\varepsilon>0$, если только $|x'-x|<\delta$, где δ достаточно мало. Из него следует равностепенная непрерывность последовательности f_{m_k}, что вместе с (6.15) влечет равномерную сходимость f_{m_k} к f_0, так что

$$\lim_{m_k\to\infty} E_n(f_{m_k})_M=E_n(f_0)_M=M_n^{(0)}.$$

Функция

$$P_{n-1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T_{n-1}^{(0)}(t-x)\,\varphi_0(t)\,dt$$

есть, очевидно, тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, поэтому, принимая во внимание, что $\|\varphi_0\|\leqslant 1$, получим

$$M_n^{(0)}=E_n(f_0)_M\leqslant\max_x|P_{n-1}(x)-f_0(x)|=$$
$$=\max_x\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}K_0(t-x)\,\varphi_0(t)\,dt\right|\leqslant M_n^{(0)};$$

в этих соотношениях всюду стоят знаки равенства, поэтому по теореме Чебышева функция

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_0(t-x)\,\varphi_0(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_0(t)\,\varphi_0(t+x)\,dt$$

достигает своего модуля максимума, равного $M_n^{(0)}$ с последовательной переменой знака в некоторых $2n+1$ точках:

$$x_0<x_1<\ldots<x_{2n}=x_0+2\pi.$$

Пусть теперь множество значений t, на котором $K_0(t)=0$, имеет меру нуль и $\varphi_*(t)=\operatorname{sign}K_0(t)$; тогда, в силу определения $M_n^{(0)}$ и того, что $|\varphi_0(t+x)|\leqslant 1$, будем иметь

$$\varphi_0(t+x_k)=\varepsilon(-1)^k\varphi_*(t)$$

для всех t и $k=0,1,\ldots,2n$. Отсюда

$$\varepsilon(-1)^{k-1}\varphi_*(t+\overline{x_k-x_{k-1}})=\varphi_0(t+x_k)=\varepsilon(-1)^k\varphi_*(t)$$

и, следовательно,

$$\varphi_*(t+\overline{x_k-x_{k-1}})=-\varphi_*(t)\quad(k=1,2,\ldots,2n).$$

Если теперь обозначить через λ наименьшую разность $x_k - x_{k-1}$, то будем иметь

$$\varphi_*(t+\lambda) = -\varphi_*(t), \quad \lambda \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Таким образом, $K(t)$ удовлетворяет условию (A_n^*), где $T_{n-1}^{(0)} = T_{n-1}^*$ и $M_n^{(0)} = M_n^*$ и теорема полностью доказана.

5. Теперь нетрудно показать существование ядер, для которых равенство (6.13) не выполняется ни для какого полинома $T_{n-1}^{(0)}$.

Пример. Зададим, например, точки $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+2} = \pi$ и построим четную функцию $q(t)$ периода 2π, равную $(-1)^{k-1}$ на интервалах $t_{k-1} < t < t_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n+2)$. Она будет ортогональна ко всем $\sin mt$. Для того чтобы она была ортогональна к $\cos mt$ $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$2(t_1 - t_2 + \ldots + (-1)^n t_{n+1}) + (-1)^{n+1}\pi = 0$$

$$\sin rt_1 - \sin rt_2 + \ldots + (-1)^n \sin rt_{n+1} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Легко видеть, что можно подобрать $n+1$ чисел $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$, удовлетворяющих этим n уравнениям и притом так, что все разности $t_k - t_{k-1}$ будут попарно отличными. Соответствующая такой системе чисел t_k функция $q(t)$ будет ортогональна ко всем полиномам $(n-1)$-го порядка, однако ни при каком $\lambda \leqslant \frac{\pi}{n}$ не будет удовлетворять тождественно равенству $q(\lambda + t) = -q(t)$.

Если теперь $K(t)$ — непрерывная периода 2π функция такая, что $q(t) = \operatorname{sign} K(t)$, то в силу ортогональности $q(t)$ ко всем T_{n-1} (следствие 1, § 2), единственным полиномом, обращающим в минимум интеграл $\int\limits_0^{2\pi} |K - T_{n-1}|\, dt$, будет $T_{n-1} \equiv 0$ (единственность вытекает из непрерывности K) и, следовательно, в силу теоремы 2, ядро $K(t)$ не удовлетворяет условию (A_n^*).

Наконец, множество значений t, на котором $K(t) = 0$, имеет меру нуль, откуда, на основании только что доказанной теоремы 4, для определенного таким образом ядра $K(t)$ равенство (6.13) ни при каком $T_{n-1}^{(0)}$ не выполняется.

6. Зададим, рассуждая как B. Nagy ([9]), систему чисел

$$\mu_p,\ \mu_{p+1}, \ldots, \mu_{n-1},\quad \nu_p,\ \nu_{p+1}, \ldots, \nu_{n-1}, \quad 0 \leqslant p \leqslant n \tag{6.16}$$

(при $p = 0$ $\nu_0 = 0$). Приведем в соответствие каждой функции f вида (6.1), где $\varphi \in H_M^{(p)}$ или $\varphi \in H_L^{(p)}$, тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка*

$$U_{n-1}(f;\ x;\ \mu,\ \nu) =$$

$$= \sum_{k=p}^{n-1}{}' \{\mu_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu_k (b_k \cos kx - a_k \sin kx)\}, \tag{6.17}$$

* Штрих при сумме $\sum\limits_{k=p}^{n-1}{}' u_k$ обозначает, что в ней при $p=0$ нужно член u_0 заменить на $\frac{u_0}{2}$.

определяемый системой чисел (6.16), где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции φ, которой соответствует при помощи (6.1) функция f.

Полином $U_{n-1}(f; x; \mu, \nu)$ можно рассматривать как приближение функции f. Он линейно зависит от φ и будет нами называться л и н е й н ы м м е т о д о м (определяемым системой (6.16)) п р и б л и ж е н и я ф у н к ц и й f вида (6.1). В качестве меры приближения функций f классов $H_M^{(p)}$ и $H_L^{(p)}$, при помощи этих полиномов, определяемых фиксированной системой чисел (6.15), можно рассматривать верхние грани

$$\mathscr{E}_n(H_M^{(p)}; \mu, \nu)_M = \sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} \| f - U_n(f; \mu, \nu) \|_M \tag{6.18}$$

и

$$\mathscr{E}_n(H_L^{(p)}; \mu, \nu)_L = \sup_{\varphi \in H_L^{(p)}} \| f - U_n(f; \mu, \nu) \|_L. \tag{6.18'}$$

Метод приближения вида (6.17) естественно назвать н а и л у ч ш и м для класса $H_M^{(p)}$ (соответственно $H_L^{(p)}$), если он определяется такой системой чисел (6.16), для которой верхняя грань (6.18) (соответственно (6.18')) будет наименьшей среди возможных.

ТЕОРЕМА 5. *Линейный метод приближения* (6.17) *является наилучшим для* $H_M^{(p)}$ *тогда и только тогда, если* $\mu_k = \mu_k^{(0)}$, $\nu_k = \nu_k^{(0)}$ $(k = p, \ldots, n-1)$, *где числа* $\mu_k^{(0)}$ *и* $\nu_k^{(0)}$ — *коэффициенты тригонометрического полинома* $T_{n-1}^{(0)}$, *обращающего в минимум интеграл*

$$\int_0^{2\varphi} | K - T_{n-1} | \, dt. \tag{6.19}$$

При этом

$$\mathscr{E}_n(H_M^{(p)}; \mu^{(0)}, \nu^{(0)})_M = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | K - T_{n-1}^{(0)} | \, dt. \tag{6.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in H_M^{(p)}$ и f определяется равенством (6.1). Очевидно

$$U_{n-1}(f; x; \mu, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(t-x) \varphi(t) \, dt,$$

где

$$Q(t) = \sum_{k=p}^{n-1} (\mu_k \cos kt + \nu_k \sin kt) \tag{6.21}$$

и

$$f(x) - U_{n-1}(f; x; \mu, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{K(t-x) - Q(t-x)\} \varphi(t) \, dt. \tag{6.22}$$

Воспользовавшись равенством (2.9′), будем иметь

$$\mathscr{E}_n(H_M^{(p)};\ \mu, \nu) = \sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} \max_x \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \{K(t-x) - Q(t-x)\} \varphi(t)\, dt \right| =$$

$$= \sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{K(t) - Q(t)\} \varphi(t)\, dt = \min_{T_{p-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K - Q - T_{p-1}|\, dt, \qquad (6.23)$$

где минимум в правой части распространен на все тригонометрические полиномы $(p-1)$-го порядка (в случае $p=0$ нужно опустить T_{p-1} и знак min).

Если $\mu_k = \mu_k^{(0)}$ и $\nu = \nu_k^{(0)}$ $(k = p, \ldots, n-1)$, где $\mu_k^{(0)}$ и $\nu_k^{(0)}$ — соответствующие коэффициенты какого-либо тригонометрического полинома $T_{n-1}^{(0)}$, минимизирующего интеграл (6.19), то правая часть (6.23) равна (6.20). Если же это обстоятельство не имеет места, то очевидно

$$\mathscr{E}_n(H_M^{(p)};\ \mu, \nu) > \mathscr{E}_n(H_M^{(p)};\ \mu^{(0)}, \nu^{(0)}),$$

и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Если ядро $K(t)$ удовлетворяет условию (A_n^*), то линейный метод* (6.17) *является наилучшим для класса $H_M^{(p)}$ при $\mu_k = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$ $(k = p, \ldots, n-1)$, причем*

$$\mathscr{E}_n(H_M^{(p)};\ \mu_*, \nu_*) = M_n^*.$$

Если, кроме того, ядро $K(t)$ непрерывно или существуют в полуинтервале $[0, 2\pi)$ $2n-1$ точек, в которых $K_n^*(t)$ непрерывно и меняет знак, то наилучший линейный метод единственный.

Доказательство. Первая часть утверждения есть следствие теоремы 5, так как в рассматриваемом случае T_{n-1}^* минимизирует интеграл (6.18), а вторая часть следует из той же теоремы и примечания 2 этого параграфа.

Особенно интересными являются ядра $K(t)$, для которых

$$\sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} E_n(f)_M = \min_{\mu, \nu} \mathscr{E}_n(H_M^{(p)};\ \mu, \nu)_M .$$

Для таких ядер приближение функций класса $H_M^{(p)}$ соответствующим наилучшим линейным методом дает ту же оценку для всего класса, что и приближение наилучшими полиномами.

Из теоремы 6 и равенства (6.9) следует, что ядра, удовлетворяющие условию (A_n^*), обладают этим свойством. С другой стороны, существуют ядра (например, рассмотренные в п. 5), для которых это свойство не имеет места.

ТЕОРЕМА 7. *Если ядро $K(t)$ удовлетворяет условию (A_n^*), то линейный метод* (6.17) *является наилучшим для класса $H_L^{(p)}$ при $\mu_k = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$ $(k = p, p+1, \ldots, n-1)$, причем*

$$\mathscr{E}_n(H_L^{(p)};\ \mu_*, \nu_*) = M_n^*.$$

Доказательство. Заменим в (6.5) $K(t)$ на $K(t) - Q(t)$ и n на p; тогда в силу (6.21) и (6.22) будем иметь

$$\mathscr{E}_n (H_L^{(p)}; \mu, \nu)_L = \sup_{\|\varphi\|_M \leq 1} E_p \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [K(t-x) - Q(t-x)] \varphi(t)\, dt \right\}_M \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\|\varphi\|_M \leq 1} E_n \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [K(t-x) - Q(t-x)] \varphi(t)\, dt \right\}_M = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_*|\, dt = M_n^*$$

(при $p=0$ нужно E_p заменить знаком абсолютной величины). При этом последнее равенство следует из (6.9) и из того обстоятельства, что наилучшее приближение интеграла, стоящего в фигурных скобках, при помощи тригонометрического полинома $(n-1)$-го порядка не изменится, если в этом интеграле опустить тригонометрический полином Q, имеющий порядок $n-1$.

С другой стороны, используя это замечание, получим

$$\mathscr{E}_n (H_L^{(p)}; \mu_*, \nu_*)_L = \sup_{\|\varphi\|_M \leq 1} E_p \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_*(t-x) \varphi(t)\, dt \right\} \leqslant M_n^*,$$

и теорема доказана.

Докажем еще теорему, дающую достаточное условие единственности наилучшего линейного метода для класса $H_L^{(p)}$.

ТЕОРЕМА 8. *Если непрерывное ядро $K(t)$ удовлетворяет условию (A_n^*) и при этом существует значение t_0 такое, что функция $K_*(t) = K(t) - T_{n-1}^*(t)$ меняет знак в точках $t_k = t_0 + k\lambda_*$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ и только в них, то при $p=1$ наилучший линейный метод вида* (6.17) *для класса $H_L^{(p)}$ единственный.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in H_M^{(1)}$, f определяется равенством (6.1) и $K_1 = K - Q$. Тогда на основании (2.13) и (6.22) получим

$$\mathscr{E}_n (H_L^{(1)}; \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \max_x \int_0^{2\pi} |K_1(t) - K_1(t+x)|\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_1(t) - K_1(t+\lambda_*)|\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \{K_1(t) - K_1(t+\lambda_*)\} \varphi_*(t)\, dt \right| = M_n^*.$$

Если допустить, что в этой цепи соотношений имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_1(t) - K_1(t+\lambda_*)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \{K_1(t) - K_1(t+\lambda_*)\} \varphi_*(t)\, dt, \right.$$

то придется заключить, в силу наложенных на $K(t)$ условий, что функция $K_1(t) - K_1(t+\lambda_*)$ обращается в нуль в точках t_k. Но этим же свойством обладает функция $K_*(t) - K_*(t+\lambda_*)$. Таким образом, полиномы $(n-1)$-го порядка $Q(t) - Q(t+\lambda_*)$ и $T_{n-1}^*(t) - T_{n-1}^*(t+\lambda_*)$ совпадают в $2n_*$ точках интервала длины 2π и так как $n_* \geqslant n$, то они совпадают тождественно. Простые подсчеты показывают, что это обстоятельство

может иметь место лишь при $\mu_k = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Этим теорема доказана.

7. Для некоторых приложений (§ 7, пп. 3 и 4) представляет интерес класс функций Ψ вида

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t-x)\, dg(t), \tag{6.24}$$

где $K(t)$ — непрерывная периода 2π функция, а g — функции ограниченной вариации на $(0, 2\pi)$.

Относительно функций g будем предполагать, что они определены на всей действительной оси и удовлетворяют условиям

$$g(0) = 0, \quad g(x-0) + g(x+0) = 2g(x), \quad g(x+2\pi) - g(x) = g(2\pi) - g(0)$$

для всех x. Совокупность всех таких функций g образует пространство (V) Banach'a, если норму $\|g\|$ элемента g этого пространства определить как полную вариацию $g(t)$ на $(0, 2\pi)$:

$$\|g\|_V = \operatorname*{var}_{0 \leq t \leq 2\pi} g(t).$$

Значение определенного таким образом пространства (V) состоит в том, что всякому линейному функционалу $\Phi(f)$, заданному в пространстве $(C)_{2\pi}$ непрерывных периода 2π функций $f = f(t)$, соответствует единственная функция g, принадлежащая к (V), такая, что для всех $f \in (C)_{2\pi}$

$$\Phi(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\, dg(t)$$

и при этом $\|\Phi\|_{C_{2\pi}} = \|g\|_V$. Это утверждение легко получить как следствие из теоремы 1 § 2, базируясь на известной теореме F. Riesz'a об общем виде линейного функционала в пространстве (C) непрерывных (непериодических) на $[0,2\pi]$ функций, если принять во внимание, что $(C)_{2\pi}$ есть подпространство (C), на котором линейный функционал $F_1(f) = f(2\pi) - f(0)$ равен нулю.

Обозначим через $H_V^{(p)}$ $(p = 0, 1, \ldots)$ класс функций $g \in (V)$ таких, что $\|g\|_V \leq 1$ и

$$\int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos kt \\ \sin kt\end{matrix}\; dg(t) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

(при $p = 0$ второе условие опускается).

Наряду с функциями Ψ вида (6.24) будем рассматривать функции f вида (6.1), где φ принадлежит к уже определенному классу $H_M^{(p)}$.

Справедлива аналогичная теореме 1 этого параграфа

ТЕОРЕМА 9. *Если функции Ψ и g связаны между собой равенством* (6.24), *а f и φ — равенством* (6.1), *то*

$$\sup_{\|\varphi\|_M \leq 1} E_n(f)_M = \sup_{g \in H_V^{(n)}} \|\Psi\|_L \tag{6.25}$$

и

$$\sup_{\|g\|_V \leq 1} E_n(\Psi)_L = \sup_{\varphi \in H_M^{(n)}} \|f\|_M. \tag{6.25'}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Если функция $\varphi\in(M)$, то определяемая ею функция $f\in(C)_{2\pi}$. Отсюда, в силу сделанного замечания о линейных функционалах в $(C)_{2\pi}$ и на основании теоремы 2 § 2, будем иметь

$$E_n(f)_M=E_n(f)_{C_{2\pi}}=\sup_{g\in H_V^{(n)}}\int_0^{2\pi} f(x)\,dg(x),$$

так что

$$\sup_{\|\varphi\|_M\leq 1} E_n(f)_M=\sup_{\|\varphi\|_M\leq 1}\ \sup_{g\in H_V^{(n)}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} K(t-x)\,\varphi(t)\,dt\right)dg(x)=$$

$$=\sup_g\sup_\varphi\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\left(\int_0^{2\pi}K(t-x)\,dg(x)\right)dt=$$

$$=\sup_{g\in H_V^{(n)}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}K(t-x)\,dg(x)\right|dt,$$

откуда, принимая во внимание, что вместе с $g(t)$ функция $g(-t)$ принадлежит к $H_V^{(p)}$, следует (6.25).

Второе равенство доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 10. *Если ядро $K(t)$ удовлетворяет условию (A_n^*) и функции Ψ и g связаны равенством* (6.24), *то справедливы равенства, аналогичные* (6.9′):

$$\sup_{g\in H_V^{(p)}} E_n(\Psi)_L=\sup_{g\in H_V^{(n)}}\|\Psi\|_L=M_n^*\quad(p=0,\,1,\,\ldots,\,n). \tag{6.26}$$

Доказательство. Равенства (6.26) при $p>0$ следуют из (6.25), (6.25′) и (6.9).

Примем теперь во внимание, что если $g\in H_V^{(p)}\ (p=1,\,2,\,\ldots,\,n-1)$ и g — абсолютно непрерывная функция, то производная $g'=g'(x)$ принадлежит к $H_L^{(p)}$ и какова бы ни была непрерывная функция $\mu(t)$

$$\int_0^{2\pi}\mu(t)\,dg(t)=\int_0^{2\pi}\mu(t)\,g'(t)\,dt.$$

В таком случае (6.26) при $p>0$ следует из (6.26) при $p=0$ и из неравенства

$$\sup_{g\in H_V^{(p)}} E_n(\Psi)_L\geqslant\sup_{\varphi\in H_V^{(p)}} E_n(f)_L=M_n^*,$$

где f связано с φ равенством (6.1).

§ 7. Приложения

В этом параграфе приводится ряд приложений к теории, которая была изложена в предыдущем параграфе. В случае равномерного приближения (в смысле M) все они уже рассматривались в литературе

и послужили основанием для теории. Мы ограничимся формулировками основных результатов и замечаниями по поводу того, как они переносятся на приближения в среднем (в смысле L), ссылаясь во всем остальном на соответствующую литературу.

1. Ядра B. Nagy ([9]).

а) Ряд

$$K(t)=\sum_{k=n}^{\infty}{}' \mu_k \cos kt \;* \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{7.1}$$

где положительные числа $\mu_n, \mu_{n+1}, \ldots$ образуют последовательность, сходящуюся к нулю и три раза монотонную: $\Delta_k=\mu_k-\mu_{k+1}\geqslant 0$, $\Delta_k^2=\Delta_k-\Delta_{k+1}\geqslant 0$, $\Delta_k^3=\Delta_k^2-\Delta_{k+1}^2\geqslant 0$ $(k=n, n+1, \ldots)$, сходится равномерно при любом $\varepsilon>0$ на интервале $\varepsilon\leqslant t\leqslant 2\pi-\varepsilon$ к суммируемой функции $K(t)$ и является ее рядом Фурье.

Если положить

$$T_{n-1}^{*}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k^{*}\cos kt, \tag{7.2}$$

где

$$-\mu_k^{*}=c_{n-k}+c_{n+k}, \quad c_k=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\mu_{k+(2s+1)n} \tag{7.3}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1),$$

то

$$K_*(t)=K(t)-T_{n-1}^{*}(t)=\cos nt\, C(t),$$

где $C(t)\geqslant 0$ и равенство $C(t)=0$ имеет место для конечного числа точек. При этом

$$M_n^{*}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K_*(t)|\,dt=\frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{\mu_{(2s+1)n}}{2s+1}. \tag{7.4}$$

Ядро $K(t)$ удовлетворяет, очевидно, условию (A_n^{*}), где $\lambda^{*}=\frac{\pi}{n}$. Таким образом, если f и φ связаны равенством (6.1), то

$$\sup_{\varphi\in H_L^{(p)}} E_n(f)_L=\sup_{\varphi\in H_M^{(p)}} E_n(f)_M=M_n^{*}, \tag{7.5}$$

где M_n^{*} определяется при помощи (7.4).

Наилучший линейный метод для классов $H_M^{(p)}$ и $H_L^{(p)}$ $(p=0, 1, \ldots, n-1)$ имеет вид (см. § 6 п. 6)

$$U_{n-1}(f; x; \mu_*, 0)=\sum_{k=p}^{n-}\mu_k^{*}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где числа μ_k^{*} определяются по формулам (7.3) и a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции φ.

* Штрих при сумме обозначает, что при $n=0$ нужно член, соответствующий $k=0$, разделить на 2.

В случае $H_M^{(p)}$ $(p=0, 1, \ldots, n-1)$ и $H_L^{(p)}$ $(p=1)$ этот метод единственный, так как ядро $K(t)$ в $2n$ нулях функции $\cos nt$ непрерывно и меняет знак (теорема 6 и 8 § 6).

b) Ряд

$$K(t)=\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k \sin kt \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{7.6}$$

где $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{\nu_k}{k} < \infty$ и положительные числа $\nu_n, \nu_{n+1}, \ldots$ образуют сходящуюся к нулю два раза монотонную последовательность, сходится равномерно при всяком $\varepsilon > 0$ в интервале $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$ к суммируемой функции $K(t)$ и является ее рядом Фурье.

Если положить

$$T_{n-1}^*(t)=\sum_{k=1}^{n-1} \nu_k^* \sin kt, \tag{7.7}$$

$$\nu_k^*=\sum_{s=1}^{\infty} (\nu_{2sn+k}-\nu_{2sn-k}) \quad (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

то

$$K_*(t)=K(t)-T_{n-1}^*(t)=\sin nt\, D(t),$$

где $D(t) \geqslant 0$ и равенство $D(t)=0$ имеет место в конечном числе точек. При этом

$$M_n^*=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_*(t)|\, dt=\frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\nu_{(2s+1)n}}{2s+1}. \tag{7.8}$$

Ядро $K(t)$ удовлетворяет, очевидно, условию (A_n^*), где $\lambda_*=\frac{\pi}{n}$. Таким образом, если f и φ удовлетворяют (6.1), то имеет место равенство (7.5), где M_n^* определяется при помощи (7.8).

Наилучший линейный метод для классов $H_M^{(p)}$ и $H_L^{(p)}$ $(p=1, 2, \ldots, n-1)$ имеет вид

$$U_{n-1}(f; x; 0; \nu_*)=\sum_{k=p}^{n-1} \nu_k^* (b_k \cos kx - a_k \sin kx),$$

где числа ν_k^* определяются по формулам (7.7) и a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции φ. В случае $H_M^{(p)}$ $(p=0, 1, \ldots, n-1)$ этот метод единственный (теорема 6 § 6), так как ядро $K(t)$ непрерывно и меняет знак в $2n-1$ точках $t_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=1, 2, \ldots, 2n-1)$. В случае $H_L^{(1)}$ $(p=1)$, он также единственный, если ядро $K(t)$ непрерывно при $t=0$.

2. Класс $W^{(r)}LK$, как это следует из § 3, можно определить как класс функций f, представимых в виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} D_1^{(r)}(t-x)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$D_1^{(r)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}$$

и $\varphi\in H_L^{(1)}$ (мы считаем $a_0=0$).

При r четном и нечетном ряд $D_1^{(r)}$ представляет собой с точностью до знака ряд вида (7.1) или (7.6) и коэффициенты его k^{-r}, начиная с любого $k=n$, удовлетворяют условиям, перечисленным в 1a) и 1b) и, таким образом, $D_1^{(r)}$ удовлетворяет условию (A_n^*).

Отсюда следует, в частности, в силу (7.5), (7.4) и (7.8), что

$$\sup_{f\in W^{(r)}MK} E_n(f)_M=\sup_{f\in W^{(r)}LK} E_n(f)_L=\frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(r+1)s}}{(2s+1)^{r+1}}\frac{K}{n^r}=KM_n^*.$$

Эта формула в случае $W^{(r)}MK$ была получена в работах Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна ([2]) и J. Favard'a ([5]). Там же было дано для $W^{(r)}MK$ эффективное выражение наилучшего линейного метода, единственного, в силу замечаний, сделанных в конце пп. 1a) и 1b). Это выражение, вследствие изложенного в § 6, является наилучшим линейным методом и для класса $W^{(r)}LK$ и притом для $r>1$, в силу непрерывности $D^{(r)}(t)$, единственным.

В упомянутой работе ([2]) получены также оценки для наилучших приближений и наилучших линейных методов в случае класса $\overline{W^{(r)}MK}$ функций, тригонометрически сопряженных функциям класса $\overline{W^{(r)}MK}$. Эти оценки соответствующим образом переносятся на класс $W^{(r)}LK$, так как ядро, к которому сводятся все рассмотрения, удовлетворяет условию (A_n^*).

Отметим еще работы Н. И. Ахиезера ([1b]) и М. Г. Крейна ([8]), где даются оценки наилучших приближений $E_n(f)_M$ для классов, более общих, чем $W^{(r)}MK$, сводящихся к ядрам, удовлетворяющим условию (A_n^*). Они, следовательно, соответствующим образом переносятся на случай $E_n(f)_L$.

3. Пусть

$$h(r,x)=\sum_{k=n}^{\infty}{}' r^k(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{7.9}$$

— гармоническая функция в круге $0\leqslant r<1$, $0\leqslant x<2\pi$, где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f, принадлежащей к классу $H_L^{(k)}$, иначе говоря: $f\in(L)$, $\|f\|_L\leqslant 1$ и

$$\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sin kt}\,dt=0\quad(k=0,\ \ldots,\ n-1)$$

(при $n=0$ последнее равенство опускается).

Тогда

$$\sup_{f\in H_L^{(n)}} \int_0^{2\pi} |h(r, x)|\, dx = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} r^{(2\nu+1)n} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} r^n \tag{7.10}$$

$$(0 \leqslant r < 1).$$

Действительно,

$$h(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-x) f(t)\, dt, \tag{7.11}$$

где ядро Пуассона $P_r(t) = \sum_{k=n}^{\infty}{}' r^k \cos kt$ удовлетворяет условию Nagy (п. 1а). Таким образом, равенство (7.10) вытекает из (6.9′) и (7.4).

Рассмотренный нами класс $R^{(n)}$ гармонических функций можно еще определить ((6) § 4.36), как класс гармонических функций $h(r, x)$, ортогональных при фиксированном r ко всем тригонометрическим полиномам $(n-1)$-го порядка и удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{2\pi} |h(r, x)|\, dx \leqslant 1 \quad (0 \leqslant r < 1), \tag{7.12}$$

$$\lim_{r,\rho\to 1} \int_0^{2\pi} |h(r, x) - h(\rho, x)|\, dx = 0, \tag{7.13}$$

так как эти условия эквивалентны существованию функции $f \in H_L^{(n)}$, коэффициентами Фурье которой служат числа a_k и b_k.

Для более обширного класса $R_*^{(n)}$ гармонических в круге $0 \leqslant r < 1$ функций h вида (7.9), удовлетворяющих только одному условию (7.12), справедлива та же оценка (7.10):

$$\sup_{h\in R_*^{(n)}} \int_0^{2\pi} |h(r, x)|\, dx = \sup_{h\in R^{(n)}} \int_0^{2\pi} |h(r, x)|\, dx.$$

В самом деле, класс функций $h \in R_*^{(n)}$ можно определить как класс функций h вида ((6) § 4.36)

$$h(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-x)\, dF(t), \tag{7.14}$$

где $F \in H_V^{(n)}$ (§ 6. п. 7) и наше утверждение вытекает из равенства (6.24).

Пусть

$$\overline{h(r, x)} = \sum_{k=n}^{\infty} r^k (b_k \cos kx - a_k \sin kx)$$

$$(n = 0, 1, \ldots)$$

— сопряженная гармоническая функция в круге $0 \leqslant r < 1$ (a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f \in H_L^{(n)}$).

Тогда

$$\sup_{f\in H_L^{(n)}} \int_0^{2\pi} |\overline{h(r, x)}|\, dx = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} r^{(2\nu+1)n} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lg\frac{1+r^n}{1-r^n} \quad (n=1, 2, \ldots,). \tag{7.15}$$

(Левая часть этого равенства, если положить в ней $n=0$, равна правой части при $n=1$).

В самом деле,

$$\overline{h(r, x)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P_r(t-x)}\, f(t)\, dt,$$

где $P_r(t) = \sum_{k=n}^{\infty} r^k \sin kt$ удовлетворяет условию Nagy (п. 1b). Следовательно, (7.15) следует из (6.9) и (7.8).

Оценки (7.15) сохраняются, если в них заменить $H_L^{(n)}$ на $H_V^{(n)}$ и a_k и b_k считать коэффициентами Фурье-Стильтьеса функции $f\in H_V^{(n)}$.

В случае $H_M^{(n)}$ эти оценки были получены Nagy (9).

4. Пусть $A_M K$ и $A_L K$ обозначают классы аналитических функций, определенные в п. 2 § 4. Тогда

$$\sup_{F\in A_M K} E_n(F)_M = \sup_{F\in A_L K} E_n(F)_L =$$

$$= \frac{8K}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{1+q^{2(2\nu+1)n}}\,\frac{1}{2\nu+1} \quad (q=e^{-h}). \tag{7.16}$$

В случае M это равенство было получено Н. И. Ахиезером. Справедливость его в случае L обнаруживается следующим образом. Если $F\in A_L K$, то, как было показано в п. 2 § 4, имеет место

$$F(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(t-\theta)\, d\Phi(\theta), \quad \|\Phi\|_{\nu} \leqslant 1,$$

где $H(t)$ определяется при помощи (4.9). Далее, Н. И. Ахиезер показал, что разность $H_*(t) = H(t) - T_{n-1}^*(t)$, где $T_{n-1}^*(t)$ — четный тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, совпадающий с $H(t)$ в нулях $\cos nt$, изменяет свой знак в этих нулях и только в них и, следовательно, ядро H удовлетворяет условию (A_n^*). Поэтому на основании (6.26)

$$\sup_{F\in A_L K} E_n(F)_L = \frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} |H_*(t)\, dt = \frac{K}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} H(t)\,\mathrm{sign}\cos nt\, dt\right|. \tag{7.17}$$

Правая часть этих равенств как раз равна правой части (7.16).

Поступило
26. XII. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1a] Ахиезер Н. И., О наилучшем приближении аналитических функций, Доклады Ак. Наук СССР, XVIII, 1938.

[1b] Ахиезер Н. И., О наилучшем приближении одного класса непрерывных периодических функций, Доклады Ак. Наук СССР, XVII, 1937.

[1c] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Харьков, 1940.

[2] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении периодических функций, Доклады Ак. Наук СССР, XV, (1937), 107—111.

[3] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[4] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, М.—Л., 1937.

[5] Favard J., Sur les meilleures procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polinomes trigonométriques, ,Bull. de Sciences Math., LXI (1937), 209—224, 243—256.

[6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[7] Kolmogoroff A., Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Annals of Math., 36 (1935), 521—526.

[8] Крейн М. Г., К теории наилучшего приближения периодических функций, Доклады Ак. Наук СССР, XVIII, 1938.

[9] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, Berichte Akad. d. Wiss. Leipzig, 1938.

[10a] Никольский С., Оценки остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную, Доклады Ак. Наук СССР, XXXI, 1941.

[10b] Никольский С., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Математического института Ак. Наук СССР, XV, (1945), 1—76.

[11] Пинкевич В. Т., О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., (1940), 521—528.

S. NIKOLSKY. APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN THE MEAN BY TRIGONOMETRICAL POLYNOMIALS

SUMMARY

§ 1. Introduction

During the last decade the mathematical literature has been enriched by a number of works which contain accurate and asymptotic estimates for approximations of periodic functions by trigonometrical polynomials. We mention here the papers of A. Kolmogoroff, J. Favard, N. Akhiezer, M. Krein, B. Nagy, and of the author (see References).

In all these papers a class $\mathfrak{M}$ of functions f and a method of approximation U_n are considered. With every f belonging to $\mathfrak{M}$ the method U_n associates the approximating trigonometrical polynomial $U_n(f, x)$ of order $< n$. The problem consists in determining the upper bound of the deviation of f from its approximations

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \max_x |f(x) - U_n(f, x)|$$

of the upper bound of the form

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M}, x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |.(x) - U_n(f, x)|.$$

In the present paper we consider a similar problem. Our main purpose, however, is to obtain the estimates for the deviations of f from its approximations in the mean

$$\|f - U_n(f)\|_L = \int_0^{2\pi} |f(x) - U_n(f, x)|\, dx.$$

We shall mean by (M), as usual, the space of bounded functions on the interval (a, b) with the norm $\|f\|_M = \sup\limits_{a \leq t \leq b} \text{vrai}\, |f(t)|$, while (L) will denote the space of summable (on (a, b)) functions with the norm $\|f\|_L = \int_a^b |f(t)|\, dt$. These notations will also be used for the spaces of periodic functions of period ω (of 2π) bounded (resp. summable) on $(0, \omega)$ with the same norms (provided $a = 0$, $b = \omega$).

§ 2. General theorems

THEOREM 1. *Let E be a Banach space with elements $x, y, \ldots$ and let $F, F_1, \ldots, F_n$ be linear functionals on E.*

If H is the subspace of elements $x \in E$ for which $F_k(x) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, then

$$\min_{\lambda} \left\| F - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \in H} F(x), \tag{2.1}$$

where the minimum on the left is extended over all numbers λ_k and the upper bound on the right is extended over the elements $x \in H$ with $\|x\| \leq 1$. If $x_0 \in H$, $\|x_0\| = 1$ and $F(x_0) = \|F\|$, then the minimum in (2.1) *is attained at $\lambda_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.*

LEMMA. *If F is a linear functional on the Banach space E and L is the subspace of E on which F vanishes, then for every $x \in E$*

$$|F(x)| = \|F\| = r(x, L), \tag{2.4}$$

where $r(x, L) = \inf\limits_{u \in L} \|x - u\|$.

THEOREM 2. *If $x, x_1, \ldots, x_n$ are elements of the Banach space E, then*

$$\min_{\lambda} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| = \max_{\|F\| \leqslant 1,\, F(x_k)=0} F(x), \tag{2.5}$$

where the minimum is extended over all systems of the numbers λ_k and the maximum is extended over all the linear functionals F on E with $\|F\| \leqslant 1$ satisfying the conditions $F(x_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. The maximum on the right is attained at a certain functional F.

If for the element x there is a unique functional F_0 with $\|F_0\| \leqslant 1$ such that $F_0(x) = \|x\|$ and the minimum on the left is attained at $\lambda_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, then $F_0(x_k) = 0$ for all k.

Theorems 1 and 2 imply a number of sequences stated below. Note that the integral $\int_a^b h(t)\psi(t)\,dt$, where $h \in (M)$, $\psi \in (L)$, can be considered, on the one hand, as a linear functional $F(h)$ on (M) with the norm $\|F\| = \|\psi\|_L$ and, on the other hand, as a linear functional $\Phi(\psi)$ on (L) with the norm $\|\Phi\| = \|h\|_M$.

If $\psi(t)$ vanishes only on a set of measure zero, then there is a unique (up to its values on a set of measure zero) function $h(t) = \operatorname{sign} f(t)$ for which $\Phi(\psi) = \int_a^b h(t)\psi(t)\,dt$ attains its maximum $\int_a^b |\psi(t)|\,dt$ for all h with $\|h\|_M \leqslant 1$.

Corollary 1. *If $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ are summable functions on the segment $[a, b]$ such that*

$$\int_a^b \varphi_k(t) \operatorname{sign} f(t)\,dt = 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{2.6}$$

then

$$\min_{\lambda} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(t) \right| dt = \int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{2.7}$$

Conversely, (2.7) implies (2.6), provided $f(t)$ vanishes only on a set of measure zero.

Corollary 2. *Suppose that the functions $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ belong to the space (M) or (L) and $H_L^{(n)}$, $H_M^{(n)}$ are the sets of elements $h(t)$ of*

these space with $\|h\|_L \leqslant 1$ *or* $\|h\|_M \leqslant 1$ *satisfying the conditions*

$$\int_a^b h(t)\varphi_k(t)\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Then

$$\min_{\lambda_k}\Big\|f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\Big\|_M = \sup_{h \in H_L^{(n)}} \int_0^b f(t)\,h(t)\,dt, \tag{2.9}$$

$$\min_{\lambda_k}\Big\|f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\Big\|_L = \sup_{h \in H_M^{(n)}} \int_0^b f(t)\,h(t)\,dt. \tag{2.9'}$$

Corollary 3. *Let* $f(x)$ *be a function continuous on* $[a, b]$ *and let* $(\widetilde{L})$ *denote the subspace of* (L) *which consists of the functions* h *satisfying*

$$\int_a^b h(t)\,dt = 0. \tag{2.10}$$

Then

$$\sup_{\|h\|_{\widetilde{L}} \leqslant 1} \int_a^b f(t)\,h(t)\,dt = \min \|f - \lambda\|_M = \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2 \in [a, b]} \{f(t_1) - f(t_2)\}. \tag{2.11}$$

Corollary 4. *If* $f \in (L)$ *and* $(\widetilde{M})$ *is the subspace of* (M) *which consists of the functions* h *satisfying* (2.10), *then*

$$\sup_{\|h\|_{\widetilde{M}} \leqslant 1} \int_a^b f(t)\,h(t)\,dt = \min_\lambda \int_0^b |f(t) + \lambda|\,dt. \tag{2.12}$$

THEOREM 3. Let (L) be the space of summable (on $[a, b]$) functions f of period ω and let $(\widetilde{L})$ be the subspace of (L) which consists of the functions satisfying (2.10) for $a = 0$, $b = \omega$. If $K(t)$ belongs to (L), then

$$\sup_{\|h\|_{\widetilde{L}} \leqslant 1} \int_0^\omega \Big| \int_0^\omega K(t - x)\,h(t)\,dt \Big|\,dx = \frac{1}{2} \max_t \int_0^\omega |K(x) - K(t + x)|\,dx. \tag{2.13}$$

Proof. See the fransformations following the formula (2.13) in the Russian text.

§ 3. Arbitrary methods of summation of the Fourier series

Let $W^{(r)}MK$ and $W^{(r)}LK$ denote the classes of functions possessing the absolutely continuous $(r-1)$th derivatives and the rth derivatives $f^{(r)}(t) = \varphi(t)$ that are bounded or summable on $[0, 2\pi]$, respectively, and $\|\varphi\|_M \leqslant 1$ or $\|\varphi\|_L \leqslant 1$, respectively.

Let further

$$U_n(f, \lambda) = U_n(f, \lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

where a_k, b_k are the Fourier coefficients, be a method of summation of f determined by a system of numbers λ_k $(k = 1, \ldots, n-1)$.

If we put

$$\Psi_\lambda(t) = D_1^{(r)}(t) - K_\lambda(t),$$

where

$$D_1^{(r)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}, \quad K_\lambda(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right),$$

then

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L=\sup_{f\in W^{(r)}LK}\|f-U_n(f,\lambda)\|_L=$$

$$=\frac{K}{2\pi}\max_t\int_0^{2\pi}|\Psi_\lambda(x)-\Psi_\lambda(t+x)|\,dx, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}MK;\lambda)_M=\sup_{f\in W^{(r)}MK}\sup_x|f(x)-U_n(f,x;\lambda)|=$$

$$=\frac{K}{\pi}\min_{\lambda_0}\int_0^{2\pi}|\Psi_\lambda(t)+\lambda_0|\,dt. \tag{3.8}$$

The proofs of these assertions are based upon the fact that a function f belonging to $W^{(r)}MK$ or $W^{(r)}LK$ and $U_n(f,x,\lambda)$ can be represented by the formulae (3.1), (3.2), (3.4) and (3.5) (see the Russian text), where φ satisfies the condition (3.3). The equalities (2.11) and (2.12) are used here.

We also have the evident inequality

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L\leqslant\mathcal{E}_n(W^{(r)}MK;\lambda)_M \tag{3.9}$$

which, as we shall see below, becomes an accurate or an asymptotic equality for some important cases (Fourier's sums, Féjèr's sums, the best methods).

§ 4. Fourier's sums

1. Fourier's sum $S_n(f,x)=S_n(f)$ of order $n-1$ is the particular case of the sum $S_n(f,\lambda;x)$ for $\lambda_k=1$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

The following equalities are valid:

$$\mathcal{E}_{S_n}(W^{(r)}MK;1)_M=\sup_{f\in W^{(r)}MK}|f(x)-S_n(f,x)|=\frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{4.2}$$

$$\mathcal{E}_{S_n}(W^{(r)}LK;1)_L=\sup_{f\in W^{(r)}LK}\|f-S_n(f)\|_L=\frac{4K}{\pi^2}\frac{\lg n}{n}+O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4.3}$$

The first of them is due to A. Kolmogoroff (7).

It follows from (3.9) and (4.2) that the left side of (4.3) does not exceed the right side. The inverse inequality can be obtained by means of the calculations which follow the formula (4.5) in the Russian text proceeding from the equality (3.7) with $\Psi_\lambda(t)=D_n^{(r)}(t)$ and using Kolmogoroff's formulae (4.4) and (4.5) (see (7)), where $\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\delta'_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

The equalities (4.2) and (4.3) hold for an arbitrary real r (in case r is not integer the derivatives are to be understood in Weyl's sense).

2. Let A be the set of functions F with the following properties: $F(w)$ is analytic within stripe $-h<u<h$ $(w=t+iu)$, $F(w)$ has the period 2π and is real on the real axis.

Let $A_M K$ be the class of functions $F \in A$ for which

$$|\operatorname{Re} F(t+iu)| \leqslant K \tag{4.6}$$

on the stripe $-h < u < +h$ ($\operatorname{Re} F$ is the real part of F). $A_L K$ will denote the class of functions $F \in A$ for which

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(t+iu)|\, dt \leqslant K \tag{4.7}$$

on the same stripe.

If $S_n(F) = S_n(F, x)$ denotes Fourier's sum of order $n-1$ of the function F, then

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_{S_n}(A_M)_M &= \sup_{F \in A_M K} \|F - S_n(F)\|_M \\ \mathscr{E}_{S_n}(A_L)_L &= \sup_{F \in A_L K} \|F - S_n(F)\|_L \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{K}{\pi} \int_0^{\pi} |H_n(t)|\, dt = \frac{8K}{\pi}(c_q + \varepsilon_n) q^n, \tag{4.12}$$

where $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$.

$$H_n(t) = 4 \sum_{m=n}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos mt, \tag{4.13}$$

$$c_q = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m-1)!!}{(m!)^2} \frac{q^{2m}}{2^{2m}(1+q^2)^{2m}} \; *. \tag{4.14}$$

The proof is based upon the fact that every function $F \in A_M K$ is representable in the form (4.8), (4.9) (see the Russian text) where

$$\lim_{u \to h} \operatorname{Re} F(t+iu) = \varphi(t), \quad \|\varphi\|_M \leqslant K.$$

Conversely, if φ is a real function of period 2π with $\|\varphi\|_M \leqslant K$, then the function F defined by (4.8) belongs to A_M (N. Akhiezer ([1a])).

As to a function $F \in A_L K$, it is representable in the form (4.11) where $\Phi(\theta)$ is the function of bounded variation on $[0, 2\pi]$ determined as the limit

$$\Phi(\theta) = \lim_{\sigma_k \to h} \Phi(\theta, \sigma_k), \quad \Phi(\theta, \sigma) = \int_0^{\theta} \operatorname{Re} F(t+i\sigma)\, dt$$

for a certain sequence $\sigma_k \to h$. Thereby the complete variation of Φ on $[0, 2\pi]$ does not exceed K. Conversely, if Φ possesses this property, then the function $F(w)$ defined by (4.11) belongs to $A_L K$.

§ 5. Féjèr's sums

Féjèr's sum $\sigma_n(f, x) = \sigma_n(f)$ of order $n-1$ is the particular case of $U_n(f, x; \lambda)$ for $\lambda_k = \frac{n-k}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. In this case

---

* $(4m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (4m-1)$.

$$\Psi_\lambda(t) = D_1^{(r)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}.$$

Let us put

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}MK)_M = \sup_{f \in W^{(r)}MK} |f(x) - \sigma_n(f, x)|,$$

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}LK)_L = \sup_{f \in W^{(r)}LK} \|f - \sigma_n(f)\|_L.$$

I have shown ([10a]) that

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(1)}MK)_M = \frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ &\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}MK)_M = \frac{c_r K}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad (r = 2, 3, \ldots), \\ &c_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^r}. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Here we prove that these equalities remain valid if M be replaced by L. Thus

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(1)}MK)_M = \mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(1)}MK)_M + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}LK)_L = \mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}MK)_M + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad (r = 2, 3, \ldots).$$

The proof is based upon the inequality (3.9), the formula (3.7) and the properties of $\Psi_\lambda(t)$ which are used for the estimates (5.1) in the paper just referred to.

§ 6. The best approximations and the best linear method

1. Let (L) and (M) denote the spaces of functions of period 2π summable (resp. bounded) on $[0, 2\pi]$ and let $K(t)$ be a function belonging to (L).

We put

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t - x)\varphi(t)\,dt. \tag{6.1}$$

Let $H_M^{(p)}$ $(p > 0)$ denote the class of functions $h \in M$ with $\|h\|_M \leqslant 1$ satisfying the conditions

$$\int_0^{2\pi} h(t) \begin{matrix}\cos kt \\ \sin kt\end{matrix}\, dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{6.2}$$

and let $H_L^{(p)}$ $(p > 0)$ denote the class of functions $h \in (L)$ with $\|h\|_L \leqslant 1$ satisfying the same conditions (6.2). Thereby $H_M^{(0)}$ and $H_L^{(0)}$ denote the sets of functions $h \in (M)$ with $\|h\|_M \leqslant 1$ and $h \in (L)$ with $\|h\|_L \leqslant 1$ respectively.

We also put, if f is a continuous function,

$$E_n(f)_M = \min_{\alpha_k, \beta_k} \max_t \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right| \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6.3}$$

$$E_0(f)_M = \|f\|_M$$

and, if $f \in (L)$

$$E_n(f)_L = \min_{\alpha_k, \beta_k} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right| dt \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (6.4)$$

$$E_0(f)_L = \| f \|_L.$$

THEOREM 1. *If f and φ are connected by the relation* (6.1), *then*

$$\sup_{\|\varphi\|_M \leqslant 1} E_n(f)_M = \sup_{\varphi \in H_L^{(n)}} \| f \|_L, \quad (6.5)$$

$$\sup_{\|\varphi\|_L \leqslant 1} E_n(f)_L = \sup_{\varphi \in H_M^{(n)}} \| f \|_M. \quad (6.5')$$

By means of the calculations which follow from the formula (6.5′) in the Russian text the proof of the formuls (6.5) is given based upon (2.9).

2. We shall suppose that $K(t)$ satisfies also the following

Condition (A_n^*). — 1° $K(t) \not\equiv 0$;

2° there exists a trigonometrical polynomial of order $n-1$

$$T_{n-1}^*(t) = \frac{\mu_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\mu_k^* \cos kt + \nu_k^* \sin kt)$$

and a positive number $\lambda < \frac{\pi}{n}$ such that for almost all t

$$\varphi_*(t+\lambda) = -\varphi_*(t), \quad (6.6)$$

where

$$K_*(t) = K(t) - T_{n-1}^*(t), \quad \varphi_*(t) = \operatorname{sign} K_*(t).$$

The condition (A_n^*) implies that we may take λ to be equal to $\lambda_* = \frac{\pi}{n_*}$, where n_* is an integer $\geqslant n$.

The following equality is true:

$$\min_{T_{n-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | K(t) - T_{n-1}(t) | \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | K(t) - T_{n-1}^*(t) | \, dt = M_n^*, \quad (6.8)$$

where the minimum is extended over all trigonometrical polynomials T_{n-1} of order $n-1$.

THEOREM 3. *If f can be expressed through φ by* (6.1) *and $K(t)$ satisfies the condition* (A_n^*), *then*

$$\sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} E_n(f)_M = \sup_{\varphi \in H_M^{(n)}} \| f \|_M = M_n^*, \quad (6.9)$$

$$\sup_{\varphi \in H_L^{(p)}} E_n(f)_L = \sup_{\varphi \in H_L^{(n)}} \| f \|_L = M_n^* \quad (6.9')$$

$$(p = 0, 1, \ldots, n).$$

The equalities (6.9) have been already proved by J. Favard, N. Akhiezer, M. Krein, and B. Nagy in connection with some important problems dealing with the estimates of the best approximations (see References). All these problems have been reduced to kernels of particular types satisfying the condition (A_n^*).

The equalities (6.9′) are new; for $p = 0$ they follow from (6.5), (6.5′) and (6.9).

The validity of (6.9′) for $p=n$ (and hence for all $p<n$) follows from the fact that for the function $f(x)=f_m(x)$ (belonging to $H_L^{(n)}$) which can be represented by means of the function $\varphi(x)=\varphi_m(x)$ (see the Russian text below (6.10)) we have $\lim_{m\to\infty} E_n(f_m)=M_n^*$.

4. The second equality (6.9) with M_n^* defined as the maximum of the integral (6.8) is true for any summable kernel $K(t)$ independently of the condition (A_n^*).

As to the first equality (6.9), the condition (A_n^*) is necessary, provided $K(t)$ satisfies certain restrictions that are usually fulfilled in applications.

THEOREM 4. *Let $K(t)$ be a summable function of period 2π and let $T_{n-1}^{(0)}(t)$ be a trigonometrical polynomial of order $n-1$ for which*

$$\sup_{\|\varphi\|_M\leq 1} E_n(f)_M=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K_0(t)|\,dt=M_n^0,\quad K_0(t)=K(t)-T_{n-1}^0(t).$$

Then

$$\min_{T_{n-1}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K(t)-T_{n-1}(t)|\,dt=M_n^{(0)}$$

and, if the points at which $K_0(t)=0$ is of measure zero, then $K(t)$ satisfies the condition (A_n^*), and T_{n-1}^*, K_*, M_n^* can be taken for T_{n-1}^0, K_0, M^0 respectively.

6. Let us take a system of numbers (see B. Nagy ([9]))

$$\mu_p,\ \mu_{p+1},\ \dots,\ \mu_{n-1},\quad \nu_p,\ \nu_{p+1},\ \dots,\ \nu_{n-1}\quad (0\leq p\leq n;\ \nu_0=0 \text{ for } p=0)\qquad (6.16)$$

and let us associate with every function f of the form (6.1) with $\varphi\in H_M^{(p)}$ or $\varphi\in H_L^{(p)}$ a trigonometrical polynomial of order $n-1$ *

$$U_{n-1}(f;x;\mu,\nu)=$$

$$=\sum_{k=p}^{n-1}{}'\{\mu_k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+\nu_k(b_k\cos kx-a_k\sin kx)\}\qquad (6.17)$$

determined by (6.16), where a_k and b_h are Fourier's coefficients of the function φ to which the function f corresponds by (6.1).

The polynomial $U_n(f;x;\mu,\nu)$ may be considered as a (linear) approximation of f. The degree of approximation of the function f corresponding to the classes $H_M^{(p)}$ and $H_L^{(p)}$ by these polynomials can be evaluated by means of the following

$$\mathcal{E}_n(H_M^{(p)};\mu,\nu)_M=\sup_{\varphi\in H_M^{(p)}}\|f-U_n(f;\mu,\nu)\|_M,\qquad (6.18)$$

$$\mathcal{E}_n(H_L^{(p)};\mu,\nu)_L=\sup_{\varphi\in H_L^{(p)}}\|f-U_n(f;\mu,\nu)\|_L.\qquad (6.18')$$

It is natural to call the method (6.17) the **best method** for the class $H_M^{(p)}$ (resp. $H_L^{(p)}$) if it is determined by such a system of num-

* The accent at $\sum$ means that the term with the index $p=0$ is to be divided by 2.

bers (6.16) that the upper bound (6.18) (resp. (6.18')) is minimal (J. Favard ([5])).

THEOREM 5. *A linear method of approximation* (6.17) *is the best method for* $H_M^{(p)}$ *if and only if* $\mu_k = \mu_k^{(0)}$, $\nu_k = \nu_k^{(0)}$ $(k = p, \ldots, n-1)$, *where* $\mu_k^{(0)}$ *and* $\nu_k^{(0)}$ *are the coefficients of the polynomial* $T_{n-1}^{(0)}$ *which minimalizes the integral*

$$\int_0^{2\pi} |K - T_{n-1}|\, dt. \tag{6.19}$$

Thereby

$$\mathcal{E}_n(H_M^{(p)};\, \mu^{(0)}, \nu^{(0)})_M = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K - T_{n-1}^{(0)}|\, dt. \tag{6.20}$$

THEOREM 6. *If the kernel* $K(t)$ *satisfies the condition* (A_n^*), *then the linear method* (6.17) *is the best method for the class* $H_M^{(p)}$ *for* $\mu_k = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$ $(k = p, \ldots, n-1)$, *Thereby*

$$\mathcal{E}_n(H_M^{(p)};\, \mu_*, \nu_*)_M = M_n^*.$$

If, moreover, $K(t)$ *is continuous or there are* $2n-1$ *points on the semi-interval* $[0, 2\pi)$ *at which* $K_n^*(t)$ *is continuous and changes its sign, then the best method is unique.*

THEOREM 7. *If the kernel* $K(t)$ *satisfies the condition* (A_n^*), *then the linear method* (6.17) *is the best method for the class* $H_L^{(p)}$ *for* $\mu_k = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$ $(k = p, \ldots, n-1)$. *Thereby*

$$\mathcal{E}_n(H_L^{(p)};\, \mu_*, \nu_*) = M_n^*.$$

THEOREM 8. *If the continuous kernel* $K(t)$ *satisfies the condition* (A_n^*) *and there is a value to such that the function* $K_*(t) = K(t) - T_{n-1}^*(t)$ *changes its sign at* $t = t_k = t_0 + k\lambda_*$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ *and only at these points, then for* $p = 1$ *the best method* (6.17) *for the class* H_L^p *is unique.*

7. Consider the class of functions Ψ representable in the form

$$\Psi(x) = \int_0^{2\pi} K(t - x)\, dg(t), \tag{6.24}$$

where $K(t)$ is a continuous function of period 2π and $g(t)$ is of bounded variation on $(0, 2\pi)$. The functions g are also supposed to be defined on the whole real axis and to satisfy the conditions (for all x)

$$g(0) = 0, \quad g(x-0) + g(x+0) = 2g(x), \quad g(x + 2\pi) - g(x) = g(2\pi) - g(0).$$

The functions g form a Banach space (V) with the norm

$$\|g\|_V = \operatorname*{var}_{0 \le t \le 2\pi} g(t).$$

Denote by $H_V^{(p)}(p=0, 1, \ldots)$ the class of functions $g\in(V)$ for which $\|g\|_V \leqslant 1$ and $\int\limits_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos kt\\ \sin kt\end{matrix}\, dg(t)=0$ (the second condition must be omitted for $p=0$).

THEOREM 10. *If the kernel* $K(t)$ *satisfies the condition* (A_n^*) *and the functions* Ψ, g *are connected by* (6.24), *then the formula analogous to* (6.9′) *take place:*

$$\sup_{g\in H_V^{(p)}} E_n(\Psi)_L = \sup_{g\in H_V^{(n)}} \|\Psi\|_L = M_n^* \quad (p=0, 1, \ldots, n). \tag{6.26}$$

§ 7. Applications

In this paragraph we give a number of applications of the theory exposed in the preceding paragraphs. In the case of uniform approximation (in the sense of M) they have been studied already and they have given rise to a theory. We restrict ourselves to the formulations of the main results with regard to approximations in the mean (in the sense of L).

1. Nagy's kernels ([9]). — a) If the coefficients μ_k of the series

$$K(t) = {\sum_{k=n}^{\infty}}' \mu_k \cos kt$$

form a thrice monotonic sequence tending to zero: $\Delta_k = \mu_k - \mu_{k+1} \geqslant 0$, $\Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1} \geqslant 0$, $\Delta_k^3 = \Delta_k^2 - \Delta_{k+1}^2 \geqslant 0$ $(k=n,\ n+1, \ldots)$, then

$$\sup_{\varphi\in H_L^{(p)}} E_n(f)_L = \sup_{\varphi\in H_M^{(p)}} E_n(f)_M = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_{(2s+1)n}}{2s+1}. \tag{7.4}$$

This follows from the fact that $K(t)$ satisfies the condition (A_n^*) (see ([9])) with T_{n-1}^* defined by the formula (7.2).

The unique best linear method for the classes $H_M^{(p)}$ and $H_L^{(p)}$ has the form

$$U_{n-1}(f; x; \mu_*, 0) = \sum_{k=p}^{n-1} \mu_k^* (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

where μ_k^* are defined by (7.3) (see the Russian text) and a_k, b_k are Fourier's coefficients.

b) If the coefficients of the series

$$K(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \nu_k \sin kt \tag{7.6}$$

form a twice monotonic sequence tending to zero and satisfying the condition $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\nu_k}{k} < \infty$, then

$$\sup_{\varphi \in H_L^{(p)}} E_n(f)_L = \sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} E_n(f)_M = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\nu_{(2s+1)n}}{2s+1}. \tag{7.8}$$

This follows also from the fact that $K(t)$ satisfies the condition (A_n^*) (see ([9])) with T_{n-1}^* defined by (7.7).

The best linear method for $H_M^{(p)}$ and $H_L^{(p)}$ has the form

$$U_{n-1}(f; x; 0; \nu_*) = \sum_{k=p}^{n-1} \nu_k^* (b_k \cos kx - a_k \sin kx),$$

where ν_k^* are defined by (7.7) and a_k, b_k are Fourier's coefficients φ. In case $K(t)$ is continuous the method is unique for $H_M^{(p)} (p = 0, 1, \ldots, n-1)$ and $H_L^{(p)}$ $(p = 1)$.

2. The class $W^{(r)}LK$ (see § 4)

$$\sup_{f \in W^{(r)}LK} E_n(f)_L = \sup_{f \in W^{(r)}MK} E_n(f)_M = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)s}}{(2s+1)^{r+1}} \frac{K}{n^r}.$$

These equalities follow from the fact that the function $f \in W^{(r)}LK$ can be represented in the form (6.1) by means of the kernel $D_1^{(r)}(t)$ (see (3.2)) of Nagy's type.

For $r > 1$ the best method is unique.

Let us note the results due to N. Akhiezer ([1b]) and M. Krein ([2]) that contain the estimates of $E_n(f)_M$ for certain classes more general than $W^{(r)}MK$ reducible to the kernel satisfying the condition (A_n^*). They can be extended to $E_n(f)_L$ in a suitable way.

3. Let $R_*^{(n)}$ denote the class of functions $h(r, x)$ which are harmonic within the circle $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ and satisfy the conditions

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} h(r, x) \begin{matrix}\cos kx \\ \sin kx\end{matrix} \, dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \\ &\int_0^{2\pi} | h(r, x) \, dx \leqslant 1 \quad (0 \leqslant r \leqslant 1). \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Let $R^{(n)}$ denote the class of functions $h(r, x) \in R_*^n$ satisfying the complementary condition

$$\lim_{r, \rho \to 1} \int_0^{2\pi} | h(r, x) - h(\rho, x) | \, dx = 0. \tag{7.13}$$

Then

$$\sup_{h \in R^{(n)}} \int_0^{2\pi} | h(r, x) | \, dx = \sup_{h \in R_*^{(n)}} \int_0^{2\pi} | h(r, x) | \, dx = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} r^{(2\nu+1)n} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} r^n \quad (0 \leqslant r \leqslant 1). \tag{7.10}$$

This result can be obtained from (6.9) and (7.4) by taking into account that a function $h(r, x) \in R^{(n)}$ is representable by the integral (7.12) and a function $h(r, x) \in R_*^{(n)}$ is representable by the integral (7.14), where $f \in H_L^{(n)}$, $F \in H_\nu^{(n)}$ and $P_r(t) = \sum_{k=n}^{\infty}{}' r^k \cos kt$ is the kernel satisfying Nagy's condition.

The similar result holds for the conjugate functions $\overline{h(r, x)}$.

4. Let $A_M K$ and $A_L K$ denote the classes of analytic functions defined in § 4, section 2. Then

$$\sup_{F \in A_M K} E_n(f)_M = \sup_{F \in A_L K} E_n(f)_L = \frac{8K}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{q^{(2\nu+1)n}}{1+q^{2(2\nu+1)n}} \frac{1}{2\nu+1} \quad (7.16)$$

$$(q = e^{-h}).$$

For the case M this equality was obtained by N. Akhiezer.

If $F \in A_L K$ then (4.16) holds, where $H(t)$, as N. Akhiezer has shown, satisfies the condition (A_n^*). Thereby $H_*(t) = H(t) - T_{n-1}^*(t)$ changes its sign at the zeros of $\cos nt$ and nowhere else which implies (7.17) and then (7.16).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 257—270 Série mathématique

А. РОДОВ

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЕРХНИМИ ГРАНЯМИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе устанавливаются исчерпывающим образом зависимости, существующие между верхними гранями абсолютных величин функции, определенной на всей действительной прямой, и ее первых четырех производных. Решается и аналогичная задача для производных i-го, n-го, $n+1$-го и $n+2$-го порядка.

Пусть функция $f(x)$ определена, ограничена и имеет ограниченные первые n производных на всей действительной оси. Обозначим через

$$M_0(f) = \sup |f(x)|,$$

$$M_k(f) = \sup |f^{(k)}(x)|, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

верхние грани абсолютных величин значений функции $f(x)$ и ее производных.

Автор рассматривает новые частные случаи следующей общей задачи: дана конечная последовательность целых чисел

$$0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k = n.$$

Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять последовательность положительных действительных чисел

$$a_0, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} = a_n$$

для того, чтобы существовала определенная и ограниченная вместе со своими первыми n производными на всей действительной оси функция $f(x)$, для которой

$$M_0(f) = a_0, \quad M_{i_m}(f) = a_{i_m}, \quad m = 1, 2, \ldots, k?$$

Если $k = 1$, т. е. дело идет о зависимостях между верхней гранью самой функции $a_0 = M_0(f)$ и верхней гранью какой-либо из ее производных $a_{i_1} = a_n = M_n(f)$, то решение задачи тривиально: существуют функции $f(x)$, соответствующие любой паре положительных чисел (a_0, a_n).

Для случая $k = 2$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, решение было дано Hadamard'ом ([1]) в форме неравенства

$$a_1^2 \leqslant 2a_0 a_2. \tag{1}$$

Для случаев

$$k = 2 \left\{ \begin{array}{llllll} i_1 = 1, & i_1 = 2, & i_1 = 1 & i_1 = 2, & i_1 = 3, & i_1 = 2, \\ i_2 = 3, & i_2 = 3, & i_2 = 4, & i_2 = 4, & i_2 = 4, & i_2 = 5 \end{array} \right.$$

необходимые и достаточные условия были даны Г. Шиловым [2]. Исследование для случая $k=2$ и произвольных i_1 и i_2 было доведено до конца А. Н. Колмогоровым [3]. Называя тройку положительных чисел

$$(a_0, a_m, a_n) \quad 0 < m < n$$

«возможной», если существует соответствующая функция $f(x)$, для которой

$$M_0(f) = a_0, \quad M_m(f) = a_m, \quad M_n(f) = a_n,$$

А. Н. Колмогоров показывает, что тройка (a_0, a_m, a_n) будет возможной тогда и только тогда, когда

$$M_m^n \leqslant C_{nm} M_0^{n-m} M_n^m, \tag{2}$$

где

$$C_{nm} = K_{n-m} : K_n^{\frac{n-m}{n}},$$

$$K_i = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{5^{i+1}} - \frac{1}{7^{i+1}} + \ldots\right) \quad \text{при } i \text{ четном},$$

$$K_i = \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{5^{i+1}} + \frac{1}{7^{i+1}} + \ldots\right) \quad \text{при } i \text{ нечетном}.$$

Неравенство (2) превращается в равенство для экстремальной функции $\psi(x)$, которая определяется следующими условиями:

1. $\psi(x)$ периодична с некоторым периодом $4l$.
2. $\psi^{(n)}(x) = a_n$ при $0 < x < 2l$.
   $\psi^{(n)}(x) = -a_n$ при $2l < x < 4l$.
3. при $0 \leqslant i < n$ $\begin{cases} \psi^i(0) = 0 \text{ для четных } n-i; \\ \psi^i(l) = 0 \text{ для нечетных } n-i. \end{cases}$
4. $M_m(\psi) = a_m$.

Очевидно, что условия 1, 2, 3 определяют функцию $\psi(x)$ с точностью до задания ее периода $4l$. Этот последний определяется из условия 4. Естественно, что в описании вида экстремальной функции $\psi(x)$ содержится неявно значение константы C_{nm}. В разбираемых далее более сложных задачах такая неявная формулировка необходимых и достаточных условий «возможности» последовательности констант

$$(a_0, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$$

через указание соответствующих экстремальных функций представляется автору наиболее целесобразной.

§ 1. Случай $(a_0, a_1, a_2\ a_3)$,

Рассмотрим вопрос об условиях «возможности» последовательности констант (a_0, a_1, a_2, a_3), т. е. об условиях, необходимых и достаточных для существования функции $f(x)$, для которой

$$M_0(f) = a_0, \quad M_1(f) = a_1, \quad M_2(f) = a_2, \quad M_3(f) = a_3.$$

Из цитированного результата Hadamard'а вытекает, что необходимое условие состоит в том, чтобы

$$a_1 \geqslant \frac{a_2^2}{2a_3}.$$

Предполагая это неравенство выполненным, построим функцию $\psi(x)$ на основании следующих условий:

1. $\psi(x)$ периодична с периодом $4l$, где

$$l = \frac{a_2}{a_3} + l_1, \quad l_1 = \frac{a_1 - \frac{a_2^2}{2a_3}}{a_2}.$$

2 $\psi'''(x) = 0$ в интервалах $0 < x < l_1$, $2l - l_1 < x < 2l + l_1$ и $4l - l_1 < < x < 4l$;

$\psi'''(x) = a_3$ в интервале $l_1 < x < 2l - l_1$;

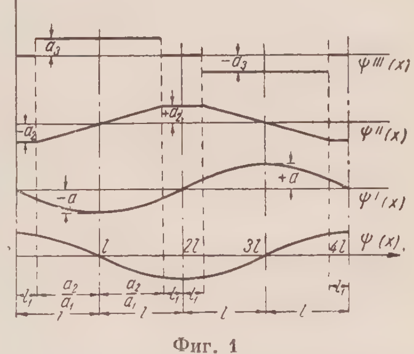
$\psi'''(x) = -a_3$, в интервале $2l + l_1 < x < 4l - l$.

3. $\psi''(l) = 0$, $\psi'(2l) = 0$, $\psi(3l) = 0$.

Очевидно, что $M_3(\psi) = a_3$. Простое вычисление показывает, что при указанном подборе констант l_1 и l, кроме того,

$$M_1(\psi) = a_1, \quad M_2(\psi) = a_2.$$

Возможный вид графиков функций $\psi'''(x)$, $\psi''(x)$, $\psi'(x)$ и $\psi(x)$ указан на фиг. 1.



Фиг. 1

Максимальное значение $|\psi(x)|$ обозначим через $\Psi(a_1, a_2, a_3)$. Легко показать, что это максимальное значение достигается при x, кратном $2l$ (см. фиг. 1), в частности, что $\psi(4l) = \Psi(a_1, a_2, a_3)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы четверка положительных чисел* (a_0, a_1, a_2, a_3) *была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности двух условий*

$$a_1 \geqslant \frac{a_2^2}{2a_3}, \tag{3}$$

$$a_0 \geqslant \Psi(a_1, a_2, a_3). \tag{4}$$

Необходимость условия (3), как уже было отмечено, вытекает из неравенства Hadamard'а (1). При доказательстве необходимости условия (4) будем считать, что

$$f'(3l) = a_1, \quad f(3l) \geqslant 0. \tag{5}$$

В этих допущениях содержится предположение о том, что верхняя грань функции $f'(x)$ достигается в какой-либо определенной точке. Можно показать, что это предположение не ограничивает существенно общности рассмотрений. В дальнейшем мы не будем оговаривать особо аналогичных допущений относительно достижимости верхних граней. Что касается возможности принять без ограничения общности, что верхняя грань $f'(x)$ достигается именно в точке $3l$, а $f(3l) \geqslant 0$, то она достаточно очевидна. Для доказательства неравенства (4) достаточно установить, таким образом, что в предположениях (5)

$$a_0 = \sup|f(x)| \geqslant \Psi(a_1, a_2, a_3).$$

Мы докажем несколько больше, именно, что из (5) вытекает

$$f(4l) \geqslant \psi(4l) = \Psi(a_1, a_2, a_3).$$

Допустим противное:

$$f(4l) < \psi(4l).$$

Так как

$$f(3l) \geqslant 0 = \psi(3l),$$

то в этом случае в некоторой точке x_1 интервала $(3l, 4l)$

$$f'(x_1) < \psi'(x_1),$$

а так как кроме того $f'(3l) = \psi'(3l) = a_1$, то в какой-либо точке x_2 интервала $(3l, x_1)$

$$f''(x_2) < \psi''(x_2). \tag{6}$$

Точка x_2 должна лежать левее $4l - l_1$ так как при $4l - l_1 \leqslant x \leqslant 4l$, $\psi''(x) = -a_2$, а по условию всегда $|f''(x)| \leqslant a_2$.

Обратим внимание на то, что из $f'(3l) = a_1$ вытекает

$$f''(3l) = 0 = \psi''(3l) \tag{6a}$$

(иначе $f'(x)$ не могла бы достигать в точке $x = 3l$ своего максимального значения a_1). Из (6) и (6a) получаем, что

$$f'''(x_3) < \psi'''(x_3)$$

в какой-либо точке x_3 интервала $(3l, x_2)$. Так как $x_3 < x_2 < 4l - l$, то x_3 лежит в интервале $(3l, 4l - l_1)$, в котором всюду $\psi'''(x) = -a_3$.

Таким образом,

$$f'''(x_3) < -a_3,$$

что и приводит к противоречию с требованием $|f'''(x_3)| \leqslant a_3$.

Тем самым необходимость условия (4) доказана.

Достаточность условий (3) и (4) может быть показана путем построения соответствующих примеров, которые легко извлекаются из данной выше конструкции функции $\psi(x)$.

§ 2. Случай $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$

Из теоремы 1 вытекает, что для «возможной» пятерки чисел $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ всегда выполняются неравенства

$$a_2 \geqslant \frac{a_3^2}{2a_4}, \tag{7}$$

$$a_1 \geqslant \Psi(a_2, a_3, a_4). \tag{8}$$

Необходимые и достаточные условия «возможности» пятерки $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ получаются присоединением к этим двум неравенствам еще одного.

Если положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4 удовлетворяют условиям (8) и (7), то они однозначно определяют функцию $\chi(x)$, обладающую следующими свойствами:

1. $\chi(x)$ периодична с периодом $4l$, где

$$l = \frac{a_3}{a_4} + l_1 + l_2, \quad l_1 = \frac{a_2 - \frac{a_3^2}{2a_4}}{a_3}, \quad l_2 = \frac{a_1 - \Psi(a_2, a_3, a_4)}{a_2}.$$

2. $\chi^{IV}(x)=0$ в интервалах $0<x<l_1$, $l-l_2<x<l+l_2$, $2l-l_1<$ $<x<2l+l_1$, $3l-l_3<x<3l+l_2$, $4l-l_1<x<4l$;

$\chi^{IV}(x)=a_4$ в интервалах $l_1<x<l-l_2$, $l+l_2<x<2l-l_1$;

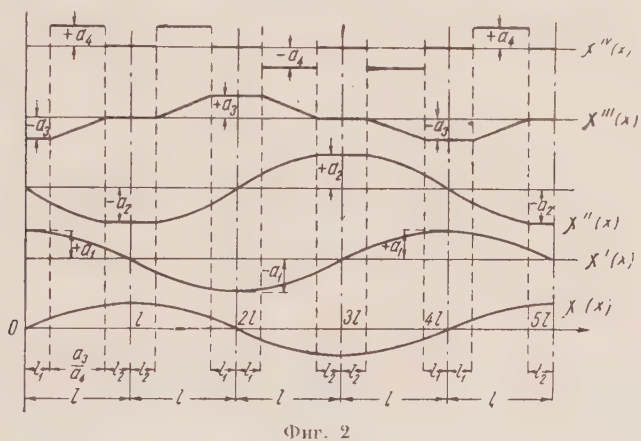
$\chi^{IV}(x)=-a_4$ в интервалах $2l+l_1<x<3l-l_2$, $3l+l_2<x<4l-l_1$.

3. $\chi'''(l)=0$, $\chi''(2l)=0$, $\chi'(3l)=0$, $\chi(4l)=0$.

Простые вычисления показывают, что

$$M_1(\chi)=a_1,\quad M_2(\chi)=a_2,\quad M_3(\chi)=a_3,\quad M_4(\chi)=a_4.$$

Обозначим через $X_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$ максимум $|\chi(x)|$, который достигается в частности в точке $5l$ (фиг. 2).



Фиг. 2

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы пятерка положительных чисел $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности трех условий*:

$$a_2 \geqslant \frac{a_3^2}{2a_4}, \tag{7}$$

$$a_1 \geqslant \Psi(a_2, a_3, a_4), \tag{8}$$

$$a_0 \geqslant X_4(a_1, a_2, a_3, a_4). \tag{9}$$

Как уже указано, необходимость условия (7) и (8) вытекает из теоремы 1. Докажем необходимость условия (9). Для этого рассмотрим функцию $f(x)$ с

$$M_1(f)=a_1,\quad M_2(f)=a_2,\quad M_3(f)=a_3,\quad M_4(f)=a_4$$

и по этим a_1, a_2, a_3, a_4 определим $\chi(x)$ и l. Без ограничения общности можно допустить, что максимум $f'(x)$ достигается в точке $4l$, т. е. что $f'(4l)=a_1$ (откуда $f''(4l)=0$, а также $f(4l)\geqslant 0$). Покажем, что в этом случае

$$f(5l)\geqslant \chi(5l)=X_4(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Предположим противное, т. е. что $f(5l)<\chi(5l)$. Тогда при некотором x_1 из интервала $(4l, 5l)$ будет $f'(x_1)<\chi'(x_1)$ и в силу $f'(4l)=a_1=$ $=\chi'(4l)$ при некотором x_2 из интервала $(4l, x_1)$

$$f''(x_2)<\chi''(x_2). \tag{10}$$

Заметим теперь, что $x_2 < 5l - l_2$, так как в случае $5l - l_2 \leqslant x < 5l$ (см. фиг. 2)

$$\chi''(x) = -a_2 = -M_2(f) \leqslant f''(x).$$

Если принять во внимание, что $f''(4l) = \chi''(4l) = 0$ и $f''(5l - l_2) \geqslant \geqslant \chi''(5l - l_2) = -a_2$, то из (10) можно вывести существование двух точек x_3' и x_3'', для которых

$$\left.\begin{array}{l} 4l < x_3' < x_2 < x_3'' < 5l - l_2, \\ f'''(x_3') < \chi'''(x_3'), \quad f'''(x_3'') > \chi'''(x_3'''). \end{array}\right\} \qquad (11)$$

При этом $x_3' > 4l + l_1$, так как в случае $4l < x \leqslant 4l + l_1$,

$$\chi'''(x) = -a_3 = -M_3(f) \leqslant f'''(x).$$

Следовательно,

$$4l + l_1 < x_3' < x_3'' < 5l - l_2.$$

Из (11) вытекает существование точки x_4, лежащей между x_3 и x_3'', т. е. во всяком случае на интервале $(4l + l_1, 5l - l_2)$, в которой

$$f^{\mathrm{IV}}(x_4) > \chi^{\mathrm{IV}}(x_1).$$

Но на интервале $(4l + l_1, 5l - l_2)$

$$\chi^{\mathrm{IV}}(x_1) = a_4 = M_4(f).$$

Полученное противоречие и служит доказательством необходимости условия (9).

Достаточность совокупности условий (7), (8), (9) показывается построением примеров, которые легко получить видоизменением функции $\chi(x)$.

§ 3. Случай $(a_0, a_1, a_3, a_4, a_5)$

Начнем с введения обозначений, которые будут использованы в этом параграфе лишь для одного частного случая, а в общем виде понадобятся далее.

Функцию $\chi(x)$, определенную в § 2, будем далее обозначать, чтобы указать на использованные в ее определении параметры, через

$$\chi_4(x, a_1, a_2, a_3, a_4).$$

В соответствии с § 2 функцию $\chi_4(x, a, b, c, d)$ будем считать определенной для всех действительных x и для a, b, c, d, подчиненных условиям

$$b \geqslant \frac{c^2}{2d}, \quad a \geqslant \Psi(b, c, d).$$

Положим, далее,

$$\chi_5(x, a, b, c, d) = \int_{5l}^{x} \chi_4(t, a, b, c, d)\, dt$$

и вообще при $n > 4$

$$\chi_n(x, a, b, c, d) = \int_{nl}^{x} \chi_{n-1}(t, a, b, c, d)\, dt.$$

Все эти функции определены в той же области, что и χ_4.

Введем обозначение

$$X_n(a, b, c, d) = \max_x |\chi_n(x, a, b, c, d)| \quad \text{при } n \geqslant 4.$$

При $n=3$ положим дополнительно

$$X_3(a, b, c, d) \equiv a.$$

Легко видеть, что функция $X_n(a, b, c, d)$ при постоянных b, c, d монотонно возрастает с возрастанием a. Поэтому существует обратная функция

$$a = \overline{X}_n(X_n, b, c, d).$$

Очевидно, что, при $n=3$, $\overline{X}_3(r, b, c, d) \equiv r$.

Так как X_n при заданных b, c, d определена для $a \geqslant \Psi(b, c, d)$, то $X_n(r, b, c, d)$ при тех же b, c, d определена для

$$r \geqslant X_n\{\Psi(b, c, d), b, c, d\}.$$

Положим, для $m \geqslant 4$, $n \geqslant 3$

$$\chi_{mn}(x, r; b, c, d) = \chi_m\{x, \overline{X}_n(r, b, c, d), b, c, d\},$$

$$X_{mn}(r, b, c, d) = \max_x |\chi_{mn}(x, r, b, c, d)|.$$

Легко видеть, что $X_{m3} = X_m$.

Область определения функции $X_{mn}(r, b, c, d)$ дается неравенствами

$$b \geqslant \frac{c^2}{2d}, \quad r \geqslant X_n\{\Psi(b, c, d), b, c, d\}.$$

При постоянных b, c, d она монотонно возрастает с возрастанием r. Поэтому существует обратная функция $r = \overline{X}_{mn}(X_{mn}, b, c, d)$. Легко показать, что

$$\overline{X}_{mn}(s, b, c, d) = X_{nm}(s, b, c, d). \tag{12}$$

Заметим, что при помощи функции $\overline{X}_4$ условие (9) теоремы 2 может быть заменено равносильным условием

$$a_1 \leqslant \overline{X}_4(a_0, a_2, a_3, a_4). \tag{9_1}$$

Перейдем теперь к основной задаче этого параграфа: рассмотрению соотношений между $M_0(f)$, $M_1(f)$, $M_3(f)$, $M_4(f)$ и $M_5(f)$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы пятерка положительных чисел* $(a_0, a_1, a_3, a_4, a_5)$ *была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности трех условий*:

$$a_3 \geqslant \frac{a_4^2}{2a_5}, \tag{13}$$

$$a_1 \geqslant \overline{X}_4\{\Psi(a_3, a_4, a_5), a_3, a_4, a_5\}, \tag{14}$$

$$a_0 \geqslant X_5\{\overline{X}_4(a_1, a_3, a_4, a_5), a_3, a_4, a_5)\}. \tag{15}$$

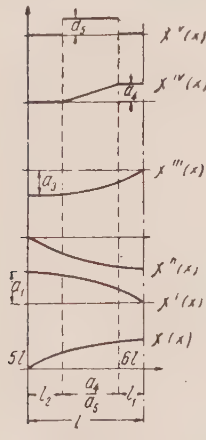
Необходимость условия (13) непосредственно вытекает из неравенства Hadamard'а (¹). Необходимость условия (14) вытекает из теоремы 2, если заметить, что функция $X_4(x, a_3, a_4, a_5)$ убывает с убыванием x. В самом деле, непосредственно из теоремы 2 вытекает необходимость

условия

$$a_1 \geqslant \inf_{a_2} X_4(a_2, a_3, a_4, a_5),$$

но в силу указанной монотонности нижняя грань в правой части достигается при наименьшем совместимом с заданными a_3, a_4, a_5 значении $a_2 = \Psi(a_3, a_4, a_5)$.

Остается доказать необходимость условия (15), т. е. показать, что для функции $f(x)$ с $M_1(f) = a_1$, $M_3(f) = a_3$, $M_4(f) = a_4$, $M_5(f) = a_5$, неизбежно



Фиг. 3

$$M_0(f) \geqslant X_5\{X_4(a_1, a_3, a_4, a_5),\ a_3, a_4, a_5\} = M_0(\chi_5),$$

где положено сокращение

$$\chi_5(x) = \chi_5\{x,\ X_4(a_1, a_3, a_4, a_5),\ a_3, a_4, a_5\}.$$

Графики $\chi_5(x)$ и ее производных даны на фиг. 3.

Без ограничения общности можно принять, что $f'(5l) = a_1$ и $f(5l) \geqslant 0$. Для этого случая покажем, что

$$f(6l) \geqslant \chi_5(6l) = M_0(\chi_5),$$

т. е. что допущение

$$f(6l) < \chi_5(6l) \tag{16}$$

приводит к противоречию.

Так как $f(5l) \geqslant 0 = \chi_5(5l)$, то из (16) вытекает существование в интервале $(5l, 6l)$ точки x_1, в которой $f'(x)_1 < \chi_5'(x_1)$. Так как $f'(5l) = a_1 = \chi'(5l)$, то в некоторой точке x_2 интервала $(5l, x_1)$

$$f''(x_2) < \chi''(x_2). \tag{17}$$

Так как $f''(5l) = 0 = \chi''(5l)$ (в точке $5l$ функция $f'(x)$ достигает своего максимума a_1) и (в силу (9_1), примененного к $f'(x)$)

$$f''(6l) \geqslant -M_2(f) \geqslant -X_4(a_1, a_3, a_4, a_5) = -M_2(\chi_5) = \chi_5(6l),$$

то из (17) вытекает существование точек x_3' и x_3'', для которых

$$\left.\begin{aligned} &5l < x_3' < x_2 < x_3'' < 6l, \\ &f'''(x_3') < \chi_5'''(x_3'), \quad f'''(x_3'') > \chi_5'''(x_3''). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

При этом в действительности $x_3' > 5l + l_2$, так как при $5l < x \leqslant 5l + l_2$

$$f'''(x) \geqslant -a_3 = \chi_5'''(x).$$

Из (18) и из неравенства $f'''(5l + l_2) \geqslant -a_3 = \chi_5'''(5l + l_2)$ заключаем, что существуют точки x_4' и x_4'', для которых

$$\left.\begin{aligned} &5l + l_2 < x_4' < x_3' < x_4'' < x_3'', \\ &f^{IV}(x_4') < \chi_5^{IV}(x_4'), \quad f^{IV}(x_4'') > \chi_5^{IV}(x_4''). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

При этом $x_4'' < 6l - l_1$, так как при $6l - l_1 \leqslant x < 6l$

$$f^{IV}(x) \leqslant a_4 = \chi_5^{IV}(x).$$

Из (19) вытекает существование на интервале (x_4', x_4'') точки x_5, для которой

$$f^{V}(x_5) > \chi_5^{V}(x_5).$$

Это, однако, невозможно, так как x_5 лежит на $(5l + l_2, 6l - l_1)$, а на всем этом интервале $\chi_5^{V}(x) = a_5 = M_5(f)$.

Достаточность условий теоремы 3 доказывается при помощи построения примеров, легко получаемых из функции $\chi_5(x)$.

§ 4. Случай $(a_0, a_2, a_3, a_4, a_5)$

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы пятерка положительных чисел* $(a_0, a_2, a_3, a_4, a_5)$ *была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности условий*

$$a_3 \geq \frac{a_4^2}{2a_5}, \tag{20}$$

$$a_2 \geq \Psi(a_3, a_4, a_5), \tag{21}$$

$$a_0 \geq X_5(a_2, a_3, a_4, a_5). \tag{22}$$

Необходимость условий (20) и (21) очевидна. Докажем необходимость (22). Для этого заметим, что, какова бы ни была функция $f(x)$ с конечными $a_k = M_k(f)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, в силу теоремы 2, примененной к $f'(x)$,

$$a_1 \geq X_4(a_2, a_3, a_4, a_5), \tag{23}$$

а в силу теоремы 3,

$$a_0 \geq X_5\{\overline{X}_4(a_1, a_3, a_4, a_5),\ a_3, a_4, a_5\}; \tag{15}$$

неравенство (23) равносильно условию

$$a_2 \leq \overline{X}_4(a_1, a_3, a_4, a_5), \tag{24}$$

а (15) можно записать в виде

$$a_0 \geq X_{5,4}(a_1, a_3, a_4, a_5), \tag{25}$$

что равносильно

$$a_1 \leq \overline{X}_{5,4}(a_0, a_3, a_4, a_5) = X_{4,5}(a_0, a_3, a_4, a_5).$$

Подставив в правую часть (24) последнюю оценку для a_1 (это законно, так как $\overline{X}_4(a_1, a_3, a_4, a_5)$ монотонно растет с возрастанием a_1), получим

$$a_2 \leq X_4\{X_{4,5}(a_0, a_3, a_4, a_5),\ a_3, a_4, a_5\} = \overline{X}_5(a_0, a_3, a_4, a_5),$$

что равносильно (22).

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы четверка положительных чисел* (a_0, a_3, a_4, a_5) *была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности двух условий:*

$$a_3 \geq \frac{a_4^2}{2a_5}, \tag{20}$$

$$a_0 \geq X_5\{\Psi(a_3, a_4, a_5),\ a_3, a_4, a_5\}. \tag{26}$$

Теорема 5 легко доказывается на основании теоремы 4. Заметим лишь по этому поводу, что (26) есть простое следствие (22), как это ясно из того, что $X_5(a_2, a_3, a_4, a_5)$ монотонно убывает с убыванием a_2, а $\Psi(a_3, a_4, a_5)$ — наименьшее значение a_2, совместимое с заданными a_3, a_4, a_5.

Вводя обозначение

$$\Psi_n(a, b, c) = X_n\{\Psi(a, b, c), a, b, c\}, \quad n = 4, 5, \ldots,$$

можно записать (26) в виде

$$a_0 \geqslant \Psi_5(a_3, a_4, a_5). \tag{27}$$

Вполне аналогично из теоремы 2 можно вывести такую теорему:

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы четверка положительных чисел* (a_0, a_2, a_3, a_4) *была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности условий*

$$a_2 \geqslant \frac{a_3^2}{2a_4}, \tag{28}$$

$$a_0 \geqslant \Psi_4(a_2, a_3, a_4). \tag{29}$$

§ 5. Случай $(a_0, a_i, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$

Ради компактности общих формулировок положим

$$X_3(a, b, c, d) \equiv a,$$
$$X_{m,3}(a, b, c, d) = X_m(a, b, c, d), \quad m = 4, 5, \ldots,$$
$$\Psi_3(a, b, c) = \Psi(a, b, c).$$

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы пятерка положительных чисел* $(a_0, a_i, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$, $0 < i < k$ *была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности трех условий*:

$$a_k \geqslant \frac{a_{k+1}^2}{2a_{k+2}}, \tag{30}$$

$$a_i \geqslant \Psi_{k+2-i}(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}), \tag{31}$$

$$a_0 \geqslant X_{k+2, k+2-i}(a_i, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}). \tag{32}$$

ТЕОРЕМА 8. *Для того чтобы четверка положительных чисел* $(a_0, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$, $k > 0$, *была «возможной», необходимо и достаточно соблюдение совокупности условий* (30) *и условия*

$$a_0 \geqslant \Psi_{k+2}(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}). \tag{33}$$

Теоремы 2 $(i = 1, k = 2)$, 3 $(i = 1, k = 3)$ и 4 $(i = 2, k = 3)$ — частные случаи теоремы 7. Теоремы 1 $(k = 1)$, 6 $(k = 2)$ и 5 $(k = 3)$ — частные случаи теоремы 8.

Заметим еще, что условие (32) равносильно условию

$$a_i \leqslant X_{k+2-i, k+2}(a_0, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}). \tag{32bis}$$

Доказательство теорем 7 и 8 осуществим при помощи индукции по индексу k совместно. Для случаев $i < k = 2$ и $i < k = 3$ подлежащие доказательству утверждения содержатся в теоремах 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поэтому для полного доказательства теорем 7 и 8 достаточно, предположив, что при $i < k = n \geqslant 3$ утверждения теорем 7 и 8 доказаны, доказать их для $i < k = n + 1$.

(α) Начнем с доказательства необходимости условий теоремы 7 для $i = 1$, $k = n + 1$, т. е. с установления того обстоятельства, что для функции $f(x)$, для которой

$$M_0(f) = a_0, \quad M_1(f) = a_1, \quad M_{n+1}(f) = a_{n+1},$$
$$M_{n+2}(f) = a_{n+2}, \quad M_{n+3}(f) = a_{n+3},$$

выполняются неравенства

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_{n+2}^2}{2a_{n+3}}, \tag{34}$$

$$a_1 \geqslant \Psi_{n+2}(a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}), \tag{35}$$

$$a_0 \geqslant X_{n+3,\, n+2}(a_1, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}). \tag{36}$$

Неравенства (34) и (35) получаются непосредственным применением теоремы 8 при $k=n$ к производной функции $f'(x)$. Для доказательства неравенства (36) будем сравнивать функцию $f(x)$ с функцией $\chi(x) = \chi_{n+3,\; n+2}(x+l, a_1, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3})$. Последняя функция (ее определение дано в начале § 3) имеет период $4l$, вычисляющийся по формулам

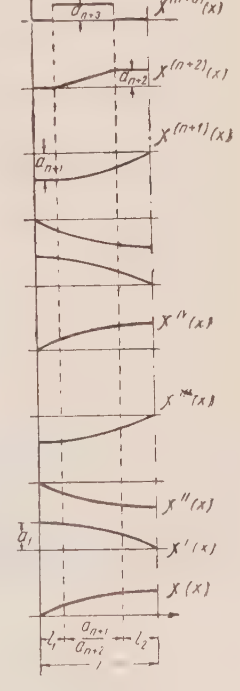
$$l = \frac{a_{n+2}}{a_{n+3}} + l_1 + l_2,$$

$$l_1 = \frac{a_{n+1} - \frac{a_{n+2}^2}{2a_{n+3}}}{a_{n+2}},$$

$$l_2 = \frac{X_{n+2}(a_1, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}) - \Psi(a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3})}{a_{n+1}}.$$

При этом

$$\chi[(n+2)l] = 0, \quad \chi'[(n+2)l] = a_1.$$



Фиг. 4

Вид функции χ и ее производных на отрезке $[(n+2)l, (n+3)l]$ длины l дан на фиг. 4. В силу периодичности $\chi(x)$ можно заменить этот отрезок отрезком $[rl, (r+1)l]$, где $r=0, 1, 2, 3$. Так как доказательство во всех четырех случаях аналогично, рассмотрим случай $r=0$, т. е. n вида $4s+2$. В этом случае

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = a_1.$$

Без ограничения общности можно предположить, что

$$f(0) \geqslant 0 = \chi(0), \tag{37}$$

$$f'(0) = \max |f'(0)| = a_1 = \chi'(0). \tag{38}$$

Из последнего предположения вытекает, что

$$f''(0) = 0 = \chi''(0). \tag{39}$$

Применяя теорему 7 к функции $f'(x)$ при $k=n$, получим в силу (32 bis) для $i=2, 3, \ldots, n-1$,

$$\max|f^{(i)}(x)| \leqslant X_{n+3-i,\, n+2}(a_1, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}) = \max|\chi^{(i)}(x)|. \tag{40}$$

Так как (фиг. 4)

$$\max|\chi^{(4s)}(x)| = \chi^{(4s)}(l),$$
$$\max|\chi^{(4s+1)}(x)| = \chi^{(4s+1)}(0),$$
$$\max|\chi^{(4s+2)}(x)| = -\chi^{(4s+2)}(l),$$
$$\max|\chi^{(4s+3)}(x)| = -\chi^{(4s+3)}(0),$$

то из (40) вытекает

$$f^{(4s)}(l) \leqslant \chi^{(4s)}(l), \qquad (41_0)$$
$$f^{(4s+1)}(0) \leqslant \chi^{(4s+1)}(0), \qquad (41_1)$$
$$f^{(4s+2)}(l) \geqslant \chi^{(4s+2)}(l), \qquad (41_2)$$
$$f^{(4s+3)}(0) \geqslant \chi^{(4s+3)}(0). \qquad (41_3)$$

Подлежащее доказательству неравенство (36) можно написать в виде

$$\max|f(x)| \geqslant \max|\chi(x)| = \chi(l).$$

Допустим обратное:

$$\max|f(x)| < \chi(l).$$

Тогда, в частности,

$$f(l) < \chi(l). \qquad (41a)$$

Из (37) и (41a) вытекает существование точки x_1, $0 < x_1 < l$, в которой

$$f'(x_1) < \chi'(x_1).$$

Отсюда вместе с (38) вытекает существование точки x_2, $0 < x_2 < x_1$, в которой

$$f''(x_2) < \chi''(x_2).$$

Отсюда, из (39) и из (41_2) при $s = 0$ вытекает существование точек x_3' и x_3'', $0 < x_3' < x_2 < x_3'' < l$, для которых

$$f'''(x_3') < \chi'''(x_3'), \quad f'''(x_3'') > \chi'''(x_3'').$$

Аналогично, используя неравенства (41), найдем для $k = 4, 5, \ldots, n+1$ точки x_k', x_k'', для которых *

$$0 < x_4' < x_3' < x_4'' < x_3'',$$
$$x_4' < x_5' < x_4'' < x_5'' < l,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n' < x_{n+1}' < x_n'' < x_{n+1}'' < l,$$

$$f^{(4)}(x_4') < \chi^{(4)}(x_4'), \qquad f^{(4)}(x_4'') > \chi^{(4)}(x_4''),$$
$$f^{(5)}(x_5') > \chi^{(5)}(x_5'), \qquad f^{(5)}(x_5'') < \chi^{(5)}(x_5''),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n+1)}(x_{n+1}') < \chi^{(n+1)}(x_{n+1}'), \quad f^{(n+1)}(x_{n+1}'') > \chi^{(n+1)}(x_{n+1}'').$$

Так как на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l_1$

$$\chi^{(n+1)}(x) = -a_{n+1},$$

то $x_{n+1}' > l_1$. Из $l_1 < x_n' < x_n''$,

$$f^{(n+1)}(l_1) \geqslant \chi^{(n+1)}(l_1) = -a_{n+1}, \quad f^{(n+1)}(x_{n+1}') < \chi^{(n+1)}(x_{n+1}'),$$
$$f^{(n+1)}(x_{n+1}'') > \chi^{(n+1)}(x_{n+1}'')$$

---

* Следует иметь в виду, что мы специально рассматриваем случай n вида $4s + 2$.

вытекает существование x'_{n+2} и x''_{n+2}, $l_1 < x'_{n+2} < x'_{n+1} < x''_{n+2} < x''_{n+1} < l$, для которых

$$f^{(n+2)}(x'_{n+2}) < \chi^{(n+2)}(x'_{n+2}), \quad f^{(n+2)}(x''_{n+2}) > \chi^{(n+2)}(x''_{n+2}). \tag{42}$$

Так как на отрезке $l-l_2 \leqslant x \leqslant l$

$$\chi^{(n+2)}(x) = a_{n+2},$$

то $x''_{n+2} < l-l_2$. Из $l_1 < x'_{n+2} < x''_{n+2} < l-l_2$ и неравенств (42) следует, что существует точка x_{n+3}, $l_1 < x_{n+3} < l-l_2$, для которой

$$f^{(n+3)}(x_{n+3}) > \chi^{(n+3)}(x_{n+3}).$$

Но так как на отрезке $l_1 < x < l-l_2$

$$\chi^{(n+3)}(x) = a_{n+3},$$

то

$$f^{(n+3)}(x_{n+3}) > a_{n+3} = \max |f^{(n+3)}(x)|,$$

что невозможно. Таким образом, неравенство (36) доказано.

(β) Достаточность условий (34), (35) и (36) для существования функции $f(x)$ с требуемыми

$$M_0(f) = a_0, \quad M_1(f) = a_1, \quad M_{n+1}(f) = a_{n+1},$$
$$M_{n+2}(f) = a_{n+2}, \quad M_{n+3}(f) = a_{n+3}$$

вытекает из существования соответствующей функции

$$\chi(x) = \chi_{n+3,\, n+2}(x, a_1, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}).$$

Требуемая функция $f(x)$ получается путем прибавления к $\chi(x)$ соответствующим образом подобранной константы.

(γ) Переходим к доказательству необходимости условий теоремы 7 для $k=n+1$ и $i>1$. Соблюдение при $0<i<k=n+1$ условий (30) и (31) вытекает из принятых допущений непосредственно (теорема 8 для $k'=n+1-i$). Остается установить справедливость при $i>1$, $k=n+1$ неравенства (32), т. е. неравенства

$$a_0 \geqslant X_{n+3,\, n+3-i}(a_i, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}). \tag{43}$$

Для этого заметим, что (43) для $i=1$ (т. е. неравенство (36)) уже доказано, что дает нам ((32 bis) при $i=1$, $k=n+1$):

$$a_1 \leqslant X_{n+2,\, n+3}(a_0, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}). \tag{44}$$

Так как, кроме того,

$$a_i \leqslant X_{n+1-i,\, n+2}(a_1, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}) \tag{45}$$

(неравенство (32 bis) для $f'(x)$ при $k=n$), то, подставляя оценку (44) для a_1 в (45), получим

$$a_1 \leqslant X_{n+1-i,\, n+2}[X_{n+2,\, n+3}(a_0, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}), a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}] =$$
$$= X_{n+3-i,\, n+3}(a_0, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}),$$

что эквивалентно неравенству (43), которое тем самым и доказано.

(δ) Достаточность условий теоремы 7 при $k=n+1$ и любом i доказывается существованием той же самой функции $\chi(x)$, которая была использована при $i=1$. Именно, при заданных a_k, a_{k+1}, a_{k+2} можно для

каждого a_i, удовлетворяющего неравенству (31), определить a_1 таким образом, что $M_i(\chi)=a_i$. Функция $f(x)$ с M_0, M_i, M_k, M_{k+1} и M_{k+2}, равными, соответственно, $a_0, a_i, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$, получается из подобранной таким образом $\chi(x)$ прибавлением надлежащей константы.

(ε) Справедливость теоремы 8 для $k=n+1$ обнаруживается легко.

Поступило
22. X. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hadamard, J., C. R. des séances de la Soc. math. de France, 24 juin 1914.
[2] Шилов Г. Е., Сборник работ студентов МГУ, (1937), 17—27.
[3] Kholmogoroff, A., C. R. Paris, t. 207, p. 764.

A. RODOV. RELATIONS BETWEEN UPPER BOUNDS OF DERIVATIVES OF FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE

SUMMARY

Let a function $f(x)$ be defined on the whole real axis. Suppose that $f(x)$ is bounded, together with its n first derivatives, for $-\infty < x < +\infty$. Let

$$M_0(f)=\sup|f(x)|,$$

$$M_k(f)=\sup|f^{(k)}(x)|, \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

The author considers some new particular cases of the following general problem: given a finite aggregate of integers

$$0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n = n,$$

under what (necessary and sufficient) conditions imposed on the aggregate of positive real number

$$a_0, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} = a_n$$

there is a function $f(x)$ bounded, together with its n first derivatives, on the real axis, such that

$$M_0(f)=a_0, \quad M_{i_m}(f)=a_{i_m}, \quad m=1, 2, \ldots k?$$

The case $k=2$ was studied by A. N. Kholmogoroff with exhaustive completeness (the case $k=1$ is trivial).

The author has succeded in solving the problem in the case $k=3$ for the relations between

$$M_0, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}$$

(n is arbitrary) or

$$M_0, M_i, M_n, M_{n+1}$$

($0 < i < n$ are arbitrary), as well as in the case for the relations between

$$M_0, M_i, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}$$

($0 < i < n$ are arbitrary). In particular, we have a complete solution of the problem concerning the relations between the upper bounds of the absolute magnitudes of the function itself and its four first derivatives (see § 2).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 271—276 Série mathématique

П. Ш. ХАГЛЕЕВ

ОБ ОДНОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе устанавливается полнота одной последовательности функций, определенных с помощью функции $\mu(n)$.

Рассмотрим периодическую функцию $F(x)$ с периодом, равным единице, и определенную в интервале $(0,1)$ следующей формулой:

$$F(x)=1+2(2[x]-[2x])=\begin{cases}+1 & \text{если} \quad 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1 & \text{если} \quad \frac{1}{2}\leqslant x<1.\end{cases} \tag{1}$$

Ее рядом Фурье будет:

$$F(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)2\pi x}{2k+1}. \tag{2}$$

Образуем последовательность функций $\tau_1(x), \tau_3(x), \tau_5(x), \ldots$, где $\tau_n(x)=nF(nx)$, и поставим задачу об ортонормировании последовательности $\tau_n(x)$ по E. Schmidt'у.

Скалярное произведение $\tau_n(x)$ на $\tau_m(x)$ будет

$$(\tau_n, \tau_m)=\frac{16mn}{\pi^2}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(2k+1)nx}{2k+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(2l+1)mx}{2l+1}\right)dx=$$

$$=\frac{8mn}{\pi^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{(2k+1)n}}{2k+1}, \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha_{(2l+1)m}}{2l+1}\right)=\frac{8mn}{\pi^2}\left(\sum_{k\equiv 0 \pmod n}{}' \frac{\alpha_k}{\frac{k}{n}}, \sum_{l\equiv 0 \pmod m}{}' \frac{\alpha_l}{\frac{l}{m}}\right)=$$

$$=\frac{8m^2n^2}{\pi^2}\sum_{k\equiv 0 \pmod{[m,n]}}{}' \frac{1}{k^2}=\frac{8m^2n^2}{\pi^2[m,n]^2}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^2}=(m,n)^2. \tag{3}$$

(Здесь и в дальнейшем штрихи при знаке $\sum$ означают, что суммирование распространено на все нечетные числа и $\alpha_n=\sqrt{2}\sin 2\pi nx$).

Докажем, что последовательность функций $\rho_1(x), \rho_3(x), \rho_5(x), \ldots$, определенная формулами

$$\rho_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\tau_d(x), \tag{4}$$

где

$$\varphi_2(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 = n^2 \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \tag{5}$$

будет ортонормированной системой в интервале (0,1).

Действительно, при $k < n$ скалярное произведение

$$(\rho_n, \tau_k) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\left(\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\tau_d, \tau_k\right) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)(\tau_d, \tau_k) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) g((d, k)) = 0, \tag{6}$$

где $g((n, m)) = (m, n)^2$. Здесь использована арифметическая лемма, доказанная Н. П. Романовым, которая утверждает: если $k < n$ и $f(u)$ — любая функция, то

$$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) f((k, d)) = 0.$$

Из равенства (6) непосредственно следует, что $(\rho_m, \rho_n) = 0$ при $m < n$, так как, согласно (4), $\rho_m(x)$ есть линейная комбинация τ_ν с ν, не превосходящим m. Этим доказано, что система $\rho_n(x)$ ортогональна.

Остается показать, что система $\rho_n(x)$ нормирована. Имеем

$$(\rho_n, \rho_n) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\left(\sum \mu\left(\frac{n}{d}\right)\tau_d, \rho_n\right) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}}(\tau_n, \rho_n) =$$
$$= \frac{1}{\varphi_2(n)}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)(\tau_d, \tau_n) = \frac{1}{\varphi_2(n)}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)(n, d)^2 =$$
$$= \frac{1}{\varphi_2(n)}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 = 1$$

Принцип обращения Мёбиуса утверждает, что из соотношения $a_n = \sum_{d|n} b_d$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ следует $b_n = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и наоборот. Нетрудно показать, что верен аналогичный факт: из соотношения $a_n = \sum_{d|n} b_d$ $(n = 1, 3, 5, \ldots)$ следует $b_n = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d$ $(n = 1, 3, 5, \ldots)$. Поэтому формула (4) дает

$$\tau_n(x) = n^{-1}\sum_{d|n}\sqrt{\varphi_2(d)}\,\rho_d(x). \tag{7}$$

Производящий ряд Дирихле для системы функций $\rho_n(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}\,\rho_n(x)}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta^{-1}(s)\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1 + 2(2[nx] - [2nx])}{n^{s-1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 2. \tag{8}$$

Он может быть получен из соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{\tau_m(x)}{m^s} = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sum_{d/k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \tau_d(x)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sqrt{\varphi_2(k)}\, \rho_k(x)}{k^s} \tag{9}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta^{-1}(s), \tag{10}$$

где $\zeta(s)$ — известная дзета-функция Римана.

Ряд Фурье для $\sin 2\pi x$ по системе $\rho_i(x)$

$$\sin 2\pi x \sim c_1 \rho_1(x) + c_3 \rho_3(x) + \ldots$$

имеет коэффициенты

$$c_i = \int_0^1 \sin 2\pi x \rho_i(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(i)}} \int_0^1 \sin 2\pi x \sum_{d/n} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \tau_d(x)\, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi \sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/i} \mu\left(\frac{i}{d}\right) d \int_0^1 \sin 2\pi x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(2k+1)\, dx}{2k+1} = \frac{2\mu(i)}{\pi \sqrt{\varphi_2(n)}}. \tag{11}$$

Проверим равенство Парсеваля

$$\int_0^1 \sin 2\pi x^2\, dx = \sum_{i=1}^{\infty}{}' c_i^2.$$

Пользуясь соотношением

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{12}$$

получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(i)^2}{\sqrt{\varphi_2(i)}} = \frac{4}{\pi^2} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{\mu(1)}{\varphi_2(p)}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}\right) = \frac{1}{2}, \tag{13}$$

чем доказана справедливость равенства Парсеваля для $\sin 2\pi x$. Таким образом, $\sin 2\pi x$ аппроксимируема функциями $\rho_n(x)$, т. е. для любого $\varepsilon < 0$ можно найти такие n, A_1, A_3, $\ldots$, что

$$\int_0^1 \left[\sin 2\pi x - \sum_{i=1}^{n}{}' A_i \rho_i(x)\right]^2 dx < \varepsilon. \tag{14}$$

Аналогично

$$\int_0^1 \left[\sin 2\pi m x - \sum_{j=1}{}' A_j \rho_i(mx)\right]^2 dx < \varepsilon, \tag{15}$$

где m — любое целое положительное нечетное число. Но, в силу фор-

мул (4) и (7), всякий полином вида $\sum_{i=1}^{n}{}' A_i \rho_i(mx)$ выражается через полином вида $\sum_{j=1}^{N}{}' A'_j \rho_j(x)$, откуда следует

$$\int_0^1 \left[\sin 2\pi mx - \sum_{j=1}^{N}{}' A'_j \rho_j(x) \right]^2 dx < \varepsilon. \tag{16}$$

Итак, все функции $\sin 2\pi x$, $\sin 2\pi 3x$, $\sin 2\pi 5x$, ..., аппроксимируемы в смысле метрики $L_2(0, 1)$ функциями $\rho_n(x)$.

Так как $\sqrt{2} \sin 2\pi nx$ при n нечетном образуют полную ортонормированную систему для множества функций H', удовлетворяющих почти всюду условию

$$\lambda(1-x) = -\lambda(x) \quad \text{и} \quad \lambda\left(\frac{1}{2}-x\right) = \lambda(x) \tag{17}$$

в смысле метрики $L_2(0, 1)$, то функции $\rho_n(x)$ образуют также полную ортонормированную систему на том же подпространстве H'.

Так как по формуле (7) $\tau_1(x)$, $\tau_3(x)$, ..., представляют линейные комбинации $\rho_1(x)$, $\rho_3(x)$, ..., то система $\tau_n(x)$ полна на том же подпространстве.

Рассмотрим функцию $A(t)$ с интегрируемой производной $A'(t)$ в интервале $(0, 1)$ $(A'(0) = 0)$ и удовлетворяющую условию (17). Найдем коэффициенты Фурье для $A'(t)$ по системе $\rho_n(t)$:

$$a_n = (A', \rho) = \int_0^1 A'(t) \rho_n(t)\, dt = \frac{}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \int_0^1 A'(t) \tau_d(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d \left[2 \sum_{k=1}^{2d-1} A\left(\frac{k}{2d}\right) - 4 \sum_{k=1}^{d-1} A\left(\frac{k}{d}\right) - A(1) \right]. \tag{18}$$

Равенство Парсеваля

$$\int_0^1 A'(t)^2\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\varphi_2(k)} \left[\sum_{d/n} \mu\left(\frac{k}{d}\right) d \left(2 \sum_{i=1}^{2d-1} A\left(\frac{i}{2d}\right) - 4 \sum_{i=1}^{d-1} A\left(\frac{i}{d}\right) - A(1) \right]^2.$$

Связь функций $\rho_n(x)$ с функциями

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\theta_d(x), \tag{19}$$

где $\theta_d(x) = nx - [nx] - \frac{1}{2}$, исследованными Н. П. Романовым ([1]), характеризуется равенством:

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\psi_n(2x) - 2\psi_n(x)] \tag{20}$$

для всех нечетных n.

Из этого соотношения между $\psi_n(x)$ и $\rho_n(x)$ и из формулы

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)[x\varphi(d) - \varphi(dx, d)] - \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\varphi_2(n)}}, \qquad (21)$$

полученной в указанной выше работе ([1]), вытекает соотношение

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \left[\sum_{d/n} 2\varphi\left(\frac{n}{d}\right) d\,(2\varphi(dx, d) - \varphi(2dx, d) + \varphi(n)\right]. \qquad (22)$$

Полагая $\sqrt{\varphi_2(n)}\,\rho_n(x) = a_n(x)$, получим

$$\int_0^1 a_n(x)\,a_m(x)\,dx = \left\{\begin{array}{lll} \varphi_2(n), & \text{если} & m = n, \\ 0, & \text{если} & m \neq n, \end{array}\right\} \qquad (23)$$

откуда можно получить много новых нетривиальных тождеств, содержащих функции $\varphi(n)$, $\varphi(m, n)$ Эйлера.

Поступило
30. IV. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Романов Н. П., Об одной специальной ортонормированной системе и ее связи с теорией простых чисел, Матем. сб. 16 (58) : 3 (1946), 353—364.

P. CHAGLEEV. ON A CERTAIN ORTHONORMALIZED SEQUENCE

SUMMARY

Using some modifications of the method given by N. P. Romanoff the author shows that

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) dF(d, x), \quad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

form an orthonormalized system in $L_2(0, 1)$; here

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{for } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$\mu(n)$ is Möbius' function and $\varphi_2(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2$. The author finds the subspace of $L_2(0, 1)$ for which $\{\rho_n(x)\}$ is a complete system and shows that

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \left[\varphi(n) + \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) d\,(2\varphi(dx, d) - \varphi(2\,dx, d))\right],$$

where $\varphi(n, m)$ is the number of integers $\leqslant n$ which are relative prime to m, $\varphi(n) = \varphi(n, n)$. The Parceval relation and the orthogonality relations themselves express some arithmetical facts in view of the arithmetical character of $\rho_n(x)$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 277—279 Série mathématique

А. А. ЛЯПУНОВ

О ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯХ. II

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Дается пример вполне аддитивной вектор-функции, лишенной скачков, определенной на всех измеримых множествах отрезка $[0, 2\pi]$, принимающей значения из компактного параллелепипеда пространства l_1 и имеющей невыпуклое множество значений.

В работе под таким же названием ([1]) нами было показано, что вполне аддитивная вектор-функция, лишенная скачков, определенная на системе подмножеств некоторого множества, инвариантной относительно счетных сумм и пересечений и взятия дополнений, и принимающая значения из n-мерного эвклидова пространства, имеет выпуклое множество значений. Мы покажем, что это свойство теряется, если вместо конечномерного пространства взять бесконечномерное, хотя бы даже компактное пространство.

Рассмотрим последовательность функций $\chi_0(x), \chi_1(x), \ldots, \chi_n(x), \ldots$, определенных на отрезке $[0, 2\pi] = R$, принимающих значения $+1$ и -1, образующих полную ортогональную систему функций на этом отрезке и таких, что

$$\chi_0(x) = +1, \quad \int_0^{2\pi} \chi_n(x)\, dx = 0$$

при $n = 1, 2, 3, \ldots$ *

Обозначим

$$U_n = [\varphi_n(x) = +1].$$

Тогда

$$\operatorname{mes} U_n = \operatorname{mes} CU_n = \pi \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Определим вполне аддитивную вектор-функцию $F(E)$ для всех измеримых множеств отрезка $[0, 2\pi]$. Значение функции $F(E)$ есть вектор, лежащий в компактном параллелепипеде пространства l_1 и имеющий координаты:

$$y_n(E) = \frac{1}{2^n} \int_E \frac{1 + \chi_n(x)}{2}\, dx,$$

$$F(E) = \{y_0(E),\ y_1(E),\ \ldots,\ y_n(E),\ \ldots\}.$$

* Пример такой системы можно найти в книге Зигмунда ([2]).

Очевидно, функция $F(E)$ вполне аддитивна и лишена скачков; легко видеть, что

$$F(R)=\left\{2\pi,\ \pi,\ \frac{\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{\pi}{2^n},\ \ldots\right\},$$

так как

$$\int_0^{2\pi}\frac{1+\chi_0(x)}{2}\,dx=2\pi \quad \text{и} \quad \frac{1}{2^n}\int_0^{2\pi}\frac{1+\chi_n(x)}{2}\,dx=\frac{\operatorname{mes} U_n}{2^n}=\frac{\pi}{2^n}.$$

Если бы множество значений функции $F(E)$ было выпукло, то оно содержало бы все точки вида $\lambda F(R)$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, так как оно содержит точки $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ и $F(R)$. Мы покажем, однако, что оно не содержит точки $\frac{1}{2}F(R)$. Допустим, что $F(E)=\frac{1}{2}F(R)$, т. е.

$$\pi=y_0(E)=\int_E\frac{1+\chi_0(x)}{2}\,dx=\int_E dx=\operatorname{mes} E$$

и

$$\frac{\pi}{2^{n+1}}=y_n(E)=\frac{1}{2^n}\int_E\frac{1+\chi_n(x)}{2}\,dx=\frac{1}{2^n}\int_{EU_n}dx=\frac{\operatorname{mes}(EU_n)}{2} \quad \text{при} \quad n>0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{mes} E=\pi \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}(EU_n)=\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad n>0.$$

Но тогда

$$\operatorname{mes} CE=\pi \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}(U_n CE)=\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad n>0.$$

Положим $\omega(x)=+1$, если $x\in E$ и $\omega(x)=-1$, если $x\in CE$; тогда

$$\int_0^{2\pi}\chi_0(x)\,\omega(x)\,dx=\operatorname{mes} E-\operatorname{mes} CE=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\chi_n(x)\,\omega(x)\,dx=\operatorname{mes} U_n E-\operatorname{mes} U_n CE=0,$$

т. е. функция $\omega(x)$ оказывается ортогональной ко всем функциям системы $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, $\ldots$, $\chi_n(x)$, $\ldots$, что противоречит полноте этой системы. Полученное противоречие доказывает, что точка $\frac{1}{2}F(R)$ не принадлежит множеству значений функции $F(E)$ *.

Поступило
29. I. 1945

ЛИТЕРАТУРА

1 Ляпунов А. А., О вполне аддитивных вектор-функциях, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 4, 1940.
2 Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

* Настоящее сообщение в несколько иной редакции было направлено в Труды Педагогического ин-та им. Либкнехта, но ввиду военного времени не было напечатано.

A. LIAPOUNOFF. SUR LES FONCTIONS-VECTEURS COMPLÈTEMENT ADDITIVES

RÉSUMÉ

Nous donnons un exemple d'une fonction-vecteur complètement additive, définie sur tous les ensembles mesurable du segment [0, 2π], dont les valeurs appartiennent au parallélépipède compacte de l'espace l_1 et dont l'ensemble de valeurs n'est pas convexe (cf. ([1])).

КОМИССИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР ПО ПРИСУЖДЕНИЮ ПРЕМИИ ИМЕНИ ЧАПЛЫГИНА ЗА ЛУЧШУЮ ОРИГИНАЛЬНУЮ РАБОТУ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ИССЛЕДОВАНИЯМ В ОБЛАСТИ МЕХАНИКИ

ОБЪЯВЛЯЕТ, ЧТО КОНКУРС НА СОИСКАНИЕ ПРЕМИИ ПРОДОЛЖЕН ДО 1 СЕНТЯБРЯ 1946 ГОДА. РАЗМЕР ПРЕМИИ УСТАНАВЛИВАЕТСЯ В 10 000 рублей

Премии имени Чаплыгина могут быть удостоены исключительно ученые труды советских граждан, их авторских коллективов и советских научных учреждений.

Работы могут представляться научными обществами, научно-исследовательскими институтами, высшими учебными заведениями, ведомствами, общественными организациями и отдельными гражданами СССР.

Работы представляются на русском языке в 3 экземплярах, от ечатанные на пишущей машинке или типографским способом. Обязательно представление кратких автобиографических сведений о кандидате с перечнем основных научных работ и изобретений.

Работы на соискание премии представляются в Отделение технических наук Академии Наук СССР і о адресу: Москва, Малый Харитоньевский пер., д. № 4, с надписью: «На соискание премии имениЧаплыгина»

ИСПРАВЛЕНИЯ

К СТАТЬЕ В. С. ФЕДОРОВА «О МОНОГЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ»

9 (1945), 257—274

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Следует*
260	2 снизу	волновое уравнение Лапласа	волновое уравнение в уравнение Лапласа
263	5 сверху	$\Delta u, \Delta v$	$\nabla u, \nabla v$
265	2 снизу	§ 3	§ 4
266	20 снизу	Δp	∇p

Член редколлегии проф. *Б. Н. Сегал*

Подписано к печати 22.VI 1946 г. А 05770
Объем 6 печ. л., 9 уч.-изд. л. Тираж 2500 экз.
Цена 9 руб. Заказ 646

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров РСФСР, Москва, Трехпрудный, 9.

Содержание

Sommaire

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 19

Adresse de la rédaction: B. Kaloujskaja, 19, Moscou

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 281—294 Série mathématique

А. Я. ХИНЧИН

О ЗАДАЧЕ ЧЕБЫШЕВА

Пусть θ — иррациональное число, α — любое вещественное число, не представимое в форме $a\theta+b$, где a и b — целые. Пусть $\lambda(\theta, \alpha)$ — нижняя грань положительных чисел C, для которых неравенство

$$|x(\theta x-y-\alpha)|<C$$

имеет решения в целых, сколь угодно больших числах x, y.

Результат Минковского $\lambda(\theta, \alpha) \leqslant \frac{1}{4}$ может быть заменен более точным неравенством

$$\lambda(\theta, \alpha) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2},$$

где $\lambda=\lambda(\theta, 0)$ — известная характеристика Маркова. В статье исследуется также вопрос о точности полученной границы и доказывается, что эта граница — наилучшая среди функций от λ, аналитических при $\lambda=0$.

1. Введение

Задачей Чебышева в теории диофантовых приближений называют исследование приближенных решений уравнения

$$\theta x-y-\alpha=0 \tag{1}$$

в целых x, y; при этом θ и α — данные вещественные числа, из которых θ иррационально. Задача Чебышева есть, таким образом, простейшая неоднородная линейная задача теории диофантовых приближений.

Сам Чебышев [1] создал своеобразный алгоритм для приближенного решения уравнения (1), и с помощью этого алгоритма доказал существование бесчисленного множества пар целых чисел x, y, для которых

$$|\theta x-y-\alpha|<\frac{2}{|x|},$$

или, что то же,

$$|x(\theta x-y-\alpha)|<2. \tag{2}$$

Эрмит [2] и Кронекер [3] с помощью чрезвычайно простых соображений, не базирующихся ни на каком специальном алгоритме, показали, что число 2 в правой части последнего неравенства может быть заменено числом $^1/_2$. В дальнейшем Эрмит более сложными методами, опирающимися на арифметическую теорию квадратичных форм, показал,

что это число может быть понижено до $\sqrt{2/27}$ *в предположении, что уравнение* (1) *не имеет точных решений в целых* x, y.

Это предположение, которое мы в дальнейшем для краткости будем называть *гипотезой* Г, вообще играет в задаче Чебышева весьма существенную роль. В самом деле, если $\alpha = a\theta + b$, где a и b — целые числа, то

$$\theta x - y - \alpha = \theta(x - a) - (y + b);$$

поэтому задача Чебышева в этом случае редуцируется к *однородной* задаче приближенного решения в целых числах уравнения $\theta x - y = 0$, совпадающей с задачей приближенного представления числа θ с помощью рациональных дробей. Эта простейшая задача теории диофантовых приближений может считаться полностью решенной трудами Маркова, Гурвица, Бореля и других исследователей; наилучшее значение постоянной в правой части неравенства (2) в этом случае есть, как известно, $1/\sqrt{5}$. Особый интерес и существенное отличие гипотезы Г обусловлены тем, что в случае ее выполнения эта постоянная всегда может быть понижена, как показывает уже вышеприведенный результат Эрмита ($\sqrt{2/27} < 1/\sqrt{5}$).

Минковский ([4]) получил в этом направлении результат, который в известном смысле может считаться окончательным: с помощью специально построенного алгоритма он показал, что в случае гипотезы Г постоянная, о которой идет речь, может быть снижена до $^1/_4$, и что дальнейшее снижение ее невозможно, если подразумевать под θ любое иррациональное число, а под α — любое вещественное число, удовлетворяющее гипотезе Г.

Целью настоящей статьи является показать, что достаточно полное использование первоначального элементарного метода Кронекера позволяет с исключительной простотой и без какого бы то ни было специального алгоритма получить не только основной результат Минковского, но и дальше идущие результаты. В последнем направлении имеется ряд исследований Моримото ([5]), который основывает свои выводы на специально построенном алгоритме, и все признаки тех или других свойств решений уравнения (1) формулирует в терминах этого алгоритма, вследствие чего сравнить его результаты с полученными нами не представляется возможным.

Пусть θ — произвольное иррациональное число, и α — любое вещественное число. Обозначим через $\lambda(\theta, \alpha)$ нижнюю грань положительных чисел C, для которых неравенство

$$|x(x\theta - y - \alpha)| < C$$

имеет бесчисленное множество решений в целых числах $x \neq 0$, y. В частности, $\lambda(\theta, 0) = \lambda(\theta) = \lambda$ есть известная арифметическая характеристика числа θ, детально исследованная Марковым. Обозначим, далее, через $\mu(\theta)$ верхнюю грань чисел $\lambda(\theta, \alpha)$ для всех α, подчиненных ги-

потезе Г. Теорема Минковского состоит в том, что $\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4}$ для всех иррациональных θ, и существуют такие θ, для которых $\mu(\theta) = \frac{1}{4}$. После того как в § 2 будут установлены две элементарные леммы, мы покажем в §§ 3—4, что

$$\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}, \tag{3}$$

где $\lambda = \lambda(\theta)$ есть вышеупомянутая характеристика Маркова. Таким образом, равенство $\mu(\theta) = {}^1/_4$ возможно только для таких θ, для которых $\lambda(\theta) = 0$, т. е. таких, у которых при разложении в непрерывную дробь встречаются сколь угодно большие неполные частные. Во всех других случаях мы получаем $\mu(\theta) < {}^1/_4$. Чем больше $\lambda(\theta)$, тем ниже граница для $\mu(\theta)$; в частности, для наибольшего возможного значения $\lambda(\theta) = 1/\sqrt{5}$ (т. е. для $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и эквивалентных ему чисел) мы находим $\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4\sqrt{5}}$. Далее, в § 5 мы исследуем вопрос о точности полученной границы; с одной стороны, существует бесчисленное множество значений λ, и в том числе сколь угодно малые, для которых установленная нами граница является точной и не может быть понижена. Отсюда, в частности, следует, что среди всех аналитических функций от λ формула (3) дает наиболее точную верхнюю границу для $\mu(\theta)$; точнее говоря, если $\varphi(\lambda)$ — функция, аналитическая в отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/\sqrt{5}$, и если в этом отрезке

$$\mu(\theta) \leqslant \varphi(\lambda) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2},$$

то $\varphi(\lambda)$ тождественно совпадает с $\frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}$. С другой стороны, мы находим по меньшей мере одно значение λ ($\lambda = 1/\sqrt{13}$), для которого граница лежит ниже.

2. Две леммы

ЛЕММА 1. *Пусть* $\beta > 0$, $f(x) = \beta - x^2$. *Тогда существует отрезок длины* 1, *для всех точек* x *которого*

$$|f(x)| \leqslant {}^1/_4 - \beta, \qquad \text{если } \beta \leqslant {}^1/_8,$$
$$|f(x)| \leqslant \beta, \qquad \text{если } {}^1/_8 \leqslant \beta \leqslant {}^1/_2,$$
$$|f(x)| \leqslant {}^1/_2\sqrt{4\beta-1}, \ \text{если } \beta \geqslant {}^1/_2.$$

Примечание. Даваемая леммой 1 верхняя граница для каждого $\beta > 0$ является наилучшей и не может быть понижена; однако мы этого здесь доказывать не будем, так как в дальнейшем этот результат нам не понадобится.

Доказательство. Наибольшее значение функции $|f(x)|$ в отрезке $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ есть, очевидно, наибольшее из чисел β и $\left|\beta - \frac{1}{4}\right|$, т. е.

$\frac{1}{4}-\beta$ при $\beta \leqslant \frac{1}{8}$ и β при $\frac{1}{8} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}$; этим доказаны два первых утверждения леммы. Если $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, то $\sqrt{4\beta-1}-1 \geqslant 0$; поэтому в отрезке $\left(\frac{\sqrt{4\beta-1}-1}{2}, \frac{\sqrt{4\beta-1}+1}{2}\right)$ длины 1 функция $f(x)$ убывает, и, следовательно, наибольшим значением функции $|f(x)|$ в этом отрезке служит ее значение в одном из его концов; но

$$f\left(\frac{\sqrt{4\beta-1}\pm 1}{2}\right)=\beta-\frac{1}{4}(\sqrt{4\beta-1}\pm 1)^2=\mp\frac{1}{2}\sqrt{4\beta-1},$$

так что при $\frac{\sqrt{4\beta-1}-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{4\beta-1}+1}{2}$ мы имеем

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{4\beta-1},$$

чем доказано и третье утверждение леммы 1.

ЛЕММА 2. *Пусть θ и α — вещественные числа, причем θ иррационально и уравнение $x\theta-y-\alpha=0$ не может быть решено в целых x, y. Пусть $q>0$ и p — целые числа, $(q, p)=1$, и пусть r — ближайшее к $q\alpha$ целое число, так что $q\alpha-r=\pm\frac{1}{2}\vartheta$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Положим $q\theta-p=\pm\lambda^*/$, $\lambda^*>0$. Тогда существуют целые числа x, y, для которых, полагая $\xi=|x(x\theta-y-\alpha)|$, мы будем иметь*

$$\xi \leqslant \frac{\lambda^*}{4}-\frac{\vartheta^2}{16\lambda^*}, \quad \text{если } \vartheta \leqslant \lambda^*\sqrt{2},$$

$$\xi \leqslant \vartheta^2/16\lambda^*, \quad \text{если } \lambda^*\sqrt{2} \leqslant \vartheta \leqslant \lambda^*\sqrt{8},$$

$$\xi \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\vartheta^2-4\lambda^{*2}}, \quad \text{если } \vartheta \geqslant \lambda^*\sqrt{8}.$$

При этом число $|x|$ сколь угодно велико, если q достаточно велико и λ^*/q^2 достаточно мало.

Доказательство. Так как $(q, p)=1$, то в любом отрезке длины q найдется целое число x, для которого $px \equiv r \pmod q$, т. е. $px=r+qy$, где y — целое число. Допустим, что мы выбрали такие целые числа x, y; тогда

$$|x\theta-y-\alpha|=\left|x\left(\frac{p}{q}\pm\frac{\lambda^*}{q^2}\right)-y-\left(\frac{r}{q}\pm\frac{\vartheta}{2q}\right)\right|=$$

$$=\left|\pm\frac{x\lambda^*}{q^2}\mp\frac{\vartheta}{2q}\right|=\frac{1}{q}\left|\pm\frac{x}{q}\lambda^*\mp\frac{\vartheta}{2}\right|,$$

$$\xi=|x(x\theta-y-\alpha)|=\left|\frac{x}{q}\left(\mp\frac{\vartheta}{2}\pm\lambda^*\frac{x}{q}\right)\right|.$$

Очевидно, мы можем, не нарушая общности рассуждения, считать, что перед $\vartheta/2$ в скобке стоит знак $+$; полагая $x/q=z$ (так что мы можем считать число z принадлежащим любому отрезку длины 1), мы находим

$$\xi=\left|z\left(\frac{\vartheta}{2}\pm\lambda^* z\right)\right|=\lambda^* z\left|\left(\frac{\vartheta}{2\lambda^*}\pm z\right)\right|.$$

Полагая, в зависимости от знака перед z в скобках,

$$z = \mp\left(\frac{\vartheta}{4\lambda^*} + u\right),$$

мы имеем

$$\xi = \lambda^* \left|\frac{\vartheta^2}{16\lambda^{*2}} - u^2\right|, \tag{a}$$

где u, подобно z, мы можем считать принадлежащим любому отрезку длины 1.

Применяя к оценке величины ξ лемму 1, где надо положить $\beta = \vartheta^2/16\,\lambda^{*2}$, мы находим, что для всех значений u в некотором отрезке длины 1

$$\xi \leqslant \frac{\lambda^*}{4} - \frac{\vartheta^2}{16\lambda^*}, \text{ если } \vartheta \leqslant \lambda^* \sqrt{2},$$

$$\xi \leqslant \vartheta^2/16\,\lambda^*, \text{ если } \lambda^* \sqrt{2} \leqslant \vartheta \leqslant \lambda^* \sqrt{8},$$

$$\xi \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\vartheta^2 - 4\lambda^{*2}}, \text{ если } \vartheta \geqslant \lambda^* \sqrt{8}.$$

Нам остается только убедиться, что при $q \to \infty$ и $\lambda^*/q^2 \to 0$ величина $|x|$ не может оставаться ограниченной. Если бы это было так, то x должно было бы принимать одно и то же значение a для сколь угодно больших q и сколь угодно малых $\lambda^*/q^2 = \left|\theta - \frac{p}{q}\right|$; но при этом

$$y = a\frac{p}{q} - \frac{r}{q}$$

должно всегда оставаться целым числом; отсюда и

$$\lim_{\substack{q\to\infty \\ p/q\to\theta}} \left(a\frac{p}{q} - \frac{r}{q}\right) = a\theta - \alpha = b$$

есть целое число; но соотношение $a\theta - b - \alpha = 0$ противоречит основной предпосылке леммы.

3. Основная теорема

Пусть θ — иррациональное число, $q > 0$ — целое и p — ближайшее к $q\theta$ целое число. Положим

$$\liminf_{q\to\infty} |q(q\theta - p)| = \lambda(\theta) = \lambda.$$

Пусть, далее, α — любое вещественное число, x — целое число, y — ближайшее к $x\theta - \alpha$ целое число. Положим

$$\liminf_{x\to\infty} |x(x\theta - y - \alpha)| = \lambda(\theta, \alpha),$$

и обозначим через $\mu(\theta)$ верхнюю грань величины $\lambda(\theta, \alpha)$ для всех чисел α, которые не могут быть представлены в виде $a\theta + b$ с целыми a и b (т. е. для которых уравнение $\theta x - y - \alpha = 0$ не может быть решено в целых x, y).

ТЕОРЕМА. *Для любого иррационального числа* θ

$$\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}\ ^*.$$

Допустим сначала, что $\lambda \leqslant 1/\sqrt{8}$. Как известно, это неравенство имеет место для всех θ за исключением счетного множества чисел, эквивалентных числу $(\sqrt{5}-1)/2$. Для этих чисел мы докажем теорему в следующем параграфе.

Пусть α — любое число, которое не может быть представлено в виде $a\theta+b$ с целыми a и b. Согласно определению числа $\lambda(\theta)=\lambda$, существуют сколь угодно большие целые $q>0$ и p, для которых $(q, p)=1$ и

$$|q\theta-p| = \lambda^*/q,$$

где λ^* как угодно близко к λ. В силу леммы 2, найдутся целые числа x, y, для которых

$$\xi = |x(x\theta-y-\alpha)| \leqslant \begin{cases} \lambda^*/4-\vartheta^2/16\lambda^*, & \text{если } \vartheta \leqslant \lambda^*\sqrt{2}, \\ \vartheta^2/16\lambda^*, & \text{если } \lambda^*\sqrt{2} \leqslant \vartheta \leqslant \lambda^*\sqrt{8}, \\ \frac{1}{4}\sqrt{\vartheta^2-4\lambda^{*2}}, & \text{если } \vartheta \geqslant \lambda^*\sqrt{8}, \end{cases}$$

где $\vartheta/2$ есть расстояние числа $q\alpha$ от ближайшего к нему целого числа; при этом $|x|$ может быть предположено сколь угодно большим.

В силу допущения $\lambda \leqslant 1/\sqrt{8}$ мы имеем

$$\lambda/2 \leqslant \sqrt{1-4\lambda^2}/4,$$

а так как λ^* сколь угодно близко к λ, то мы вправе допустить, что

$$\lambda^*/2 < \sqrt{1-4\lambda^2}/4+\varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Таким образом, при $\vartheta \leqslant \lambda^*\sqrt{2}$ мы имеем

$$\xi \leqslant \lambda^*/4-\vartheta^2/16\lambda^* \leqslant \lambda^*/4 < \lambda^*/2 < \sqrt{1-4\lambda^2}/4+\varepsilon.$$

---

* Интересно показать, как просто доказывается излагаемым методом теорема Минковского $\mu(\theta) \leqslant 1/4$. Будем исходить из выражения (a) или

$$\xi = \lambda^*|\beta-u^2|, \quad \beta=\vartheta^2/16\lambda^{*2}.$$

Если $\beta \leqslant 1/2$, возьмем интервал $-\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$: в концах его $\xi=\lambda^*|\beta-\frac{1}{4}| \leqslant \lambda^*/4 < 1/4$; максимум ξ может наступить либо в одном из этих концов, либо при $u=0$, когда $\xi=\lambda^*\beta \leqslant \lambda^*/2 < 1/4$. Таким образом, во всем интервале $\xi < 1/4$. Если $\beta > 1/2$, то берем интервал от $\sqrt{\beta-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$ до $\sqrt{\beta-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$, целиком расположенный в области $u>0$, вследствие чего максимум ξ наступает в одном из концов интервала. Но в концах его $\beta-u^2=\pm\sqrt{\beta-1/4}$; значит, во всем интервале

$$\xi \leqslant \lambda^*\sqrt{\beta-\frac{1}{4}} < \lambda^*\sqrt{\beta} = \lambda^*\frac{\vartheta}{4\lambda^*} \leqslant \frac{1}{4},$$

что и требовалось доказать. В этом доказательстве мы не пользуемся ни одной из установленных нами лемм. Неравенство $\lambda^* < 1/2$, которым мы пользовались, вытекает из того, что λ^* может быть взято сколь угодно близко к $\lambda=\lambda(\theta) \leqslant 1/\sqrt{5}$.

При $\lambda^*\sqrt{2} \leqslant \vartheta \leqslant \lambda^*\sqrt{8}$ мы находим

$$\xi \leqslant \vartheta^2/16\lambda^* \leqslant \lambda^*/2 < \sqrt{1-4\lambda^2}/4 + \varepsilon.$$

Наконец, при $\vartheta \geqslant \lambda^*\sqrt{8}$ мы имеем при λ^* достаточно близком к λ

$$\xi \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\vartheta^2 - 4\lambda^{*2}} < \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^{*2}} < \sqrt{1-4\lambda^2}/4 + \varepsilon.$$

Итак, неравенство

$$\xi \leqslant \sqrt{1-4\lambda^2}/4 + \varepsilon$$

имеет место во всех случаях. Так как при этом $|x|$ сколь угодно велико, а ε сколь угодно мало, то по определению числа $\lambda(\theta, \alpha)$

$$\lambda(\theta, \alpha) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2};$$

наконец, так как это неравенство имеет место для всех чисел α, которые не могут быть представлены в виде $a\theta + b$ с целыми a и b, то

$$\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2};$$

таким образом, теорема доказана для всех иррациональных чисел θ, не эквивалентных числу $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. Исследование чисел, эквивалентных числу $(\sqrt{5}-1)/2$

ЛЕММА 3. *Пусть* $\theta = 1\underline{|k} + 1\underline{|k} + \ldots = (0; k)$, *где* k — *нечетное целое число; обозначим через* $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ *знаменатели подходящих дробей числа* θ, *и пусть* $\{\sigma\}$ *означает расстояние числа* σ *от ближайшего к нему целого числа. Тогда для любого* $n > 1$ *и для любого вещественного числа* α *по меньшей мере одно из трех чисел* $\{q_{n-1}\alpha\}$, $\{q_n\alpha\}$, $\{q_{n+1}\alpha\}$ *не превосходит числа* $\frac{k+1}{2(k+2)}$.

Примечание. В данный момент нам нужен только случай $k = 1$; в дальнейшем, однако, нам понадобится и общий результат леммы 3.

Доказательство. Если $\{q_{n-1}\alpha\}$ и $\{q_n\alpha\}$ не удовлетворяют требованию леммы 3, то очевидно

$$\frac{k+1}{2(k+2)} < q_{n-1}\alpha - [q_{n-1}\alpha] < \frac{k+3}{2(k+2)},$$
$$\frac{k+1}{2(k+2)} < q_n\alpha - [q_n\alpha] < \frac{k+3}{2(k+2)},$$

откуда

$$(k+1)\frac{k+1}{2(k+2)} < kq_n\alpha + q_{n-1}\alpha - k[q_n\alpha] - [q_{n-1}\alpha] < (k+1)\frac{k+3}{2(k+2)}$$
$$\frac{k+1}{2} - \frac{k+1}{2(k+2)} < q_{n+1}\alpha - k[q_n\alpha] - [q_{n-1}\alpha] < \frac{k+1}{2} + \frac{k+1}{2(k+2)}.$$

Но $(k+1)/2$ — целое число, вследствие чего при некотором целом m

$$-\frac{k+1}{2(k+2)} < q_{n+1}\alpha - m < \frac{k+1}{2(k+2)}$$

или

$$\{q_{n+1}\alpha\} < \frac{k+1}{2(k+2)},$$

что и требовалось доказать.

Если $\theta = (\sqrt{5}-1)/2 = (0; \bar{1})$, то для любого $n>1$ и любого α в силу доказанной леммы по меньшей мере одно из трех чисел $\{q_{n-1}\alpha\}$, $\{q_n\alpha\}$, $\{q_{n+1}\alpha\}$ не превосходит $^1/_3$; пусть для определенности

$$\{q_n\alpha\} \leqslant {}^1/_3. \tag{4}$$

Пусть в лемме 2 $\theta = (\sqrt{5}-1)/2$, $q = q_n$, $q_n\theta - p_n = \pm\lambda_n/q_n$, где $\lambda_n \to 1/\sqrt{5}$ при $n\to\infty$. Тогда в силу (4) $\vartheta \leqslant {}^2/_3$. Мы находим в случае $\vartheta \leqslant \lambda_n\sqrt{2}$

$$|x(x\theta - y - \alpha)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{5}} + \varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2} + \varepsilon,$$

а в случае $\lambda_n\sqrt{2} < \vartheta \leqslant \lambda_n\sqrt{8}$

$$|x(x\theta - y - \alpha)| \leqslant \vartheta^2/16\lambda_n \leqslant \frac{4}{9\cdot 16\lambda_n} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{36} + \varepsilon < \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}.$$

Случай $\vartheta \geqslant \lambda_n\sqrt{8}$ здесь, очевидно, при достаточно большом n невозможен; как обычно, $|x|$ здесь сколь угодно велико, если α не может быть представлено в виде $a\theta + b$ с целыми a, b. Поэтому для таких α

$$\lambda\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \alpha\right) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2} \left(= \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$$

и, следовательно,

$$\mu\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2},$$

т. е. теорема § 3 доказана для $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Справедливость ее для чисел, эквивалентных $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, вытекает из следующего почти очевидного предложения.

ЛЕММА 4. *Если числа θ и θ' взаимно эквивалентны, то $\mu(\theta) = \mu(\theta')$.*

Доказательство. Пусть $\theta' = (a\theta + b)/(c\theta + d)$, $ad - bc = 1$, и пусть α' — вещественное число, для которого уравнение $x'\theta' - y' - \alpha' = 0$ не имеет решений в целых x', y'. Если переменные x, y связаны с переменными x', y' соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x' &= cy + dx, & x &= ax' - cy', \\ y' &= ay + bx, & y &= -bx' + dy', \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

то

$$|x'\theta' - y' - \alpha'| = \frac{|x\theta - y - (c\theta + d)\alpha'|}{|c\theta + d|}; \tag{6}$$

следовательно, уравнение $x\theta - y - (c\theta + d)\alpha' = 0$ не может иметь решений в целых x, y; но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся сколь угодно большие целые числа x, y, для которых

$$|x\theta - y - (c\theta + d)\alpha'| < \frac{\mu(\theta) + \varepsilon}{|x|}, \tag{7}$$

откуда

$$\theta = \frac{y}{x} + O\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

и значит

$$x(c\theta + d) = cy + dx + O(1) = x' + O(1).$$

Поэтому из (6) и (7)

$$|x'\theta' - y' - \alpha'| < \frac{\mu(\theta) + \varepsilon}{|x(c\theta + d)|} < \frac{\mu(\theta) + 2\varepsilon}{|x'|};$$

при этом x' может быть выбрано сколь угодно большим, так как при ограниченных x', y' в силу (5) оставались бы ограниченными и x, y. Ввиду произвольного выбора числа α', последнее неравенство показывает, что

$$\mu(\theta') \leqslant \mu(\theta) + 2\varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε

$$\mu(\theta') \leqslant \mu(\theta);$$

вследствие полной симметрии имеет место и обратное неравенство, так что $\mu(\theta') = \mu(\theta)$, и лемма 4 доказана.

В силу этой леммы результат, полученный нами для числа $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, имеет место и для всех эквивалентных ему чисел. Таким образом, теорема § 3 доказана полностью.

Заметим еще, что $\mu(\theta) \geqslant \lambda/4$ для любого иррационального θ; в самом деле, так как уравнение $x\theta - y - \frac{1}{2} = 0$ не может иметь решений в целых x, y, то при $\mu(\theta) < \frac{\lambda}{4} - \varepsilon$ мы имели бы для надлежащим образом выбранных целых x, y

$$\left|x\left(x\theta - y - \frac{1}{2}\right)\right| < \frac{\lambda}{4} - \varepsilon,$$

$$|2x(2x\theta - 2y - 1)| < \lambda - 4\varepsilon.$$

Так как при этом $|x|$ может быть предположено сколь угодно большим, то это противоречит определению числа λ.

Для чисел θ, эквивалентных $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, это дает $\mu(\theta) \geqslant \frac{1}{4\sqrt{5}}$; таким образом, для этого класса чисел мы имеем точный результат

$$\mu(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

5. Исследование точности полученной оценки

Полученная нами оценка $\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{1 - 4\lambda^2}$ является точной в двух крайних случаях: при $\lambda = 1/\sqrt{5}$ мы это только что установили, а при $\lambda = 0$ это давно известно, так как Минковский доказал существование таких θ, для которых $\mu(\theta) = \frac{1}{4}$. Для всех промежуточных значений вопрос до сих пор оставался открытым. Мы сейчас увидим, насколько сложна эта задача; во всяком случае, среди чисел θ, для которых

$0 < \lambda(\theta) < 1/\sqrt{5}$, имеются как такие, для которых полученная нами оценка является окончательной и не подлежащей улучшению, так и такие, для которых она может быть усилена; при этом среди тех и других встречаются числа со сколь угодно малым значением λ. Всему этому учит следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\theta = (0;\ \overline{k})$; *тогда мы имеем*

$$\mu(\theta) = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2},$$

если $k=1$ *или* k — *четное число, и*

$$\mu(\theta) < \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2},$$

если $k \geqslant 3$ *и нечетно.*

Доказательство. Случай $k=1$ нами уже доказан. Пусть $k \geqslant 3$ — нечетное число. Будем обозначать через p_n/q_n подходящие дроби числа θ; тогда

$$q_n\theta - p_n = \pm \lambda_n/q_n,$$

где при $n \to \infty$ $\lambda_n \to \lambda = 1/\sqrt{k^2+4}$ (последнее легко вычислить). В силу леммы 3, мы можем допустить для любого вещественного числа α, что

$$|q_n\alpha - r_n| = \frac{\vartheta}{2} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{k+1}{k+2},$$

где r_n — ближайшее к $q_n\alpha$ целое число. Мы можем поэтому применить лемму 2, с дополнительным условием $\vartheta \leqslant \frac{k+1}{k+2}$. Таким образом, существуют целые числа x, y, удовлетворяющие неравенствам

$$\xi = |x(\theta x - y - \alpha)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\lambda_n}{4} - \dfrac{\vartheta^2}{16\lambda_n}, & \text{если } \vartheta \leqslant \lambda_n\sqrt{2}, \\ \vartheta^2/16\lambda_n, & \text{если } \lambda_n\sqrt{2} \leqslant \vartheta \leqslant \lambda_n\sqrt{8}, \\ \dfrac{1}{4}\sqrt{\vartheta^2 - 4\lambda_n^2}, & \text{если } \vartheta \geqslant \lambda_n\sqrt{8}. \end{cases}$$

При этом, если число α не может быть представлено в виде $a\theta + b$ с целыми a и b, то $|x|$ может быть выбрано сколь угодно большим.

В случае $\vartheta \leqslant \lambda_n\sqrt{2}$ мы имеем при $n \to \infty$

$$\xi \leqslant \lambda_n/4 \to \frac{1}{4\sqrt{k^2+4}} < \frac{k+1}{k+2}\,\frac{k}{4\sqrt{k^2+4}} = \frac{k+1}{k+2}\,\frac{\sqrt{1-4\lambda^2}}{4}$$

уже при $k > 1$. В случае $\lambda_n\sqrt{2} \leqslant \vartheta \leqslant \lambda_n\sqrt{8}$

$$\xi \leqslant \vartheta^2/16\lambda_n \leqslant \lambda_n/2 \to \frac{1}{2\sqrt{k^2+4}} < \frac{k+1}{k+2}\,\frac{k}{4\sqrt{k^2+4}} = \frac{k+1}{k+2}\,\frac{\sqrt{1-4\lambda^2}}{4}$$

при $k > 2$. Наконец, в случае $\vartheta \geqslant \lambda_n\sqrt{8}$

$$\xi \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\vartheta^2 - 4\lambda_n^2} \leqslant \vartheta\cdot\frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda_n^2} \leqslant \frac{k+1}{k+2}\,\frac{\sqrt{1-4\lambda_n^2}}{4} \to \frac{k+1}{k+2}\,\frac{\sqrt{1-4\lambda^2}}{4}.$$

Таким образом, во всех случаях при достаточно большом n мы полу-

чаем

$$|x(x\theta - y - \alpha)| \leqslant \frac{k+1}{k+2} \frac{1}{4} \sqrt{1-4\lambda^2} + \varepsilon;$$

отсюда вытекает, что для $\theta = (0; k)$ при нечетном $k \geqslant 3$

$$\mu(\theta) \leqslant \frac{k+1}{k+2} \frac{1}{4} \sqrt{1-4\lambda^2},$$

в согласии с утверждением леммы.

Пусть теперь $k = 2a$ — четное число. Тогда, как легко вычислить,

$$\theta = (0; \bar{k}) = \sqrt{a^2+1} - a, \quad \lambda = \lambda(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}; \quad \sqrt{1-4\lambda^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Положим $\alpha = (1+\theta)/2$; так как α, очевидно, не может быть представлено в виде $x\theta - y$ с целыми x, y, то в силу теоремы § 3 существуют целые числа x, y, для которых

$$\left| x\left(x\theta - y - \frac{1+\theta}{2}\right)\right| < \frac{a}{4\sqrt{a^2+1}} + \varepsilon, \tag{8}$$

где $|x|$ может быть предположено сколь угодно большим, а $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малым. Отсюда

$$|2x\{(2x-1)\theta - (2y+1)\}| < \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + 4\varepsilon,$$

и, значит, полагая $2x - 1 = n$, $2y + 1 = m$,

$$\left|\theta - \frac{m}{n}\right| < \frac{a}{n(n-1)\sqrt{a^2+1}} + \frac{4\varepsilon}{n(n-1)},$$

где без ограничения общности принято $n > 0$. Если $|x|$, а следовательно и n достаточно велико, а ε достаточно мало, то это, в частности, очевидно дает

$$\left|\theta - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

Но это, как известно (см., напр., (6), стр. 16, Satz 5), возможно лишь при условии, что m/n есть одна из подходящих или промежуточных дробей числа θ *. Покажем, что m/n не может быть подходящей дробью числа θ; в самом деле, мы имеем

$$q_{s+1} = 2aq_s + q_{s-1} \equiv q_{s-1} \pmod 2,$$

и аналогично $p_{s+1} \equiv p_{s-1} \pmod 2$; но $p_0 = 0$, $q_1 = 2a$, вследствие чего при s четном $p_s \equiv 0 \pmod 2$, а при s нечетном $q_s \equiv 0 \pmod 2$; ни для какого s поэтому p_s и q_s не могут быть оба нечетными, между тем как m и n нечетны по своему определению.

Итак, m/n есть промежуточная дробь числа θ. При этом, если $q_s < n < q_{s+1}$, то в силу известной теоремы Фату [(6), стр. 26, Satz 6]

---

* Для полной точности надо еще показать, что дробь m/n несократима. Но при $m = gm'$, $n = gn'$, $g > 1$ мы имели бы $\left|\theta - \frac{m'}{n'}\right| < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{g^2 n'^2}$, вследствие чего дробь m'/n' была бы подходящей дробью числа θ, что, как ниже показано в тексте, невозможно в силу $m' \equiv n' \equiv 1 \pmod 2$.

m/n — одна из двух крайних промежуточных дробей, т. е. либо $n = q_{s-1} + q_s$, либо $n = q_{s+1} - q_s$ (соответственно, либо $m = p_{s-1} + p_s$, либо $m = p_{s+1} - p_s$). Мы должны поэтому рассмотреть отдельно два возможных случая.

1) $\frac{m}{n} = \frac{p_s + p_{s-1}}{q_s + q_{s-1}}$.

При $s \to \infty$ мы, очевидно, имеем $q_s\theta - p_s \sim \pm \frac{\lambda}{q_s}$, $q_{s-1}\theta - p_{s-1} \sim \mp \frac{\lambda}{q_{s-1}}$, и, следовательно,

$$|n\theta - m| = |(q_s\theta - p_s) + (q_{s-1}\theta - p_{s-1})| \sim \lambda\left(\frac{1}{q_{s-1}} - \frac{1}{q_s}\right),$$

$$|n(n\theta - m)| \sim \lambda\left(\frac{q_s}{q_{s-1}} - \frac{q_{s-1}}{q_s}\right) \sim \lambda\left(\frac{1}{\theta} - \theta\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Возвращаясь от m и n обратно к x и y, мы находим

$$\left|x\left(x\theta - y - \frac{1+\theta}{2}\right)\right| \sim \frac{a}{4\sqrt{a^2+1}}. \tag{9}$$

Таким образом, если числа x, y удовлетворяют неравенству (8), то для них выполняется соотношение (9), а следовательно.

$$\lambda\left(\theta, \frac{1+\theta}{2}\right) = \frac{a}{4\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2},$$

вследствие чего и

$$\mu(\theta) = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}.$$

2) $\frac{m}{n} = \frac{p_{s+1} - p_s}{q_{s+1} - q_s}$.

Ведя расчет в полной аналогии с первым случаем, мы находим теперь

$$|n\theta - m| \sim \lambda\left(\frac{1}{q_{s+1}} + \frac{1}{q_s}\right),$$

вследствие чего

$$|n(n\theta - m)| \sim \lambda\left(\frac{q_{s+1}}{q_s} - \frac{q_s}{q_{s+1}}\right) \sim \lambda\left(\frac{1}{\theta} - \theta\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}},$$

как и в первом случае. Поэтому и здесь

$$\mu(\theta) = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}.$$

Таким образом, доказаны все утверждения нашей теоремы. Так как $\lambda(\theta) \to 0$ при $a \to \infty$, то существует бесчисленное множество значений λ, и в том числе сколь угодно малых, для которых наша оценка не может быть улучшена. С другой стороны, существуют и числа со сколь угодно малым значением $\lambda(\theta)$, для которых $\mu(\theta) < \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}$. Это, разумеется, еще не означает, что для такого значения λ оценка может быть улучшена; не исключена ведь возможность существования другого числа θ' с тем же значением λ, для которого $\mu(\theta') = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2}$.

Есть, однако, одно значение λ, для которого оценка заведомо может быть улучшена, а именно $\lambda = 1/\sqrt{13}$. В самом деле, как показал Перрон (7), все числа θ, для которых $\lambda(\theta) = 1/\sqrt{13}$, эквивалентны числу (0; 3); поэтому, как мы знаем, для всех таких чисел

$$\mu(\theta) \leqslant \frac{3+1}{3+2} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{1-4\lambda^2} = \frac{1}{5} \sqrt{1-4\lambda^2}.$$

Поступило
29.III.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чебышев П. Л., Об одном арифметическом вопросе, Записки Имп. Ак. Наук № 4 (1868), приложения стр. 1—34. Полное собр. соч., изд-во Ак. Наук СССР, т. 1 (1944), 237—275.

[2] Hermite Ch., Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchebycheff, J. reine u. angew. Math., B. 88 (1879), 10—15.

[3] Kronecker L., Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, S.-B. preuss. Akad. Wiss. (1884) 1179—1193, 1271—1299.

[4] Minkowski H., Über die Annäheruug an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen, Math. Ann. B. 54 (1900), 91—124.

[5] Morimoto S. (Fukasawa S.), Über die Grössenordnung des absoluten Betrages von einer linearen inhomogenen Form, Jap. J. Math., 3 (1926), 1—26, 91—106; 4 (1927), 41—48.

[6] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, Berlin, 1936.

[7] Perron, Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale, S.-B. Heidelberg Akad. Wiss. (1921), Abh. 4, 8.

A. KHINTCHINE. SUR LE PROBLÈME DE TCHEBYCHEFF

RÉSUMÉ

Soit θ un nombre irrationnel, α un nombre réel tel que l'équation $\theta x - y - \alpha = 0$ n'ait pas de solutions en nombres entiers x, y. Soit $\lambda(\theta, \alpha)$ la borne inférieure des nombres C tels que l'inégalité

$$|\theta x - y - \alpha| < \frac{C}{|x|}$$

peut être résolue en nombres entiers x, y, $|x|$ étant aussi grand que l'on veut; soit enfin $\mu(\theta)$ la borne supérieure de $\lambda(\theta, \alpha)$ quand α parcourt tous les nombres réels assujettis à la condition mentionnée plus haut.

Minkowski (¹) a démontré que $\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout nombre irrationnel θ et qu'il existe un θ avec $\mu(\theta) = \frac{1}{4}$. Le résultat principal de l'article présent consiste en ce qu'on a

$$\mu(\theta) \leqslant \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda^2}, \tag{1}$$

$\lambda = \lambda(\theta, 0)$ étant la caractéristique connue de Markoff-Hurwitz $\left(0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. On démontre ensuite que parmi les fonctions analytiques de λ la limite obtenue est la méilleure possible. Une étude plus détaillée montre que si θ développé en fraction continue a ses quotients incomplets tous égaux à un même nombre $k > 1$, on doit poser dans (1) $=$ ou $<$ selon que k est pair ou impair.

———

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 295—322 Série mathématique

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Для класса функций f, удовлетворяющих на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ условию Липшица с данной константой, в работе даются:

a) асимптотическое выражение верхней грани наилучших приближений $E_n(f)$ при помощи многочленов степени $n-1$;

b) точное неравенство для $\limsup nE_n(f)$ при $n \to \infty$;

c) асимптотические оценки для приближений f с помощью наилучшего линейного метода и частичных сумм разложений f по многочленам Чебышева.

§ 1. Введение

В 1937 году J. Favard (²) и одновременно с ним Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн (¹) получили точные выражения для верхних граней наилучших приближений функций периода 2π, имеющих производную r-го порядка, не превышающую по абсолютной величине заданную константу. В частности, этими авторами получен следующий результат:

Если функция $f(x)$ периода 2π удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x'')-f(x')| \leqslant M\,|x''-x'| \tag{1.1}$$

с константой M, то ее наилучшее приближение $\tilde{E}_n(f)$* при помощи тригонометрического полинома $(n-1)$-го порядка удовлетворяет неравенству

$$\tilde{E}_n(f) \leqslant \frac{M\pi}{2n}, \tag{1.2}$$

которое обращается в равенство для непрерывных функций $f(x)$, имеющих производную, равную $f'(x) = M \operatorname{sign} \sin n(x+\alpha)$ (и только для них), где α — произвольная постоянная.

Представляет интерес получить подобные результаты в случае приближения непериодических функций наилучшими обыкновенными многочленами.

J. Favard (²) изучал с этой целью класс функций, который мы обозначим через MH, заданных на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворя-

---

* $\tilde{E}_n(f)$ обозначает наилучшее приближение периодической функции f при помощи тригонометрического полинома порядка $n-1$, в то время как обозначение $E_n(f)$ мы оставляем для наилучшего приближения функции f (непериодической) при помощи обыкновенного многочлена степени $n-1$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

ющих на этом сегменте условию Липшица (1.1) с константой M. При этом им было показано, что нахождение точной верхней грани наилучших приближений $E_n(f)$ функций $f \in MH$ на сегменте $[-1, +1]$ при помощи обыкновенных многочленов

$$Q_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

степени $n-1$ сводится к определению максимума некоторой функции от $n+1$ переменных (см. § 2).

Однако изучение этой функции, представляющей собою отношение двух определителей n-го порядка, оказалось затруднительным. Ограничившись установлением неравенств *

$$\frac{M}{n} < \mathscr{E}_{E_n}(H) < \frac{M\pi}{2n}, \tag{1.3}$$

где через

$$\mathscr{E}_{E_n}(MH) = \sup_{f \in MH} E_n(f)$$

обозначена верхняя грань наилучших приближений функций $f \in MH$ при помощи многочленов степени $n-1$, J. Favard обращает внимание на желательность получения асимптотического выражения для $\mathscr{E}_{E_n}(MH)$ или, что все равно, для максимума упомянутой функции $n+1$ переменных.

В § 2 этой работы доказывается асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}_{E_n}(H) = \frac{M\pi}{2n} - \varepsilon_n, \tag{1.4}$$

где $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n \lg n}\right)$.

Оно достигается при $M = 1$ (асимптотически) в случае четного n для функции $f_n(x) \in H$ $(H = 1.H)$, график которой представляет собой ломаную с вершинами, абсциссы которых образуют систему из $n+1$ точек, состоящую из n нулей многочлена Чебышева $\cos n \arccos x$ степени n и из точки $x = 0$. При этом звенья ломаной имеют угловые коэффициенты, равные по абсолютной величине единице и меняющие последовательно знак при переходе через вершины.

Аппаратом при доказательстве этого утверждения служит интерполяционный многочлен, совпадающий с функцией в нулях многочлена Чебышева степени n.

Предварительно, в начале § 2, для удобства читателя вкратце излагаются упомянутые исследования J. Favard'a.

---

* Второе из неравенств (1.3) есть следствие (1.2), так как, если $f(x) \in H$ и $Q_{n-1}(x)$ — ее наилучший многочлен, то $f(\cos\theta)$ — периодическая функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой, равной единице, и $Q_{n-1}(\cos\theta)$ — ее наилучший тригонометрический многочлен $(n-1)$-го порядка. При этом $E_n(f(x)) = \bar{E}_n(f(\cos\theta))$.

В § 3 решается задача, постановка которой принадлежит С. Н. Бернштейну. С. Н. Бернштейн на его семинаре по аппроксимациям функций поставил задачу получить для индивидуальных функций $f \in MH$ оценки верхних и нижних пределов $nE_n(f)$ при $n \to \infty$.

В работе дается оценка для верхних пределов. Именно показывается, что для всех $f \in MH$ имеет место неравенство

$$\limsup_{n \to \infty} nE_n(f) \leqslant \frac{M\pi}{2}; \tag{1.5}$$

которое обращается в равенство для некоторой функции $f \in MH$.

Из равенства (1.4), в частности, следует, что если $U_n(f, x)$ есть какой-либо метод приближения, приводящий в соответствие каждой функции $f \in MH$ некоторый многочлен степени $n-1$, то

$$\sup_{f \in MH} \max_x |f(x) - U_n(f, x)| \geqslant \mathscr{E}_{E_n}(H) = \frac{M\pi}{2n} - \varepsilon_n.$$

С другой стороны, в моей заметке ([5]) было показано, что если положить

$$U_n(f, x) = U_n(\eta^{(n)}; f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k^{(n)} a_k P_k(x), \tag{1.6}$$

где

$$P_k(x) = \cos k \arccos x \tag{1.7}$$

— полиномы Чебышева,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) P_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \tag{1.8}$$

— соответствующие им коэффициенты Фурье функции f с весом $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и

$$\eta_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1.9}$$

то

$$\sup_{f \in MH} \max_x |f(x) - U_n(\eta^{(n)}; f, x)| < \frac{M\pi}{2n}.$$

Таким образом, $U_n(\eta^{(n)}; f, x)$ после доказанного равенства (1.4), можно считать асимптотически наилучшим (линейным) методом приближения функции f класса MH многочленами степени $n-1$ среди каких бы то ни было методов приближений функций этого класса*.

В связи с этим представляет интерес более детальное изучение сумм вида (1.6) при коэффициентах, заданных равенствами (1.9). Эти коэф-

* В упомянутой заметке было доказано лишь, что $U_n(\eta^{(n)}; f, x)$ есть наилучший метод для класса MH только среди сумм вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k a_k P_k(x)$, где η_k — произвольные числа.

фициенты впервые появились в цитированных уже работах J. Favard'a ([2]), Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна ([1]) в случае приближения периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, тригонометрическими многочленами.

В § 4 доказывается неравенство

$$\mathscr{E}_n(\eta^{(n)};\ MH,\ x) = \sup_{f \in MH} |f(x) - U_n(\eta^{(n)};\ f,\ x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\pi}{2n}\sqrt{1-x^2} + |x|\, O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right), \tag{1.10}$$

которое показывает, как распределяется отклонение рассматриваемого приближения от $f(x)$ в зависимости от x.

Наконец, в § 5 для сравнения с предыдущим результатом рассматривается приближение функций $f \in MH$ при помощи сумм первых n членов

$$U_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k P_k(x)$$

разложений f в ряд по многочленам Чебышева и доказывается равенство

$$\sup_{f \in MH} |f(x) - U_n(f, x)| = \frac{4}{\pi^2}\frac{M \lg n}{n}\sqrt{1-x^2} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.11}$$

Как обычно в подобных случаях, функция, принадлежащая к MH, для которой отклонение $f(x) - U_n(f, x)$ равно с точностью до остаточного члена правой части (1.11), зависит от x и n. Однако будет доказано, что каково бы ни было значение x из интервала $(-1, +1)$, существует в MH функция f (зависящая от x, но не зависящая от n), для которой имеет место неравенство

$$|f(x) - U_n(f, x)| > \frac{4M}{\pi^2}\frac{\lg n}{n}\sqrt{1-x^2}\,(1-\varepsilon_n) \tag{1.12}$$

для некоторой возрастающей последовательности индексов n.

Таким образом, если положить

$$S_x(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lg n}|f(x) - U_n(f, x)|, \tag{1.13}$$

то из (1.11) будет следовать, что для любой функции $f \in MH$ и любого x

$$S_x(f) \leqslant \frac{4M}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}, \tag{1.14}$$

а из (1.12) — существование функции $f \in MH$, для которой неравенство (1.14) обращается в равенство.

Доказательство двух последних утверждений сводится подстановкой $x = \cos\theta$ к рассмотрению рядов Фурье функций $f(\cos\theta)$, имеющих, таким образом, производную, по абсолютной величине не превышающую $M|\sin\theta|$. При этом, в общем, мы пользуемся приемом, который применял А. Н. Колмогоров ([4]) для оценки верхней грани уклонений периодических функций, имеющих производную, не превышающую по абсолютной величине данную константу, от их сумм Фурье.

§ 2. Асимптотическая оценка верхней грани $E_n(f)$

Мы ограничимся рассмотрением класса H функций, удовлетворяющих на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ условию Липшица с константой единица. Чтобы перейти к случаю класса MH, нужно полученные результаты умножить на константу M.

Для получения верхней грани

$$\mathscr{E}_{E_n}(H) = \sup_{f \in H} E_n(f) \tag{2.1}$$

J. Favard рассматривал наилучшее приближение

$$E_n^*(f) = E_n^*(f; x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

функции f на некоторой заданной системе $n+1$ точек

$$-1 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1. \tag{2.2}$$

На основании теоремы Чебышева коэффициенты многочлена степени $n-1$

$$Q_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

наилучшим образом приближающего функцию $f(x)$ на этой системе точек и соответствующее наилучшее приближение $\rho = E_n^*(f)$ определяются из линейной системы уравнений

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_k^i + \varepsilon(-1)^k \rho = f(x_k) = f_k \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n),$$

из которой следует, что

$$\rho = \frac{|\Delta_1(f; x_0, \ldots, x_n)|}{|\Delta|}$$

где

$$\Delta_1(f; x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \ldots x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & f_1 - f_0 \\ x_2 - x_1 & \ldots x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & f_2 - f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n - x_{n-1} & \ldots x_n^{n-1} - x_{n-1}^{n-1} & f_n - f_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \ldots x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & 2 \\ x_2 - x_1 & \ldots x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & -2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n - x_{n-1} & \ldots x_n^{n-1} - x_{n-1}^{n-1} & (-1)^{n-1} 2 \end{vmatrix}.$$

Миноры этих определителей, соответствующие элементам последнего столбца и являющиеся определителями Вандермонда, положительны, откуда, приняв во внимание, что функция f удовлетворяет условию Липшица с константой единица, будем иметь

$$E_n^*(f) \leqslant \frac{|\Delta_*|}{|\Delta|} = E_n^*(f_n; x_0, \ldots, x_n) = E_n^*(f_n), \tag{2.3}$$

где

$$\Delta_* = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \ldots x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & x_1 - x_0 \\ x_2 - x_1 & \ldots x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_1 - x_2 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ x_n - x_{n-1} & \ldots x_n^{n-1} - x_{n-1}^{n-1} & (-1)^{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{vmatrix},$$

а $f_n = f_n(x)$ представляет собой любую функцию специального вида, график которой изображается ломаной с абсциссами вершин в точках системы (2.2) и с угловыми коэффициентами звеньев, равными по абсолютной величине единице и меняющими последовательно знак при переходе через точки x_k. Такие функции, отличающиеся между собой на постоянные, мы будем называть **экстремальными функциями**, соответствующими узлам (2.2).

Заметим теперь, что наилучшее приближение $E_n(f)$ на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$, на основании теоремы Чебышева, равно верхней грани

$$E_n(f) = \sup_{x_k} E_n^*(f; x_0, \ldots, x_n)$$

наилучших приближений f на всевозможных системах точек (2.2), принадлежащих к этому сегменту. Поэтому, введя обозначение

$$\Phi_n(x_0, \ldots, x_n) = \frac{|\Delta_*|}{|\Delta|} = E_n^*(f_n), \tag{2.4}$$

будем иметь, в силу (2.3)

$$\sup_{f \in H} E_n(f) = \sup_{f \in H} \sup_{x_k} E_n^*(f; x_0, \ldots, x_n) = \sup_{x_k} \sup_{f} E_n^*(f) =$$
$$= \sup_{x_k} E_n^*(f_n) = \max_{x_k} \Phi_n(x_0, \ldots, x_n);$$

мы получили, таким образом, равенство Favard'а:

$$\mathscr{E}_{E_n}(H) = \max_{x_k} \Phi_n(x_0, \ldots, x_n), \tag{2.5}$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{E_n}(H) = \frac{\pi}{2n} - \varepsilon_n = \Phi_n(x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) + \varepsilon_n', \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n' > 0, \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n \lg n}\right), \quad \varepsilon_n' = O\left(\frac{1}{n \lg n}\right),$$

где узлы $x_k = x_k^{(n)}$ *можно считать образующими множество, состоящее из точек* $z_i^{(n)} = \cos \theta_i^{(n)}$; $\theta_i^{(n)} = \frac{2i-1}{2n}\pi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *(нулей многочлена Чебышева степени* n*), а также точки* $x = 0$ *при* n *четном и точки* $x = \cos \frac{n-1}{2n}\pi$ *при* n *нечетном.*

Доказательство. Рассмотрим интерполяционный многочлен степени $n-1$

$$P_n(f, x) = \frac{1}{n} \cos n \arccos x \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \sin \theta_k}{x - \cos \theta_k} f(\cos \theta_k^{(n)}), \tag{2.7}$$

$$\theta_k = \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

совпадающий с $f(x)$ в нулях $x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}$ многочлена Чебышева.

Пусть $n=2m$ — четное число. При $x=0$

$$P_n(f, 0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+m}\operatorname{tg}\theta_k f(x_k^{(n)}), \tag{2.8}$$
$$x_k^{(n)}=\cos\theta_k^{(n)};$$

при этом для нас будет существенно, что произведение $(-1)^{k+m}\operatorname{tg}\theta_k^{(n)}$ при возрастании k от 1 до m и от $m+1$ до n последовательно меняет знак, в то время как знаки этого произведения при $k=m$ и $k=m+1$ положительны.

Введем в рассмотрение норму

$$M_n(0)=\sup_{|f|\leq 1}|P_n(f, 0)|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\operatorname{tg}\theta_k|=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_m}\operatorname{tg}t\,dt+O(1)=\frac{2}{\pi}\lg n+O(1). \tag{2.9}$$

Пусть $f\in H$, $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, наилучший для f в системе точек, состоящей из узлов $x_k^{(n)}=\cos\theta_k$ рассматриваемого интерполяционного многочлена и точки $x=0$ и пусть

$$E_n^*(f)=E_n(f;\, x_0^{(n)},\, \ldots,\, x_m^{(n)},\, 0,\, x_{m+1}^{(n)},\, \ldots,\, x_n^{(n)})$$

— соответствующее наилучшее приближение. Тогда $f(x)-Q_{n-1}(x)$, по теореме Чебышева, последовательно меняет знак в точках $x_0^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, 0, x_{m+1}^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, принимая в них значение, по абсолютной величине равное $E_n^*(f)$.

Вследствие сказанного будем иметь равенство

$$|P_n(f, 0)-f(0)|=|P_n(f-Q_{n-1}, 0)-[f(0)-Q_{n-1}(0)]|=$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\operatorname{tg}\theta_k|\right)E_n^*(f)=(1+M_n(0))\,E_n^*(f), \tag{2.10}$$

правая часть которого на основании (2.3) достигает своего максимума (среди $f\in H$) для экстремальной функции $f_n(x)$ с узлами $x_0^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, 0, x_{m+1}^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$.

Эта функция четная, линейная в интервалах между узлами, а в узлах равна

$$f_n(0)=0, \quad f_n(x_k^{(n)})=(-1)^{m+k}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sin\theta_k \quad (k=0, \ldots, m). \tag{2.11}$$

Если подставить f_n в левую часть (2.10), то вследствие (2.8) получим

$$|P_n(f_n, 0)-f_n(0)|=P_n(f_n, 0)=\frac{2}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin^2\theta_k}{\cos\theta_k}=$$
$$=\frac{2}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\cos\theta_k}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin\frac{n-2k+1}{2n}\pi}+$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2(m-k)+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\lg n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.12)$$

откуда, имея в виду (2.9), будем иметь

$$E_n(f_n)\geqslant E_n^*(f_n)=\frac{|P_n(f_n, 0)|}{1+M_n(0)}=$$
$$=\left[\frac{\lg n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]:\left[\frac{2}{\pi}\lg n+O(1)\right]=\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n\lg n}\right) \quad (2.13)$$

и, так как в силу (1.3)

$$E_n(f_n)\leqslant \mathscr{E}_{E_n}(H)<\frac{\pi}{2n},$$

то $\mathscr{E}_{E_n}(H)$ будет отличаться от $\frac{\pi}{2n}$ на величину порядка $O\left(\frac{1}{n\lg n}\right)$. Этим теорема доказана для n четного, если принять во внимание равенства (1.3) и (2.5), из которых следует, что ε_n, $\varepsilon_n'>0$.

При нечетном $n=2m+1$ доказательство проводится аналогично. Нужно положить в $P_n(f, x)$

$$x=x_*^{(n)}=\cos\frac{n-1}{2n}\pi$$

и рассмотреть вместо $P_n(f, 0)$

$$P_n(f, x_*^{(n)})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m+k}\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos x_*^{(n)}}f(x_k^{(n)}),$$

приняв во внимание, что числа

$$\frac{(-1)^{m+k}\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos x_*^{(n)}}$$

меняют последовательно знак при возрастании k от 1 до m и от $m+1$ до n и имеют положительные знаки при $k=m$ и $k=m+1$. В этом случае также

$$M_n(x_*^{(n)})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos x_*^{(n)}}\right|=\frac{2}{\pi}\lg n+O(1).$$

Соответствующая системе узлов $x_0^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, x_*^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ экстремальная функция $f_n^*(x)$ определяется при помощи равенств

$$f_n^*(x_*^{(n)})=0,$$

$$f_n^*(x_k^{(n)})=\begin{cases}(-1)^{m+k}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sin\theta_k+A_n & (k=1, \ldots, m),\\ (-1)^{m+k+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sin\theta_k+B_n & (k=m+1, \ldots, n),\end{cases}$$

где

$$A_n=\cos\theta_m-\cos\frac{n-1}{2n}\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sin\theta_m=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$B_n=\cos\frac{n-1}{2n}\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\sin\theta_{m+1}=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В результате вычислений, которые мы не будем приводить и в которых величинами A_n и B_n можно пренебречь, получим

$$P_n(f_n^*, x_*^{(n)}) = \frac{\lg n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда и из неравенства, аналогичного (2.13), будет следовать,

$$E_n(f_n^*) \geqslant \frac{|P_n(f_n^*, x_*^{(n)})|}{1 + M_n(x_*^{(n)})} = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \lg n}\right).$$

Примечание. Любопытно отметить, что рассмотренная в этом параграфе функция Ф весьма чувствительно реагирует на изменения в расположении узлов, которые в других вопросах менее деликатного свойства не играли бы существенной роли. Например, значение Ф, соответствующее системе узлов, состоящей из нулей многочлена Чебышева $\cos(n+1)\arccos x$, асимптотически равно $\frac{\pi^2}{8n}$, а значение Ф, соответствующее системе $n+1$ узлов, где многочлен $\cos n \arccos x$ обращается в extremum, асимптотически равно только $\frac{1}{n}$. В этом можно убедиться, подставив соответствующие узлы в равенство (2.4).

§ 3. Неравенства для верхних пределов $nE_n(f)$

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $f \in MH$ справедливо неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} nE_n(f) \leqslant \frac{M\pi}{2}. \qquad (3.1)$$

Существует функция $f \in MH$, для которой левая часть этого неравенства равна правой.

Доказательство. Само неравенство (3.1) является непосредственно следствием теоремы 1.

Будем считать в дальнейшем $M = 1$. При конструировании функции $f \in H$, для которой левая часть (3.1) равна правой, воспользуемся интерполяционными многочленами $P_n(f, x)$ степени $n-1$ (см. (2.7)), совпадающими с $f(x)$ в нулях $x_k^{(n)}$ многочлена Чебышева степени n и экстремальными функциями $f_n(x)$, определенными в § 2 равенствами (2.11).

Функция $f_n(x)$ для четного $n = 2m$ есть четная функция, определяемая равенствами

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(x_k^{(n)}) = (-1)^{m+k} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \sin\theta_k^{(n)}, \qquad (3.2)$$

где

$$\theta_k = \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 0, 1, \ldots, m;\ n = 2, 4, \ldots).$$

График ее представляет собой ломаную с вершинами в точках $x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, 0, x_{m+1}^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ и с угловыми коэффициентами звеньев, по абсолютной величине равными единице.

Положим

$$I_n(a, \varphi) = \frac{1}{n} \sum_{0 < x_k^{(n)} < a}{}' (-1)^{k+m} \operatorname{tg}\theta_k \varphi(x_k^{(n)}) \quad (n = 2m), \qquad (3.3)$$

где штрих обозначает, что сумма не распространяется на наибольший ($=m$) и наименьший значки k, для которых $0 < x_k^{(n)} < a$ и пусть

$$I_n^*(a) = I_n(a, f_n') = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \sum_{0 < x_k^{(n)} < a}' \frac{\sin^2 \theta_k}{\cos \theta_k}. \tag{3.4}$$

На основании (2.12) и приняв во внимание, что отношение $\frac{\sin^2\theta_k}{\cos\theta_k}$ для $x_k^{(n)} = \cos\theta_k \geqslant a$ ограничено, получим

$$I_n^*(a) = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin^2\theta_k}{\cos\theta_k} - \sum_{x_k^{(n)} \geqslant a}^{*} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\lg n}{n} + r_n,$$

где

$$|r_n| < \frac{C(a)}{n},$$

и $C(a)$ — константа (зависящая от a). Поэтому, выбрав последовательность положительных чисел η_n так, чтобы, $\eta_n \to 0$ и $\eta_n \lg n \to \infty$ при $n \to \infty$, будем иметь

$$I_n^*(a) > \left(\frac{1}{2} - \eta_n\right) \frac{\lg n}{n} \quad (n > N(a)), \tag{3.5}$$

где $N(a)$ достаточно велико.

Заметим, что если функция φ удовлетворяет условию Липшица в интервале $0 < a \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{a \leqslant x_k^{(n)} \leqslant 1} (-1)^{k+m} \operatorname{tg} \theta_k^{(n)} \varphi(x_k^{(n)}) \right| < \frac{C}{n}, \tag{3.6}$$

где C — константа (зависящая от φ и a). В самом деле, пусть 2μ — наибольшее четное число, для которого $a \leqslant x_{2\mu}^{(n)}$. Тогда, пренебрегая, быть может, членом, соответствующим $k = 2\mu + 1$, имеющим порядок $O(n^{-1})$, получим, что левая часть (3.6) не превышает

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\mu} |\operatorname{tg} \theta_{2\nu} \varphi(x_{2\nu}^{(n)}) - \operatorname{tg} \theta_{2\nu-1} \varphi(x_{2\nu-1}^{(n)})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\mu} |\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_{2\nu-1}| |\varphi(x_{2\nu}^{(n)})| + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\mu} \operatorname{tg} \theta_{2\nu-1} |\varphi(x_{2\nu}^{(n)}) - \varphi(x_{2\nu-1}^{(n)})| < \frac{C}{n},$$

---

* В эту сумму входит также $x_k^{(n)}$ с наименьшим индексом k, для которого $x_k^{(n)} < a$.

так как $\operatorname{tg}\theta$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют в рассматриваемом интервале условию Липшица.

Из (3.6), имея в виду, что $\eta_n \lg n \to \infty$, следует

$$\frac{1}{n}\Big|\sum_{a\leqslant x_k^{(n)}\leqslant 1}(-1)^{k+m}\operatorname{tg}\theta_k\varphi\left(x_k^{(n)}\right)\Big| < \eta_n\,\frac{\lg n}{n}\quad (n>N), \tag{3.7}$$

если N достаточно велико.

Определим функцию f пока на интервале $(0,1)$ при помощи убывающей последовательности чисел

$$1=a_0>a_1>\ldots\to 0 \tag{3.8}$$

и возрастающей последовательности индексов

$$n_1<n_2<\ldots, \tag{3.9}$$

заданных рекуррентным способом. Именно, пусть a_1 — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0<a_1<1$, $n_1=2$, $f(x)\equiv 0$ для $a_1\leqslant x\leqslant 1$ и пусть числа

$$1=a_0>a_1>\ldots>a_{i-1},$$
$$n_1<n_2<\ldots<n_{i-1}$$

уже определены, а вместе с ними определена функция $f(x)$ на интервале $a_{i-1}\leqslant x\leqslant 1$, удовлетворяющая на нем условию Липшица с константой единица и равная нулю для $x=a_{i-1}$.

Подберем четное $n_i>n_{i-1}$ настолько большим, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$I^*_{n_i}(a_{i-1})>\left(\frac{1}{2}-\eta_{n_i}\right)\frac{\lg n_i}{n_i},$$
$$\Big|\frac{1}{n_i}\sum_{a_{i-1}\leqslant x_k^{(n_i)}\leqslant 1}(-1)^{k+m_i}\operatorname{tg}\theta_k^{(n_i)}f\left(x_k^{(n_i)}\right)\Big|<\eta_{n_i}\frac{\lg n_i}{n_i}\quad (n_i=2m_i), \tag{3.10}$$

что возможно в силу (3.5) и (3.7), и обозначим через $x_{l_i}^{(n_i)}$ наибольший среди $x_k^{(n_i)}$ узел, не превышающий a_{i-1}.

Положим теперь, что a_i и a_i' соответственно равны наименьшему и наибольшему нулям $f_{n_i}(x)$, принадлежащим к интервалу $x_{m_i}^{(n_i)}<x<x_{l_i}^{(n_i)}$ $(2m_i=n_i)$.

Таким образом, среди точек $x_k^{(n_i)}$ $(k=1,\ldots,m_i)$, для которых $x_k^{(n_i)}<a_{i-1}$, имеется только одна $(x_{m_i}^{(n_i)})$, для которой $x_k^{(n_i)}<a_i$ и одна $(x_{l_i}^{(n_i)})$, для которой $a_i'<x_k^{(n_i)}$.

Пусть

$$f(x)=\begin{cases} f_{n_i}(x) & a_i\leqslant x<a_i',\\ 0 & a_i'\leqslant x\leqslant a_{i-1}.\end{cases} \tag{3.11}$$

Очевидно, $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой единица на интервале $a_i\leqslant x\leqslant 1$ и $f(a_i)=0$.

Этим определены последовательности (3.8) и (3.9) и вместе с ними функция $f(x)$ на интервале $0<x\leqslant 1$, удовлетворяющая на нем условию Липшица с константой единица. Очевидно, $f(x)\to 0$ при

$x \to 0$. Положим $f(0)=0$ и продолжим $f(x)$ на $[-1, 0]$ так, чтобы она была четной, тогда в силу (3.3), (3.10) и (3.11)

$$|P_{n_i}(f, 0)-f(0)| = P_{n_i}(f, 0) = \frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{m_i}(-1)^{k+m_i}\operatorname{tg}\theta_k^{(n_i)}f(x_k^{(n_i)}) =$$

$$= \frac{2}{n_i}\operatorname{tg}\theta_{m_i}^{(n_i)}f(x_{m_i}^{(n_i)}) + \frac{2}{n_i}\sum_{0<x_k^{(n_i)}<a_{i-1}}{}' (-1)^{k+m_i}\operatorname{tg}\theta_k^{(n_i)}f(x_k^{(n_i)}) +$$

$$+\frac{2}{n_i}\sum_{a_{i-1}\leq x_k^{(n_i)}\leq 1} > O\left(\frac{1}{n_i}\right) + 2I_{n_i}^*(a_{i-1}) - 2\eta_{n_i}\frac{\lg n_i}{n_i} > (1-5\eta_{n_i})\frac{\lg n_i}{n_i}. \quad (3.12)$$

С другой стороны, имеет место неравенство Лебега

$$|P_{n_i}(f, 0)-f(0)| \leqslant [1+M_{n_i}(0)]\,E_{n_i}(f), \quad (3.13)$$

где

$$M_n(0) = \sup_{|f|\leq 1}|P_n(f, 0)| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\operatorname{tg}\theta_k^{(n)}| = \frac{2}{\pi}\lg n + O(1). \quad (3.14)$$

Таким образом, приняв во внимание (3.1),

$$\lim_{n_i\to\infty} n_i E_{n_i}(f) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.15)$$

§ 4. Асимптотически наилучший линейный метод приближения

Пусть $f \in H$,

$$U_n(\eta^{(n)};\ f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\eta_k^{(n)}a_k P_k(x),$$

$$\eta_k^{(n)} = k\lambda_k = \frac{k\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n},\ P_k(x) = \cos k \arccos x$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,P_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\ (k=1,\ 2,\dots,\ n-1).$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо неравенство*

$$\mathscr{E}_n(\eta^{(n)}; MH, x) = \sup_{f\in MH}|f(x)-U_n(\eta^{(n)};\ f, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\pi}{2n}\sqrt{1-x^2} + |x|\,O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right) \quad (4.1)$$

равномерно относительно x на интервале $(-1, +1)$.

При $x=1$ это неравенство достигается в том смысле, что нельзя заменить O на o.

Доказательство. Будем считать $M=1$. После подстановки $x=\cos\theta$ получим

$$f(\cos\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\theta,$$

$$U_n(\eta^{(n)};\ f, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} k\lambda_k a_k \cos k\theta,$$

где a_k — коэффициенты Фурье функции $f(\cos\theta)$. Интегрируя эти коэффициенты по частям, найдем

$$f(\cos\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\sin(t+\theta)\, f'[\cos(t+\theta)]\, dt,$$

где

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$$

и

$$U_n(\eta^{(n)};\ f, \theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin kt \sin(t+\theta)\, f'[\cos(t+\theta)]\, dt.$$

Отсюда, приняв во внимание, что функции $f'(\cos t)$ и $\cos t$ не превышают по абсолютной величине единицы, будем иметь

$$|f(\cos\theta) - U_n(\eta^{(n)}; f, \theta)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big|K(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \sin kt\Big| |\sin(t+\theta)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant I'_n |\sin\theta| + I''_n |\cos\theta| = I'_n\sqrt{1-x^2} + I''_n |x|, \tag{4.2}$$

где

$$I'_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big|K(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \sin kt\Big|\, dt = \frac{\pi}{2n}; \tag{4.3}$$

$$I''_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Big|K(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \sin kt\Big| \sin t\, dt. \tag{4.4}$$

Интеграл, при помощи которого определяется I'_n в (4.3), фигурирует в работах (2) и (1). Его вычисление основано на том обстоятельстве (которое будет нами использовано также для оценки I''_n), что функция

$$K(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \sin kt,$$

где

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

обращается в нуль с переменой знака в точках $t_k = \frac{k\pi}{n}$ и только в этих точках. Иначе говоря,

$$\operatorname{sign}\Big[K(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \sin kt\Big] = \pm\operatorname{sign}\sin nt. \tag{4.5}$$

Величина $I'_n\sqrt{1-x^2}$ дает нам первый член правой части (4.1) и нам предстоит показать, что I''_n имеет порядок $O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right)$.

На основании (4.5)

$$I''_n \leqslant Q_n + R_n, \tag{4.6}$$

где, имея в виду, что $K(t)=\frac{1}{2}(\pi-t)$ $(0<t<\pi)$,

$$Q_n=\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \frac{\pi-t}{2}\sin t \operatorname{sign}\sin nt\, dt\right|=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\pi-t}{2}\sin t\, dt=$$

$$=\frac{\pi-n\sin\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}(1+(-1^n))=O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{4.7}$$

$$R_n=\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\sin kt\sin t\operatorname{sign}\sin nt\, dt\right|. \tag{4.8}$$

Для оценки R_n будем, ради простоты, считать n четным. Тогда в разложении по косинусам

$$\operatorname{sign}\sin nt=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\cos lt \quad (0\leqslant t\leqslant\pi)$$

коэффициенты a_l для $l=0, 1, \ldots, n$ выразятся формулами

$$a_{2\nu-1}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{2\nu-1}\operatorname{tg}\frac{2\nu-1}{2n}\pi,$$

$$a_{2\nu}=0 \quad \left(\nu=0, 1, \ldots, \frac{n}{2}\right)$$

и

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\sin kt\sin t\operatorname{sign}\sin nt\, dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k(\cos\overline{k-1}\,t-\cos\overline{k+1}\,t)\operatorname{sign}\sin nt\, dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}\lambda_{2\nu}(a_{2\nu-1}-a_{2\nu+1})=\frac{1}{2}\left\{\sum_{\nu=1}^{m-1}(a_{2\nu-1}-a_{2\nu+1})\lambda_{2\nu}-a_{2m-1}\lambda_{2m}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}(\lambda_{2\nu+2}-\lambda_{2\nu})a_{2\nu+1}-a_{n-1}\lambda_{n-2}\right\},$$

где положено $m=\left[\frac{n}{4}\right]$ $\left(\text{целая часть } \frac{n}{4}\right)$.

Заметим, что

$$a_{2m-1}\lambda_{2m}=\frac{2}{n}\frac{1}{2m-1}\operatorname{tg}\frac{2m-1}{n}\pi\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n}=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$a_{n-1}\lambda_{n-2}=\frac{2}{n}\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}\frac{n-1}{2n}\pi\operatorname{ctg}\frac{(m-2)\pi}{2n}=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее,

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}(a_{2\nu-1}-a_{2\nu+1})\lambda_{2\nu}=\frac{\pi}{n^2}\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\operatorname{tg} z_{2\nu-1}}{z_{2\nu-1}}-\frac{\operatorname{tg} z_{2\nu+1}}{z_{2\nu+1}}\right)\operatorname{ctg} z_{2\nu} \quad (4.9)$$

$$\left(z_\nu=\frac{\nu\pi}{2n}\right),$$

и, так как функция $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ в интервале $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ имеет производную вида $x\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — определенная функция, не превышающая по абсолютной величине константу C и, кроме того, в этом интервале выполняется неравенство

$$\operatorname{ctg} x\leqslant\frac{1}{\sin x}\leqslant\frac{\pi}{2x},$$

то правая часть (4.9) не превышает

$$\frac{\pi^3}{2}\frac{C}{n^3}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{z_{2\nu}+\theta_\nu}{z_{2\nu}}<\frac{C_1}{n^2}\quad\left(-\frac{\pi}{2n}<\theta_\nu<\frac{\pi}{2n}\right),$$

где C и C_1 — абсолютные константы.

Наконец,

$$\left|\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}(\lambda_{2\nu+2}-\lambda_{2\nu})a_{2\nu+1}\right|=\frac{2}{n}\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}(\operatorname{ctg} z_{2\nu}-\operatorname{ctg} z_{2(\nu+1)})\frac{1}{2\nu+1}\operatorname{tg} z_{2\nu+1}. \quad (4.10)$$

и в силу того, что функция $\operatorname{ctg} x$ в интервале $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ удовлетворяет условию Липшица, а также в силу неравенств

$$\operatorname{tg} x\leqslant\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\leqslant\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)},$$

правая часть (4.10) не будет превышать

$$\frac{C}{n^2}\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}\frac{1}{2\nu+1}\frac{n}{n-2\nu-1}=\frac{C}{n^2}\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{1}{2\nu+1}-\frac{1}{n-2\nu-1}\right)=O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right).$$

Итак, мы доказали, что

$$R_n=O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right),$$

откуда, в силу (4.6) и (4.7),

$$I''_n=O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right).$$

Таким образом, неравенство (4.1) доказано полностью.

Остается еще показать справедливость последней части утверждения теоремы 3 о том, что при $x=1$ $(\theta=0)$ в неравенстве (4.1) нельзя заменить O на o. В самом деле, зададим функцию f (принадлежащую к H) так, чтобы в интервале $0<t<\pi$

$$f'(\cos t)=\operatorname{sign}\sin nt.$$

Тогда

$$f(1)-U_n(\eta^{(n)};\ f,1)=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left\{K(t)-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\sin kt\right\}\operatorname{sign}\sin nt\sin t\,dt\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|K(t)-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\sin kt\right|\sin t\,dt-I_n''.$$

Но из оценок, которые были выведены для I_n'', следует, что

$$I_n''=\frac{1}{n}\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}(\operatorname{ctg}z_{2\nu}-\operatorname{ctg}z_{2(\nu+1)})\frac{1}{2\nu+1}\operatorname{tg}z_{2\nu+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{n^2}\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}\frac{1}{\sin^2(z_{2\nu}+\theta_\nu)}\frac{1}{2\nu+1}\operatorname{tg}z_{2\nu+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)>$$

$$>\frac{C_1}{n^2}\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}\frac{n}{(2\nu+1)(n-2\nu+1)}=\frac{C_1}{n^2}\sum_{\nu=m}^{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{1}{2\nu+1}+\frac{1}{n-2\nu+1}\right)>\frac{C_2}{n^2}\lg n,$$

где C_1 и C_2 — абсолютные константы.

§ 5. Суммы первых n членов ряда Чебышева

Пусть $f\in MH$,

$$P_k(x)=\cos k\arccos x,\qquad a_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)P_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$U_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_kP_k(x)$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\sup_{f\in MH}|f(x)-U_n(f,x)|=\frac{4}{\pi^2}\frac{M\lg n}{n}\sqrt{1-x^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\tag{5.1}$$

равномерно относительно x на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Доказательство. Будем считать $M=1$. Чтобы перейти к общему случаю, полученные результаты, как легко видеть, нужно умножить на M.

Пусть $f\in H$; тогда функция $\varphi(\theta)=f(\cos\theta)$ будет неопределенным интегралом от своей производной

$$\frac{d}{d\theta}f(\cos\theta)=-f'(\cos\theta)\sin\theta,$$

которую можно, таким образом, представить в виде

$$\varphi'(\theta)=\psi(\theta)\sin\theta,\tag{5.2}$$

где $\psi(\theta)$ — измеримая четная периода 2π функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\psi(\theta)| \leqslant 1. \tag{5.3}$$

Наоборот, если некоторая функция $\varphi(\theta)$ есть неопределенный интеграл от своей производной вида (5.2), где $\psi(\theta)$ удовлетворяет сформулированным условиям, то

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(\arccos x)\right| = |\psi(\theta)| \leqslant 1$$

и, таким образом, функция $\varphi(\arccos x)$ принадлежит к H.

Примем во внимание, что подстановка $x=\cos\theta$ переводит разложение $f(x)$ по многочленам Чебышева в ряд Фурье $\varphi(\theta)$, и обозначим через $S_n(\varphi, \theta)$ сумму Фурье порядка $n-1$, а через H_s — класс функций φ, являющихся неопределенными интегралами от своих производных φ' вида (5.2), где $\psi(\theta)$ — измеримая четная периода 2π функция, удовлетворяющая неравенству (5.3). В таком случае

$$\mathscr{E}_n(x) = \sup_{f\in H}|f(x) - U_n(f, x)| = \sup_{\varphi\in H_s}|\varphi(\theta) - S_n(\varphi, \theta)|. \tag{5.4}$$

Пусть теперь $q(t)$ — нечетная функция периода 2π, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что

$$q(0) = q(\pi) = 0. \tag{5.5}$$

Определим для нее класс H_q функций φ, удовлетворяющих условию:

Функция φ является неопределенным интегралом от своей производной φ', представимой почти всюду произведением

$$\varphi'(t) = \psi(t)\, q(t), \tag{5.6}$$

где $\psi(t)$ — четная периода 2π функция, удовлетворяющая неравенству (5.3).

При условиях, наложенных на ψ и q, очевидно

$$\int_0^{\pi} \varphi'(t)\, dt = 0$$

и, следовательно, φ — периодическая с периодом 2π функция.

Теорема 4 является следствием равенства (5.4) и следующей леммы, в которой надо положить $q(\theta) = \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$.

ЛЕММА 1. *Если $S_n(\varphi, \theta)$ — значение суммы Фурье $(n-1)$-го порядка в точке θ, то справедливо равенство*

$$\sup_{\varphi\in H_q}|\varphi(\theta) - S_n(\varphi, \theta)| = \frac{4}{\pi^2}\,|q(\theta)|\,\frac{\lg n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.7}$$

равномерно относительно θ.

Доказательство. В силу того, что функция $|q|$ и $\varphi\in H_q$ — чётные, достаточно рассмотреть значения θ из сегмента $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

После интегрирования по частям коэффициентов Фурье функции $\varphi(\theta)$ ее ряд Фурье может быть записан следующим образом:

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}\,\varphi'(t+\theta)\,dt.$$

Отсюда, приняв во внимание (5.6),

$$S_n(\varphi,\theta)-\varphi(\theta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}D_n(t)\,q(t+\theta)\,\psi(t+\theta)\,dt, \tag{5.8}$$

где

$$D_n(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}.$$

Представим теперь ряд $D_n(t)$ в виде

$$D_n(t)=\frac{1}{n}\,\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}+F_n(t), \tag{5.9}$$

подобно тому, как это делает А. Н. Колмогоров в своей работе ([4]) (см. также ([6])), и воспользуемся полученными в ней оценками

$$\int\limits_0^{\frac{1}{n}}|D_n|\,dt=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \int\limits_{2\pi-\frac{1}{n}}^{2\pi}|D_n|\,dt=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}}|F_n|\,dt=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.10}$$

Из (5.8), (5.9) и (5.10) следует, что

$$S_n(\varphi,\theta)-\varphi(\theta)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}}\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,q(t+\theta)\,\psi(t+\theta)\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.11}$$

равномерно относительно ψ и θ, где ψ — четные периода 2π функции с $|\psi(t)|\leq 1$.

Положим, далее,

$$I_n(\psi,\theta)=q(\theta)\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}}\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\psi(t+\theta)\,dt. \tag{5.12}$$

Тогда в силу равенства

$$q(t+\theta)=q(\theta)+O(t),$$

справедливого, потому что функция q удовлетворяет условию Липшица, получим

$$S_n(\varphi,\theta)-\varphi(\theta)=\frac{1}{n}\,I_n(\psi,\theta)+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\cos\frac{2n-1}{2}t\,\frac{O(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_{\pi}^{2\pi-\frac{1}{n}}\cos\frac{2n-1}{2}t\,\frac{O(t-2\pi)}{2\sin\frac{2\pi-t}{2}}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}I_n(\psi,\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.13)$$

равномерно относительно ψ и θ.

При $\theta\equiv 0 \pmod{\pi}$ лемма очевидна. Примем поэтому, что $0<\theta<\pi$. Можно при этом считать, что $\frac{1}{n}<\theta<\pi-\frac{1}{n}$, так как в противном случае, в силу (5.5).

$$q(\theta)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$I_n(\psi,\theta)\leqslant O\left(\frac{1}{n}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}}\left|\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt=O\left(\frac{1}{n}\right)O(\lg n)=O(1).$$

Представим $I_n(\psi,\theta)$ в виде

$$I_n(\psi,\theta)=q(\theta)\,\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\theta}\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\psi(t+\theta)\,dt+\int_{-\theta}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\theta}+\int_{\pi-\theta}^{\pi}\right). \quad (5.14)$$

Первый и четвертый интегралы в этом равенстве равномерно ограничены относительно θ и ψ, так как в интервале $-\pi<t<-\theta<0$

$$\left|\frac{q(\theta)}{\sin\frac{t}{2}}\right|<c\left|\frac{\theta}{t}\right|<c,$$

а в интервале $\pi-\theta<t<\pi$

$$\left|\frac{q(\theta)}{\sin\frac{t}{2}}\right|<c\left|\frac{\pi-\theta}{t}\right|<c,$$

где c — константа, не зависящая от t и θ.

Итак,

$$I_n(\psi,\theta)=q(\theta)\,\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\theta}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\theta}\right)+O(1), \quad (5.15)$$

где подинтегральные функции те же, что и в (5.12).

Отсюда

$$|I_n(\psi,\theta)|\leqslant\frac{|q(\theta)|}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{1}{n}}\left|\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\theta}\left|\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt\right)+O(1)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}|q(\theta)|(\lg n\theta+\lg n(\pi-\theta))+O(1)=\frac{4}{\pi^2}|q(\theta)|\lg n+O(1), \quad (5.16)$$

так как $q(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица и $q(0)=q(\pi)=0$. При

этом неравенство (5.16) справедливо равномерно для любых θ из сегмента $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и для всех нечетных периода 2π функций ψ с $|\psi(t)| \leqslant 1$.

С другой стороны, определим функцию $\psi_{n\theta}(t)$ на всей действительной оси так, чтобы она была четной периода 2π и в интервале $-\theta < t < \pi - \theta$ определялась равенством

$$\psi_{n\theta}(t+\theta) = \operatorname{sign}\left\{q(\theta)\frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right\}.$$

Очевидно, $\psi_{n\theta}$ принадлежит к рассматриваемому классу функций ψ и для нее неравенство (5.16) обращается в равенство, что, приняв во внимание (5.13), и доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 5. *Каково бы ни было значение x из интервала $(-1, +1)$, существует в MH функция f (зависящая от x, но не зависящая от n), для которой имеет место неравенство*

$$|f(x) - U_n(f, x)| > \frac{4M}{\pi^2}\frac{\lg n}{n}\sqrt{1-x^2}\,(1-\varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_n \to 0$ для некоторой возрастающей подпоследовательности значений n.

Теорема 5 непосредственно вытекает из следующей леммы, в которой надо положить $q(\theta) = \sin\theta$.

ЛЕММА 2. *Каково бы ни было значение θ, в классе H_q существует функция φ (зависящая от θ, но не зависящая от n), для которой имеет место неравенство*

$$|\varphi(\theta) - S_n(\varphi, \theta)| > \frac{4}{\pi^2}\frac{\lg n}{n}|q(\theta)|(1-\varepsilon_n), \tag{5.17}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ для некоторой возрастающей подпоследовательности индексов n.

Доказательство. Будем считать $q(\theta) \neq 0$, в противном случае неравенство (29) очевидно. Вследствие четности функций $\varphi(\theta)$ и $|q(\theta)|$ достаточно рассмотреть интервал $0 < \theta < \pi$. На основании (5.13) и (5.15) для $\varphi \in H_q$ имеет место равенство

$$S_n(\varphi, \theta) - \varphi(\theta) = \frac{q(\theta)}{n\pi}\left\{\int_{-\theta}^{-\frac{1}{n}} K_n(t)\psi(t+\theta)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\theta} K_n(t)\psi(t+\theta)\,dt\right\} + $$
$$+ O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (0 < \theta < \pi) \tag{5.18}$$

справедливое равномерно для всех четных периода 2π функций ψ с $|\psi(\theta)| \leqslant 1$, где положено

$$K_n(t) = \frac{\cos\frac{2n-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Пусть $0 < a_0 < \min\{\theta, \pi-\theta\}$ и $0 < \theta < \pi$,

Рассмотрим последовательность чисел a_k и подпоследовательность чисел n_k натурального ряда, удовлетворяющие условиям

$$a_0 > a_1 > \frac{1}{n_1} > a_2 > \frac{1}{n_2} > \ldots \tag{5.19}$$

Ниже эти числа будут определены более точно, а пока при их помощи определим функцию

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } -\theta < t < -a_0, \quad a_0 < t < \pi - \theta, \\ \operatorname{sign} K_{n_k}(t) & \text{для } -a_{k-1} < t < -a_k, a_k < t < a_{k-1}. \end{cases} \tag{5.20}$$

Введем для удобства доказательства обозначение

$$\Phi_n(a, \nu) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-a}^{-\frac{1}{n}} K_n(t)\,\nu(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{a} K_n \nu\,dt \right\} \quad \left(\frac{1}{n} < a\right)$$

и положим

$$\Phi_n^*(a) = \Phi_n(a, \operatorname{sign} K_n) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-a}^{-\frac{1}{n}} |K_n|\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{a} |K_n|\,dt \right\}. \tag{5.21}$$

Заметим, что

$$\Phi_n^*(a) = \frac{4}{\pi^2} \lg n + \zeta_n,$$

где $|\zeta_n| < c(a)$ и $c(a)$ — константа, не зависящая от n. Отсюда

$$\Phi_n^*(a) > \left(\frac{4}{\pi^2} - \eta_n\right) \lg n, \quad n > N, \tag{5.22}$$

где $\eta_n \to 0$, $\eta_n \lg n \to \infty$, $\eta_n > 0$, если только N достаточно велико.

Определим натуральное число n_1 на основании (5.22) так, чтобы

$$\Phi_{n_1}^*(a_0) > \left(\frac{4}{\pi^2} - \eta_{n_1}\right) \lg n_1.$$

Далее, определим $a_1 > \frac{1}{n_1}$ так, чтобы

$$\Phi_{n_1}^*(a_1) < \eta_{n_1} \lg n_1.$$

Пусть теперь числа

$$a_0 > a_1 > \frac{1}{n_1} > a_2 > \ldots > a_{k-1} > \frac{1}{n_{k-1}}$$

уже определены и вместе с ними, таким образом, определена функция ν при помощи (5.20) для $-\theta < t < -a_{k-1}$ и $a_{k-1} < t < \pi - \theta$.

Определим тогда n_k так, чтобы

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\theta}^{-a_{k-1}} K_{n_k}(t)\,\nu(t)\,dt + \int_{a_{k-1}}^{\pi-\theta} K_{n_k}(t)\,\nu(t)\,dt \right| < \eta_{n_k} \lg n_k \tag{5.23}$$

и чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\Phi_{n_k}^*(a_{k-1}) > \left(\frac{4}{\pi^2} - \eta_{n_k}\right) \lg n_k, \quad n_k > n_{k-1}. \tag{5.24}$$

Это сделать всегда возможно в силу того, что левая часть (5.23), если в ней n_k заменить на n, стремится к нулю при $n \to \infty$ и в силу (5.22).

Далее, определяем a_k так, чтобы

$$\frac{1}{n_{k-1}} > a_k > \frac{1}{n_k}, \quad \Phi^*_{n_k}(a_k) < \eta_{n_k} \lg n_k. \tag{5.25}$$

Таким образом, числа a_k и n_k, удовлетворяющие (5.19), по индукции определены для всех $k = 0, 1, \ldots$ и, следовательно, полностью определена функция $\nu(t)$ при помощи (5.20).

Приняв во внимание, что $|\nu(t)| \leqslant 1$, а также соотношения (5.21), (5.23), (5.24) и (5.25), будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\theta}^{-\frac{1}{n_k}} K_{n_k}(t)\,\nu(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n_k}}^{\pi-\theta} K_{n_k}(t)\,\nu(t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\theta}^{-a_{k-1}} K_{n_k}\nu\,dt + \int_{a_{k-1}}^{\pi-\theta}\right\} + \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-a_{k-1}}^{-a_k} |K_{n_k}|\nu\,dt + \int_{a_k}^{a_{k-1}}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-a_k}^{-\frac{1}{n_k}} K_{n_k}\nu\,dt + \int_{\frac{1}{n_k}}^{a_k}\right\} > -\eta_{n_k}\lg n_k + \{\Phi^*_{n_k}(a_{k-1}) - \Phi^*_{n_k}(a_k)\} -$$

$$-\Phi^*_{n_k}(a_k) > \left(\frac{4}{\pi^2} - 4\eta_{n_k}\right)\lg n_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.26}$$

Пусть, теперь, $\psi(t) = \psi_0(t)$ — четная функция периода 2π, определяемая равенством

$$\psi(t+\theta) = \nu(t) \quad (-\theta < t < \pi - \theta).$$

Тогда соответствующая ей функция φ, являющаяся неопределенным интегралом от $q(t)\psi(t)$, будет принадлежать к H_q и, вследствие (30) и (38),

$$\varphi(\theta) - S_{n_k}(\varphi, \theta)| > \left(\frac{4}{\pi^2} - 4\eta_{n_k}\right)\frac{\lg n_k}{n_k}|q(\theta)| + O\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Этим, принимая во внимание, что в наших рассуждениях

$$\eta_{n_k} \to 0, \quad \eta_{n_k}\lg n_k |q(\theta)| \to \infty,$$

лемма 2 доказана.

Примечание. Пользуюсь случаем отметить две опечатки, которые вкрались в моей предыдущей статье «Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем», опубликованной в этом журнале 10 (1946), 207—256:

a) формула (2.4) на самом деле выглядит так

$$|F(x)| = \|F\|\, r(x, L). \tag{2.4}$$

b) На стр. 215, строка 10-я снизу знак $\sup\limits_{g}$ должен быть заменен знаком $\sup\limits_{g}\sup\limits_{u}$

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР.

Поступило 18. 1. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций посредством тригонометрических сумм, Доклады Ак. Наук СССР, 15, 1937.

[2] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polinômes trigonométrique, Bull. de Sc. Math. LXI (1937), 209—224.

[3] Favard J., Sur l'approximation des fonctions, Bull. de Sc. Math., LXII (1938) 338—351.

[4] Kolmogoroff A., Zur Grössenordnung des Restgliedes Fouriersches Reihen differenzierbarer Funktionen, Annals of Math. vol. 36, 1935.

[5] Никольский С., Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, многочленами, Доклады Ак. Наук СССР, XIII, № 3, 1944.

[6] Никольский С., Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами, Труды Матем. института Ак. Наук СССР, XV, 1945.

[7] Никольский С., О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица, Доклады Ак. Наук СССР, LII, № 1 (1946).

S. NIKOLSKY. ON THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS SATISFYING LIPSCHITZ'S CONDITIONS BY POLYNOMIALS

SUMMARY

§ 1. In this paper we give detailed proofs of the results announced in (7). We revealed there the connections between these results as well as between these results and those of the other authors (see References). Therefore we formulate here only the theorems and outline, in some cases, their proofs using the formulae in the Russian text.

Let MH be the class of functions $f(x)$ satisfying Lipschitz's condition with the constant M

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant M|x'-x''|$$

on the segment $-1 \leqslant x \leqslant 1$ and let $E_n(f)$ denote the best approximation of f on this segment by polynomials

$$Q_{n-1}(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

of degree $n-1$. Denote by

$$\mathscr{E}_{E_n}(MH)=\sup_{f\in MH} E_n(f)$$

the least upper bound of $E_n(f)$ on the class of functions MH.

§ 2. THEOREM 1. *The following equality is valid*

$$\mathscr{E}_{E_n}(MH)=\frac{M\pi}{2n}-\varepsilon_n, \tag{2.6}$$

where $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n=O\left(\frac{1}{n\lg n}\right)$. *It is attained (asymptotically), in case* $M=1$ *and* n *is even, by the function,* $f_n(x)\in H$ $(1\cdot H=H)$ *whose graph is a broken line with* $n+1$ *vertices with abscisses being zeros of the Tchebycheff polynomial* $\cos n \arccos x$ *of degree* n *together with the point* $x=0$.

The links of the broken line have slopes equal to 1 *in absolute magnitude and have alternating signs.*

The inequality

$$\mathscr{E}_{E_n}(MH)<\frac{M\pi}{2n}$$

or $\varepsilon_n>0$ follows from the fact that the functions $f(\cos\theta)$, where $f\in MH$, are functions of period 2π whose derivatives do not exceed M in absolute magnitude and for such functions the inequality (1.2) * holds, in which $\overline{E}_n(f)$ denotes the best approximation of f by trigonometrical polynomials of the $(n-1)$th order.

On the other hand, consider the interpolating polynomial $P_n(f,x)$ of degree $n-1$ (see (2.7)) which coincides with $f(x)$ at the zeros $x_k=x_k^{(n)}=\cos\theta_k^{(n)}$ of the Tchebycheff polynomial $\cos n\arccos x$. For $n=2m$ its value at $x=0$ is given by the formula (2.8). It is essential here that the product $(-1)^{k+m}\operatorname{tg}\theta_k^{(n)}$ changes its sign successively as k ranges from 1 to m and from $m+1$ to n, while at $k=m$ and $k=m+1$ this product is positive.

* Here and henceforth we refer to formulae in the Russian text.

We also note the equality (2.9).

Let $Q_{n-1}(x)$ be the best polynomial of degree $n-1$ for the function f at the system of points consisting of the abscisses $x_k^{(n)}=\cos\theta_k$ and of the point $x=0$ and let $E_n^*(f)=E_n^*(f;\ x_0^{(n)},\dots,x_m^{(n)},\ 0,\ x_{m+1}^{(n)},\dots,x_n^{(n)})$ be the corresponding best approximation. Then by Tchebycheff's theorem, $f(x)-Q_{n-1}(x)$ changes its sign successively at the points $x_0^{(n)},\dots,x_m^{(n)},\ 0,\ x_{m+1}^{(n)},\dots,x_n^{(n)}$ and its values at these points equal $E_n^*(f)$ in absolute magnitude.

By what has been just said, we obtain the equality (2.10), the right side of which attains its maximum on H at the function $f_n(x)$ entering the formulation of the theorem (see [3]). This function is defined by (2.11) at the points $x=x_k^{(n)}$, $x=0$ and is linear on the intervals between these points.

The equality $\varepsilon_n=O\left(\frac{1}{n\lg n}\right)$ follows from (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13).

§ 3. THEOREM 2. *For every function* $f\in MH$

$$\limsup_{n\to\infty} nE_n(f)\leqslant\frac{M\pi}{2}. \tag{3.1}$$

There exists a function $f\in H$, *for which the left side of* (3.1) *equals the right side.*

The inequality (3.1) by itself follows from theorem 1.

To construct the function $f\in H$ mentioned in theorem 2, introduce the functionals $I_n(a,\varphi)$ and $I_n^*(a)$ $(a>0)$ by means of (3.3), (3.4), (3.2), where φ is a function and the accent at $\sum\limits_{0<x_k^{(n)}<a}'$ shows that the sum is to be not extended over the greatest $(=m)$ and least indices k, for which $0<x_k^{(n)}<a$.

Choose a sequence of positive numbers η_n so as to have $\eta_n\to 0$, $\eta_n\lg n\to\infty$ as $n\to\infty$.

Then one can see that for an arbitrary positive $a<1$ the inequalities (3.6) and (3.7) hold for all $n>N$, provided $N=N(a)$ is sufficiently large, where φ is a function satisfying Lipschitz's condition on the segment $a\leqslant x\leqslant 1$.

The required function f can be determined by a decreasing sequence of numbers

$$1=a_0>a_1>a_2>\dots \tag{3.8}$$

tending to zero and by increasing sequence of indices

$$n_1<n_2<n_3<\dots \tag{3.9}$$

defined reccurently. Namely, suppose a_ν and n_ν are already defined for $\nu=1,2,\dots,i-1$ and the function $f(x)$ is already defined on the interval $a_{i-1}\leqslant x\leqslant 1$; $f(x)$ is supposed to satisfy Lipschitz's condition with

the constant equal to 1 on this interval and to be zero at the point $x=a_{i-1}$. Take an even $n_i > n_{i-1}$ sufficiently large that the inequalities (3.10) be fulfilled simultaneously and let $x_{l_i}^{(n_i)}$ be the greatest $x_k^{(n_i)}$ which does not exceed a_{i-1}. We put a_i and a_i' to be representively the least and the greatest zero of the function $f_{n_i}(x)$ lying in the interval $x_{m_i}^{(n_i)} < x < x_{l_i}^{(n_i)}$ $(2m_i = n_i)$ and define $f(x)$ on the segment $a_i \leqslant x \leqslant a_{i-1}$ by the equality (3.11).

It is evident that $f(x)$ satisfies Lipschitz's condition with the constant equal to 1 on the interval $a_i \leqslant x < 1$ and $f(a_i)=0$.

Thus the sequences (3.8) and (3.9) are defined and, consequently, $f(x)$ is defined on $0 < x \leqslant 1$. We extend $f(x)$ to the interval $-1 \leqslant x < 0$ so as $f(x)$ be even and put $f(0)=0$. It is evident that f belongs to H and, by (3.3), (3.10) and (3.11), we shall have (3.12), which implies, in virtue of (3.13), (3.14), (3.15), the equality (3.15).

§ 4. Let $f \in H$,

$$U_n(\eta^{(n)}; f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k^{(n)} a_k P_k(x),$$

$$\eta_k^{(n)} = k\lambda_k = \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n},$$

$$P_k(x) = \cos k \arccos x, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) P_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

THEOREM 3. *The inequality*

$$\mathcal{E}_n(\eta^{(n)}; MH, x) = \sup_{f \in MH} |f(x) - U_n(\eta^{(n)}; f, x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\pi}{2n} \sqrt{1-x^2} + |x| O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right) \tag{4.1}$$

holds uniformly in x on the interval $(-1, +1)$.

For $x=1$ O cannot be replaced by o in (4.1).

The substitution $x = \cos\theta$ reduced the problem to the relations (4.2), (4.3), (4.4). The integral defining I_n' in (4.3) occurs in the papers ([1]), ([2]). Calculation of this integral is based on the fact (which is also used for estimating I_n'') that the function

$$K(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin kt,$$

where

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

vanishes and changes the sign at the points $t_k = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ and only at these points. This gives (4.5).

The estimation of I_n'' is carried out by means of (4.6), (4.7), (4.8) with the use of the development of the function sign $\sin nt$ $(0 < t < \pi)$ into cosines.

§ 5. Let

$$f \in MH,$$

$$U_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k P_k(x),$$

where a_k and $P_k(x)$ are defined as in the preceding paragraph.

THEOREM 4. *The asymptotic equality*

$$\sup_{f \in MH} |f(x) - U_n(f, x)| = \frac{4M}{\pi^2} \frac{\lg n}{n} \sqrt{1-x^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.1}$$

holds uniformly in x on the segment $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Using the substitution $x = \cos\theta$ it is easy to verify that theorem 4 follows from lemma 1 if we put $q(\theta) = \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$.

LEMMA 1. *If $S_n(\varphi, \theta)$ is the value of the Fourier sum of the $(n-1)$th order at the point θ, then*

$$\sup_{\varphi \in H_q} |\varphi(\theta) - S_n(\varphi, \theta)| = \frac{4}{\pi^2} |q(\theta)| \frac{\lg n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.7}$$

Here $q(\theta)$ is an odd function of period 2π satisfying Lipschitz's condition and the condition $q(0) = q(\pi) = 0$ and H_q is the class of functions $\varphi(t)$, everyone of which is an indefinite integral of its derivative $\varphi'(t)$ which is supposed to be represented in the form

$$\varphi'(t) = \psi(t)\, q(t), \tag{5.6}$$

where $\psi(t)$ is an arbitrary even function of period 2π satisfying the inequality

$$|\psi(\theta)| \leqslant 1. \tag{5.3}$$

For the difference $S_n(\varphi, \theta) - \varphi(\theta)$ by integrating by parts the Fourier coefficients of the function $\varphi \in H_q$ and by Kolmogoroff's estimates (5.9), (5.10) (see ([4])), we obtain (5.11), which holds uniformly in ψ and θ, where ψ are the above functions.

From (5.11) follow, in virtue of (5.12), the equalities (5.13), (5.14) and finally (5.15), which, being valid uniformly in ψ and θ, implies the inequality (5.16). The latter becomes an equality for the even function $\psi_{n\theta}(t)$ of period 2π defined on the whole real axis so as to satisfy the relation

$$\psi_{n\theta}(t + \theta) = \operatorname{sign}\left\{ q(\theta) \frac{\cos\frac{2n-1}{2} t}{2\sin\frac{t}{2}} \right\}$$

on the interval $-\theta < t < \pi - \theta$.

THEOREM 5. *For every x in the interval $(-1, +1)$ there exists a function f in MH (that depends on x, but not on n), for which*

$$|f(x) - U_n(f, x)| > \frac{4M}{\pi^2} \frac{\ln n}{n} \sqrt{1-x^2}\,(1 - \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0$$

as n runs through a sequence of positive integers.

This theorem, together with (5.7), imply the inequality

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lg n} | f(x) - U_n(f, x) | \leqslant \frac{4M}{\pi^2} \sqrt{1-x^2}$$

which becomes an equality for a certain $f \in MH$.

Theorem 5 is a corollary of the following lemma, when $q(\theta) = \sin\theta$.

LEMMA 2. *For every value of* θ *there exists a function* φ *belonging to* H_q *(which depends on* θ*, but not on* n*), for which*

$$|\varphi(\theta) - S_n(\varphi, \theta)| > \frac{4}{\pi^2} \frac{\lg n}{n} |q(\theta)| (1 - \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0 \tag{5.17}$$

as n *runs through a sequence of positive integers.*

The function φ corresponds, by (5.6), to the even function $\psi(t) = \psi_0(t)$ of period 2π defined in the equality $\psi(t+\theta) = \nu(t)$ $(-\theta < t < \pi - \theta)$. Thereby $\nu(t)$ is defined by (5.20) and (5.19), where

$$K_n(t) = \frac{\cos \frac{2n-1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

$$0 < a_0 < \min\{\theta, \pi - \theta\}, \quad n_0 = 1;$$

and the numbers a_k and n_k are defined by induction so as to have (5.23), (5.24) and (5.25), as soon as a_{k-1} and n_{k-1} are defined, with $\Phi_n^*(a)$ defined by (5.21); η_n form a sequence of positive numbers given before which satisfies the conditions $\eta_n \to 0$, $\eta_n \lg n \to \infty$.

Note. We use she opportunity to correct two misprintes in my previuous paper «Approximation of functions in the mean by trigonometrical polynomials» (this Bull., 10 (1946), 207—256).

a) Formula (2.4) is to be substituted by

$$F(x) | = \| F \|_r (x, L). \tag{2.4}$$

b) The symbol $\sup_g$ on page 215, line 10 from below, is to be substituted by $\sup_g \sup_u$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 323—358 Série mathématique

Б. И. СЕГАЛ

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Приводится решение некоторых пространственных задач теории потенциала, встречающихся в гидродинамике, и подробно рассмотрены конкретные примеры, иллюстрирующие метод.

Рассматриваемые в настоящей работе пространственные задачи теории потенциала связаны, главным образом, с вопросами о движении жидкости в пористой среде. Эти вопросы имеют практическое значение для расчета фильтрации нефти, для исследования движения грунтовых вод в связи с некоторыми системами ирригации и др.

Многочисленные работы, исследующие вопросы о движении жидкости в пористой среде, посвящены почти исключительно плоским задачам. Однако многие практические вопросы приводят к существенно пространственным задачам. Сюда, прежде всего, относятся такие вопросы, как исследование фильтрации в нефтяном пласте со скважинами, проходящими лишь частично через толщу пласта (так называемые *несовершенные скважины*), а также рассмотрение движения грунтовых вод при наличии колодцев, не достигающих непроницаемой нижней границы пористой среды. В работе [1] рассматривается пространственная задача теории потенциала для случая единственной скважины *

Ниже мы предполагаем рассмотреть некоторые пространственные задачи теории потенциала в применении к вопросам взаимного влияния (интерференции) ряда скважин при установившемся движении однородной жидкости в однородной и изотропной пористой среде.

§ 1. Пусть k означает коэффициент фильтрации, $p = p(x, y, z)$ — давление в данной точке (x, y, z), ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести. Тогда для пьезометрического напора H имеем

$$H = \frac{p}{\rho g} - z \tag{1.1}$$

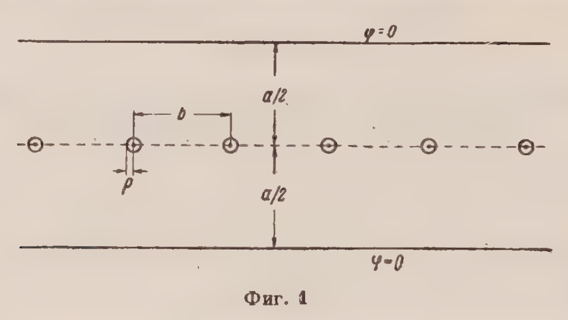
* См. также главу V в [2].

и, как известно, потенциал скорости фильтрации

$$\varphi = -kH + \varphi_0 \tag{1.2}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа *.

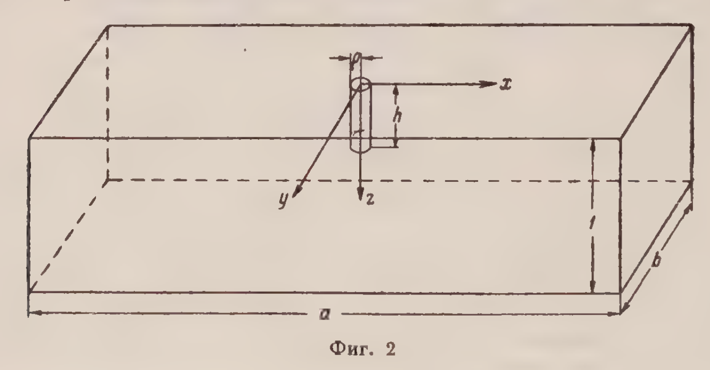
Рассмотрим область, представляющую собой полосу бесконечной длины. Пусть эта область имеет постоянную глубину, которую мы для удобства примем за единицу измерения длин, и постоянную ширину a. Предполагается, что верхняя и нижняя грани нашей области представ-



Фиг. 1

ляют собою непроницаемые границы. Мы будем заниматься рассмотрением следующих задач.

I. Бесконечный ряд вертикальных скважин расположен в середине полосы, представляющей рассматриваемую область (см. фиг. 1, на



Фиг. 2

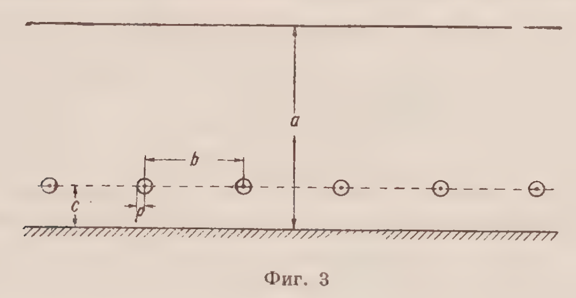
которой область изображена в плане). Скважины равноудалены друг от друга, причем расстояние между осями двух соседних скважин равно b. Предполагается, что каждая скважина имеет форму прямого кругового цилиндра с радиусом основания ρ и с высотой $h\,(0 < h < 1)$ и что дно цилиндра имеет форму полусферы радиуса ρ.

* См., например, главу III в (²). При этом следует иметь в виду соотношение

$$k_1 = \frac{\rho g k}{\mu},$$

где k_1 — коэффициент проницаемости, а μ — вязкость жидкости.

Пусть на вертикальных гранях рассматриваемой области потенциал φ имеет постоянное значение, равное нулю. В каждой точке поверхности скважины потенциал φ имеет заданное значение; мы ограничимся рассмотрением случая, когда на поверхности скважины потенциал имеет постоянное значение, хотя излагаемый нами метод может быть применен и к рассмотрению более общего случая, когда значение потенциала



Фиг. 3

φ на поверхности скважины зависит от глубины точек поверхности скважины.

При этих предположениях требуется определить значение потенциала в любой точке рассматриваемой области и найти расход жидкости, протекающей через скважину (дебит скважины).

Легко видеть, что рассмотрение вопроса о распределении потенциала в указанной бесконечной области сводится к смешанной задаче Дирихле-Неймана для области прямоугольного параллелепипеда с цилиндрическим вырезом (фиг. 2). Мы имеем при этом следующие граничные условия:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ \varphi=0 \ \text{ при } \ x=\pm\frac{a}{2}, \\ 2)\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \ \text{ при } \ y=\pm\frac{b}{2}, \\ 3)\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \ \text{ при } \ z=0, \quad x^2+y^2\geqslant\rho^2 \text{ и при } z=1, \\ 4)\ \ \varphi=\text{const} \text{ при } x^2+y^2=\rho^2, \quad z\leqslant h \text{ и при} \\ \qquad\qquad z=h+\sqrt{\rho^2-x^2-y^2}. \end{array}\right\} \quad (1.3)$$

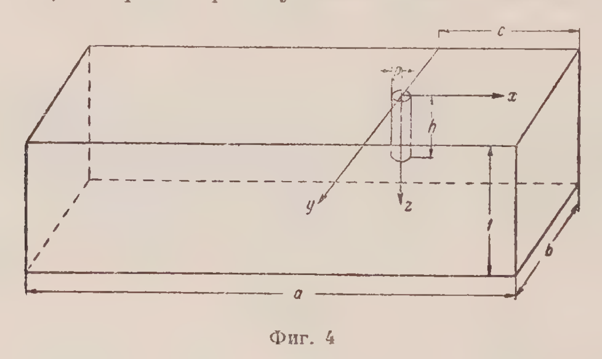
II. На одной из вертикальных граней указанной области потенциал φ имеет постоянное значение, равное нулю. Вторая вертикальная грань представляет собой непроницаемую границу нашей области. Бесконечный ряд вертикальных скважин расположен параллельно второй (непроницаемой) вертикальной грани на расстоянии c от этой грани (см. фиг. 3, на которой область изображена в плане). При этом предполагается, что $1<c<\frac{a}{2}$, так как именно этот случай имеет практический интерес. Другие условия остаются теми же, что и в задаче I.

Получается опять смешанная задача Дирихле-Неймана для области прямоугольного параллелепипеда с цилиндрическим вырезом (фиг. 4),

причем граничные условия представляются в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad \varphi=0 \quad \text{при} \quad x=c-a,\\ &2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad x=c,\\ &3)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=\pm\frac{b}{2},\\ &4)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad x^2+y^2\geqslant\rho^2 \ \text{и при} \ z=1,\\ &5)\quad \varphi=\text{const} \ \text{при} \ x^2+y^2=\rho^2, \quad z\leqslant h \ \text{и при}\\ &\qquad z=h+\sqrt{\rho^2-x^2-y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Соответствующие этим задачам плоские задачи рассмотрены в § 7 гл. III книги (3) и в гл. IX книги (2). Мы ограничиваемся рассмотрением изложенных двух задач, так как решение других аналогичных (например, задач, соответствующих плоским задачам, изложенным в гл. IX книги (2)) не представляет никаких принципиальных затруднений после того, как рассмотрены указанные выше задачи.



Фиг. 4

§ 2. Для дальнейшего нам необходимо найти выражение для потенциала пространственной решетки, образованной источниками и стоками. Эта задача решалась различными авторами, причем наиболее общий и удобный для вычислений результат получен в этом направлении П. Эвальдом (4), исследования которого представляют развитие идей Римана.

Имея в виду воспользоваться этим результатом, мы изложим вывод соответствующей формулы для прямоугольных решеток, так как только такие решетки будут нами применяться при решении указанных выше задач.

Рассмотрим в пространстве систему точек M_l с координатами $(l_1\alpha,\ l_2\beta,\ l_3\gamma)$, где α, β и γ означают постоянные положительные числа, а l_1, l_2 и l_3 независимо друг от друга пробегают целые значения. Эти точки являются вершинами одинаковых прямоугольных параллелепипедов с ребрами α, β и γ, параллельными осям координат. Система этих параллелепипедов заполняет все пространство.

Основным параллелепипедом этой системы мы будем называть тот параллелепипед, координатам вершин которого соответствуют значения l_1, l_2, l_3, равные нулю или единице.

Пусть в основном параллелепипеде расположена группа источников и стоков, общее число которых составляет N. Обозначим координаты этих особых точек через

$$(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) \qquad n=1, \ldots, N,$$

а мощности их — соответственно через q_n. Допустим, что указанная группа источников и стоков одинаково повторяется в каждом параллелепипеде. Тогда мы получаем пространственную решетку, образуемую точками

$$M_{l_n}(l_1\alpha+\xi_n,\ l_2\beta+\eta_n,\ l_3\gamma+\zeta_n),$$

которую можно рассматривать как результат наложения N обыкновенных прямоугольных решеток.

Для потенциала $K(x, y, z)$ этой решетки в точке (x, y, z) пространства имеем

$$K=\frac{1}{4\pi}\sum_{l}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{R_{ln}}, \tag{2.1}$$

где

$$R_{ln}=\sqrt{(l_1\alpha+\xi_n-x)^2+(l_2\beta+\eta_n-y)^2+(l_3\gamma+\zeta_n-z)^2}, \tag{2.2}$$

а $\sum\limits_{l}$ означает суммирование по l_1, l_2, l_3, пробегающим независимо друг от друга целые числа от $-\infty$ до $+\infty$.

Ряд (2.1) может сходиться лишь условно. Будем поэтому сперва отыскивать величину

$$K_\lambda=\frac{1}{4\pi}\sum_{l}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n e^{-\lambda R_{ln}}}{R_{ln}}=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{N}q_n S_{n\lambda}, \quad S_{n\lambda}=\sum_{l}\frac{e^{-\lambda R_{ln}}}{R_{ln}} \tag{2.3}$$

и затем перейдем к пределу при λ стремящемся к нулю. Это означает, что мы сперва находим потенциал искаженной решетки, получаемой из данной решетки, если предположить, что мощности источников и стоков, по мере их удаления от рассматриваемой точки (x, y, z), убывают по показательному закону. В таком случае ряд сходится абсолютно, как бы мало ни было положительное число λ. Но искаженная таким образом решетка переходит в данную решетку при λ стремящемся к нулю.

Займемся преобразованием суммы $S_{n\lambda}$. Известно, что

$$\int_0^\infty e^{-u^2-\frac{A}{u^2}}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2A}.$$

Введя здесь подстановку $u=Rt$ и полагая $A=\frac{\lambda R}{2}$, находим

$$\frac{e^{-\lambda R}}{R}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-R^2t^2-\frac{\lambda}{4t^2}}\,dt.$$

При помощи этого равенства получаем

$$S_{n\lambda} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{l} \int_{0}^{\infty} e^{-R_{ln}^2 t^2 - \frac{\lambda^2}{4t^2}}\, dt.$$

Заметив, что здесь может быть изменен порядок суммирования и интегрирования, получим

$$S_{n\lambda} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} e^{-t^2[(l_1\alpha+\xi_n-x)^2+(l_2\beta+\eta_n-y)^2+(l_3\gamma+\zeta_n-z)^2]-\frac{\lambda^2}{4t^2}}\, dt, \quad (2.4)$$

или

$$S_{n\lambda} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} s_1 s_2 s_3 e^{-\frac{\lambda^2}{4t^2}}\, dt,$$

где

$$s_1 = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} e^{-t^2(l_1\alpha+\xi_n-x)^2},$$

$$s_2 = \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} e^{-t^2(l_2\beta+\eta_n-y)^2},$$

$$s_3 = \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} e^{-t^2(l_3\gamma+\zeta_n-z)^2}.$$

К каждой из сумм s_1, s_2, s_3 применяем мнимое преобразование Якоби для ϑ-функций, выражаемое равенством *

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{l^2\pi i\tau+2liu} = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\frac{(u-l\pi)^2}{\pi i\tau}},$$

причем для $\sqrt{-i\tau}$ берется то значение, для которого вещественная часть положительна.

Полагая

$$\tau = -\frac{\alpha^2 t^2}{\pi i}, \quad u = (\xi_n - x)\,\alpha t^2 i,$$

находим

$$s_1 = e^{-t^2(\xi_n-x)^2} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} e^{-l_1^2\alpha^2 t^2 - 2l_1(\xi_n-x)\alpha t^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha t} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 l_1^2}{\alpha^2 t^2}+2(\xi_n-x)\frac{\pi l_1}{\alpha} i}$$

и аналогично

$$s_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta t} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 l_2^2}{\beta^2 t^2}+2(\eta_n-y)\frac{\pi l_2}{\beta} i},$$

$$s_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma t} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 l_3^2}{\gamma^2 t^2}+2(\zeta_n-z)\frac{\pi l_3}{\gamma} i}.$$

---

* См. § 21.51 в книге ([5]).

Поэтому

$$S_{n\lambda}=\frac{2\pi}{\alpha\beta\gamma}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^3}\sum_l e^{-\frac{\pi^2}{t^2}\left(\frac{l_1^2}{\alpha^2}+\frac{l_2^2}{\beta^2}+\frac{l_3^2}{\gamma^2}\right)+2\pi i\left[\frac{(\xi_n-x)l_1}{\alpha}+\frac{(\eta_n-y)l_2}{\beta}+\frac{(\zeta_n-z)l_3}{\gamma}\right]-\frac{\lambda^2}{4t^2}}dt. \qquad (2.5)$$

Мы получили, таким образом, представление суммы $S_{n\lambda}$ при помощи двух различных интегралов (2.4) и (2.5), причем подинтегральные функции в обоих интегралах равны между собою для любого значения t. Мы можем поэтому разбить промежуток интегрирования любым положительным числом T и в промежутке от 0 до T взять представление подинтегральной функции в виде (2.5), а в промежутке от T до ∞ — в виде (2.4). Если еще ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} h_l=\frac{l_1^2}{\alpha^2}+\frac{l_2^2}{\beta^2}+\frac{l_3^2}{\gamma^2}, \quad k_l=\frac{xl_1}{\alpha}+\frac{yl_2}{\beta}+\frac{zl_3}{\gamma}, \\ k_{ln}=\frac{\xi_n l_1}{\alpha}+\frac{\eta_n l_2}{\beta}+\frac{\zeta_n l_3}{\gamma}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

то получим

$$S_{n\lambda}=\frac{2\pi}{\alpha\beta\gamma}\int\limits_0^T \frac{1}{t^3}\sum_l e^{-\frac{4\pi^2 h_l+\lambda^2}{4t^2}+2\pi i(k_{ln}-k_l)}dt+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_T^\infty \sum_l e^{-R_{ln}^2 t^2-\frac{\lambda^2}{4t^2}}dt,$$

где $\sum\limits_l$ попрежнему означает суммирование по l_1, l_2, l_3 независимо друг от друга пробегающим целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Применяя к первому из этих интегралов подстановку $\frac{1}{t^2}=\tau$ и изменив в обоих интегралах порядок суммирования и интегрирования, найдем

$$S_{n\lambda}=\frac{4\pi}{\alpha\beta\gamma}\sum_l \frac{e^{-\frac{4\pi^2 h_l+\lambda^2}{4T^2}+2\pi i(k_{ln}-k_l)}}{4\pi^2 h_l+\lambda^2}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_l\int\limits_T^\infty e^{-R_{ln}^2 t^2-\frac{\lambda^2}{4t^2}}dt.$$

Подставив это значение $S_{n\lambda}$ в (2.3), получим

$$K_\lambda=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\sum_l\sum_{n=1}^N q_n\frac{e^{-\frac{4\pi^2 h_l+\lambda^2}{4T^2}+2\pi i(k_{ln}-k_l)}}{4\pi^2 h_l+\lambda^2}+\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\sum_l\sum_{n=1}^N q_n\int\limits_T^\infty e^{-R_{ln}^2 t^2-\frac{\lambda^2}{4t^2}}dt,$$

или, введя так называемый *структурный множитель*

$$\sigma_l=\sum_{n=1}^N q_n e^{2\pi i k_{ln}} \qquad (2.7)$$

нашей решетки и переходя к пределу при $\lambda\to 0$, найдем

$$K=\frac{1}{4\pi^2\alpha\beta\gamma}\sum_l\frac{\sigma_l}{h_l}e^{-\frac{\pi^2 h_l}{T^2}-2\pi i k_l}+\frac{1}{4\pi}\sum_l\sum_{n=1}^N q_n\frac{1-\operatorname{erf}(TR_{ln})}{R_{ln}}, \qquad (2.8)$$

где

$$\operatorname{erf}(u)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^u e^{-t^2}dt,$$

σ_l, h_l, k_l, k_{ln} и R_{ln} определены формулами (2.7), (2.6) и (2.2), а T означает произвольное положительное число.

Заметим, что формула (2.8), представляющая собой окончательное выражение для пространственной решетки, имеет смысл лишь в том случае, когда решетка является *нейтральной*, т. е. когда выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{N} q_n = 0.$$

Действительно, в этом случае имеем $\sigma_0 = 0$, вследствие чего исчезает тот член первой из сумм правой части (2.8), который обращается в бесконечность при $h_l = 0$, т. е. при $l_1 = l_2 = l_3 = 0$.

При малых значениях T первая из сумм правой части (2.8) сходится быстро, а вторая — медленно; при больших значениях T первая сумма сходится медленно, а вторая сходится быстро. Надлежащим выбором T мы можем достигнуть достаточно быстрой сходимости обеих сумм в формуле (2.8).

§ 3. Займемся сначала первой из формулированных выше задач (§ 1). С этой целью построим функцию Грина для прямоугольного параллелепипеда (фиг. 2) с единичным стоком в точке $(0, 0, \zeta)$ и граничными условиями 1), 2), 3), указанными в (1.3).

Рассмотрим систему взаимно ортогональных плоскостей

$$x = \left(l_1 + \frac{1}{2}\right) a, \quad y = \left(l_2 + \frac{1}{2}\right) b, \quad z = l_3,$$

параллельных граням рассматриваемого параллелепипеда, где l_1, l_2 и l_3 независимо друг от друга пробегают все целые числа от $-\infty$ до $+\infty$. Отразим точку $(0, 0, \zeta)$ повторно в этих плоскостях; в результате получаем систему точек

$$(l_1 a, l_2 b, 2l_3 \pm \zeta),$$

в которых мы поместим единичные стоки или источники, смотря по тому, является ли l_1 числом четным или нечетным. Потенциал построенной таким образом пространственной решетки, составленной из стоков и источников, выражает, как легко видеть, искомую функцию Грина

$$G = G(x; y, z; \zeta).$$

Для нахождения G можно воспользоваться формулой (2.8). При этом мы полагаем

$$\alpha = 2a, \quad \beta = b, \quad \gamma = 2.$$

В основном прямоугольнике помещаем два единичных стока в точках

$$(0, 0, \zeta) \text{ и } (0, 0, 2-\zeta)$$

и два единичных источника в точках

$$(a, 0, \zeta) \text{ и } (a, 0, 2-\zeta).$$

Тогда

$$q_1 = q_2 = 1, \quad q_3 = q_4 = -1,$$

и по формулам (2.6) находим

$$h_l = \frac{1}{4}\left(\frac{l_1^2}{a^2}+\frac{4l_2^2}{b^2}+l_3^2\right), \quad k_l = \frac{xl_1}{2a}+\frac{yl_2}{b}+\frac{zl_3}{2},$$

$$k_{l1}=\frac{\zeta l_3}{2}, \quad k_{l2}=\left(1-\frac{\zeta}{2}\right)l_3, \quad k_{l3}=\frac{l_1}{2}+\frac{\zeta l_3}{2}, \quad k_{l4}=\frac{l_1}{2}+\left(1-\frac{\zeta}{2}\right)l_3.$$

По формуле (2.7) получаем выражение структурного множителя

$$\sigma_l = e^{\pi\zeta l_3 i}+e^{-\pi\zeta l_3 i}-e^{\pi(l_1+\zeta l_3)i}-e^{\pi(l_1-\zeta l_3)i}=$$

$$=2(1-e^{\pi l_1 i})\cos l_3\pi\zeta = -4ie^{\frac{\pi}{2}l_1 i}\sin l_1\frac{\pi}{2}\cos l_3\pi\zeta.$$

С помощью этих значений мы находим из формулы (2.8) искомую функцию Грина в виде

$$G = G_1 + G_2, \tag{3.1}$$

где

$$G_1 = \frac{1}{4\pi^2 abi}\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty}\frac{1}{h_l}e^{-\frac{\pi^2 h_l}{T^2}-2\pi i\left(\frac{xl_1}{2a}+\frac{yl_2}{b}+\frac{zl_3}{2}\right)+\frac{\pi}{2}l_1 i}\sin l_1\frac{\pi}{2}\cos l_3\pi\zeta,$$

$$G_2 = \frac{1}{4\pi}\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{4} q_n\frac{1-\operatorname{erf}(TR_{ln})}{R_{ln}}.$$

Займемся сперва преобразованием суммы G_1. Имеем

$$G_1 = \frac{1}{2\pi^2 ab}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{\infty}\frac{1}{h_l}e^{-\frac{\pi^2 h_l}{T^2}-2\pi i\left(\frac{yl_2}{b}+\frac{zl_3}{2}\right)}\sin l_1\frac{\pi}{2}\sin l_1\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)\cdot$$

$$\cdot\cos l_3\pi\zeta = \frac{1}{\pi^2 ab}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'\frac{1}{h_l}e^{-\frac{\pi^2 h_l}{T^2}-\pi i z l_3}\sin l_1\frac{\pi}{2}\sin l_1\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)\cdot$$

$$\cdot\cos 2l_2\pi\frac{y}{b}\cos l_3\pi\zeta = \frac{2}{\pi^2 ab}\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'\sum_{l_3=0}^{\infty}{}'e^{-\frac{\pi^2 h_l}{T^2}}\sin l_1\frac{\pi}{2}\sin l_1\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)\cdot$$

$$\cos 2l_2\pi\frac{y}{b}\cos l_3\pi z\cos l_3\pi\zeta,$$

причем штрихи в суммах означают, что слагаемые, соответствующие $l_2=0$ или $l_3=0$, умножаются на $\frac{1}{2}$, а слагаемые, соответствующие $l_2=l_3=0$, умножаются на $\frac{1}{4}$. Последнее выражение мы можем переписать в виде

$$G_1 = \frac{8}{\pi^2 ab}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'\sum_{l_3=0}^{\infty}{}'\frac{e^{-\frac{\pi^2 H_l}{4T^2}}}{H_l}\cos(2l_1+1)\frac{\pi x}{a}\cos 2l_2\frac{\pi y}{b}\cos l_3\pi z\cos l_3\pi\zeta, \tag{3.2}$$

где

$$H_l = \frac{(2l_1+1)^2}{a^2}+\frac{4l_2^2}{b^2}+l_3^2. \tag{3.3}$$

Для преобразования G_2 заметим, что

$$R_{l1} = \sqrt{(2l_1 a - x)^2 + (l_2 b - y)^2 + (2l_3+\zeta-z)^2},$$

$$R_{l2} = \sqrt{(2l_1 a - x)^2 + (l_2 b - y)^2 + (2l_3+2-\zeta-z)^2},$$

$$R_{l_3}=\sqrt{((2l_1+1)a-x)^2+(l_2 b-y)^2+(2l_3+\zeta-z)^2},$$

$$R_{l_4}=\sqrt{((2l_1+1)a-x)^2+(l_2 b-y)^2+(2l_3+2-\zeta-z)^2},$$

причем R_{l1} и R_{l2} соответствуют значения $q_n=1$, а R_{l3} и R_{l4} соответствуют значения $q_n=-1$. Поэтому мы можем написать

$$G_2=\frac{1}{4\pi}\sum_l(-1)^{l_1}\left\{\frac{1-\operatorname{erf}[T\sqrt{(l_1 a-x)^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2}]}{\sqrt{(l_1 a-x)^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\operatorname{erf}[T\sqrt{(l_1 a-x)^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2}]}{\sqrt{(l_1 a-x)^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2}}\right\} \tag{3.4}$$

§ 4. Надлежащим выбором T можно заменить найденное нами точное выражение для G приближенным выражением, достаточным для всех приложений, встречающихся на практике.

В самом деле, если взять $T\leqslant\frac{1}{2}$, то члены в сумме (3.2) для G_1, соответствующие $l_3\geqslant 1$, не будут превосходить $0{,}00005\cdot\frac{1}{ab}$, и поэтому можно ограничиться в этой сумме членами, соответствующими $l_3=0$. Трехкратная сумма (3.2) заменяется, таким образом, двухкратной:

$$G_1=\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'\frac{e^{-\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T^2}}}{H_{l_1,l_2}}\cos(2l_1+1)\frac{\pi x}{a}\cos 2l_2\frac{\pi y}{b}; \tag{4.1}$$

где

$$H_{l_1,l_2}=\frac{(2l_1+1)^2}{a^2}+\frac{4l_2^2}{b^2}. \tag{4.2}$$

Заметив, далее, что во всех встречающихся на практике случаях $a>4\pi$, положим $T\geqslant\frac{2\pi}{a}$. Тогда в выражении для G_2 можно ограничиться слагаемыми, соответствующими $l_1=0$, так как $|x|\leqslant\frac{a}{2}$ и слагаемые суммы (3.4) при $l_1\geqslant 1$ не будут превосходить

$$1-\operatorname{erf}\left(T\frac{a}{2}\right)\leqslant 1-\operatorname{erf}(\pi)<0{,}00001.$$

Мы получаем поэтому для G_2 следующее выражение:

$$G_2=\frac{1}{4\pi}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1-\operatorname{erf}[T\sqrt{x^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2}]}{\sqrt{x^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\operatorname{erf}[T\sqrt{x^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2}]}{\sqrt{x^2+(l_2 b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2}}\right\}. \tag{4.3}$$

§ 5. Пусть теперь вдоль оси z от $z=0$ до $z=h$ помещена линия стока, мощность которой характеризуется функцией $q=q(z)$. Это значит, что в точке $z=\zeta\ (0\leqslant\zeta\leqslant h)$ помещен элемент стока с мощностью $qd\zeta$, которому соответствует элемент потенциала

$$d\Phi=q(\zeta)\,G\,d\zeta.$$

Потенциал, соответствующий всей линии стока от $\zeta=0$ до $\zeta=h$, получится в виде

$$\Phi=\int_0^h d\Phi=\int_0^h q(\zeta)\,G d\zeta. \tag{5.1}$$

Решение нашей задачи сводится теперь к определению функции $q(\zeta)$ так, чтобы было выполнено условие 4), указанное в (1.3). Для практических целей достаточно определить приближенно эту функцию.

§ 6. С этой целью вычислим сперва Φ в предположении, что $q(\zeta)$ представляет собой квадратный трехчлен

$$q(\zeta)=A+B\zeta+C\zeta^2, \quad 0\leqslant\zeta\leqslant h. \tag{6.1}$$

Имеем

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2, \tag{6.2}$$

$$\Phi_1=\int_0^h q(\zeta)\,G_1\,d\zeta, \quad \Phi_2=\int_0^h q(\zeta)\,G_2\,d\zeta.$$

Воспользовавшись значениями (4.1) и (4.2) для G_1, G_2 и (6.1) для $q(z)$, находим

$$\Phi_1=\frac{2h(6A+3Bh+2Ch^2)}{3\pi^2ab}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'\frac{e^{-\frac{\pi^2H_{l_1,l_2}}{4T^2}}}{H_{l_1,l_2}}\cos(2l_1+1)\frac{\pi x}{a}\cos 2l_2\frac{\pi y}{b}, \tag{6.3}$$

$$\Phi_2=\frac{1}{4\pi}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty}v_{l_2,l_3}, \tag{6.4}$$

где

$$v_{l_2,l_3}=\int_0^h(A+B\zeta+C\zeta^2)\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2+(l_2b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2}\right]}{\sqrt{x^2+(l_2b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2}}\,d\zeta+$$

$$+\int_0^h(A+B\zeta+C\zeta^2)\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2+(l_2b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2}\right]}{\sqrt{x^2+(l_2b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2}}\,d\zeta. \tag{6.5}$$

§ 7. Рассмотрим сперва случай, когда

$$x^2+y^2<1 \text{ и } l_2=l_3=0. \tag{7.1}$$

При этом воспользуемся известным разложением

$$\operatorname{erf}(u)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}$$

и найдем

$$\int_0^h(A+B\zeta+C\zeta^2)\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2+y^2+(\zeta\pm z)^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+(\zeta\pm z)^2}}\,d\zeta=\int_0^h\frac{(A+B\zeta+C\zeta^2)\,d\zeta}{\sqrt{x^2+y^2+(\zeta\pm z)^2}}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nT^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}\int_0^h[x^2+y^2+(\zeta\pm z)^2]^n(A+B\zeta+C\zeta^2)\,d\zeta=$$

$$= \pm A \log \frac{z \pm h + \sqrt{x^2+y^2+(z \pm h)^2}}{z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}} +$$

$$+ B \left\{ \sqrt{x^2+y^2+(z \pm h)^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \right.$$

$$\left. + z \log \frac{z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z \pm h + \sqrt{x^2+y^2+(z \pm h)^2}} \right\} + C \left\{ \frac{h \mp 3z}{2} \sqrt{x^2+y^2+(z \pm h)^2} + \right.$$

$$\left. \pm \frac{3z}{2} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \pm \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2} \log \frac{z \pm h + \sqrt{x^2+y^2+(z \pm h)^2}}{z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n T^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \{ A\sigma_1 + B\sigma_2 + C\sigma_3 \},$$

где

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(x^2+y^2)^{n-k}}{(2k+1)} [(h \pm z)^{2k+1} \mp z)^{2k+1}],$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(x^2+y^2)^{n-k}}{(2k+1)(2k+2)} [(h \pm z)^{2k+1} ((2k+1)\, h \mp z) + z^{2k+2}],$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(x^2+y^2)^{n-k}}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} \cdot$$

$$\cdot [(h \pm z)^{2k+1} ((2k+1)(2k+2)\, h^2 \mp 2\,(2k+1)\, hz + 2z^2) \mp 2z^{2k+3}].$$

Полагая поэтому

$$R = \frac{z + h + \sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}{z - h + \sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} =$$

$$= \frac{(h + z + \sqrt{x^2+y^2+(h+z)^2})\,(h - z + \sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2})}{x^2+y^2}, \qquad (7.2)$$

получим

$$c_{0,0} = A \log R + B \left\{ \sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2} + \sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2} - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} + z \log \frac{(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2})^2 R}{(z + h + \sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2})^2} \right\} +$$

$$+ C \left\{ \frac{h+3z}{2} \sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2} + \frac{h-3z}{2} \sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2} \log R \right\} - \qquad (7.3)$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n T^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(x^2+y^2)^{n-k}}{2k+1} \left\{ A\tau_1 + B \frac{\tau_2}{2k+2} + C \frac{\tau_3}{(2k+2)(2k+3)} \right\},$$

где

$$\tau_1 = (h+z)^{2k+1} + (h-z)^{2k+1},$$

$$\tau_2 = (h+z)^{2k+1} ((2k+1)\, h - z) + (h-z)^{2k+1} ((2k+1)\, h + z) + 2z^{2k+2},$$

$$\tau_3 = (h+z)^{2k+1} ((2k+2)(2k+2)\, h^2 - 2\,(2k+1)\, hz + 2z^2) +$$

$$+ (h-z)^{2k+1} ((2k+1)(2k+2)\, h^2 + 2\,(2k+1)\, hz + 2z^2).$$

Следует заметить, что ряд (7.3) весьма быстро сходится и почти во всех случаях можно ограничиться первыми двумя его членами.

§ 8. Рассмотрим теперь случай, когда одновременно не выполнены соотношения (7.1). При этом можно вычислить интегралы (6.5) следующим образом. Разбиваем промежуток интегрирования $[0, h]$ на несколько равных частей. Соответственно этому каждый из интегралов (6.5) представляется в виде суммы интегралов. Пусть $[h_1, h_2]$ — один из таких частичных промежутков. Обозначим

$$Y = l_2 b - y, \quad Z = z + 2l_3. \tag{8.1}$$

Тогда мы можем положить

$$\int_{h_1}^{h_2} (A + B\zeta + C\zeta^2) \frac{1 - \operatorname{erf}[T\sqrt{x^2 + Y^2 + (\zeta \pm Z)^2}]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + (\zeta \pm Z)^2}} d\zeta =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \pm Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \pm Z\right)^2}} \int_{h_1}^{h_2} (A + B\zeta + C\zeta^2)\, d\zeta.$$

Погрешность, которая при этом допускается, будет того же порядка, что и погрешность при вычислении по формуле

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{1 - \operatorname{erf}[T\sqrt{x^2 + Y^2 + (\zeta \pm Z)^2}]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + (\zeta \pm Z)^2}} d\zeta =$$

$$= (h_2 - h_1) \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \pm Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \pm Z\right)^2}},$$

т. е. при вычислении интеграла, стоящего в левой части по формуле касательных. Эта погрешность, как известно, не превосходит

$$M_2 \cdot \frac{(h_2 - h_1)^3}{24},$$

где M_2 означает верхнюю границу значений второй производной подинтегральной функции $f(\zeta)$ в промежутке $[h_1, h_2]$. Мы можем, таким образом, оценить погрешность, имея в виду, что

$$f''(\zeta) = \frac{2T}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2(\zeta \pm Z)^2 - x^2 - Y^2}{[(\zeta \pm Z)^2 + x^2 + Y^2]^2} + \frac{2T^2(\zeta \pm Z)^2}{x^2 + Y^2 + (\zeta \pm Z)^2} \right\} e^{-T^2[x^2 + Y^2 + (\zeta \pm Z)^2]} +$$

$$+ \frac{2(\zeta \pm Z)^2 - x^2 - Y^2}{[(\zeta \pm Z)^2 + x^2 + Y^2]^{5/2}} \{1 - \operatorname{erf}[T\sqrt{x^2 + Y^2 + (\zeta \pm Z)^2}]\}.$$

Исходя из этих соображений, можно установить, что для всех случаев, встречающихся на практике, если одновременно не выполнены соотношения

$$h > 0{,}5, \quad l_3 = -1, \quad x^2 + Y^2 < 1, \tag{8.2}$$

можно положить

$$v_{l_2, l_3} = \left\{ \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2} + Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2} + Z\right)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2} - Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2} - Z\right)^2}} \right\} \left(Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}\right) \tag{8.3}$$

Если же одновременно имеют место соотношения (8.2), то можно положить

$$v_{l_2, l_3} = \left\{ \frac{1 - \operatorname{erf}\left[\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{4} + Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{4} + Z\right)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{4} - Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{4} - Z\right)^2}} \right\} \left(A\frac{h}{2} + B\frac{h^2}{8} + C\frac{h^3}{24}\right) +$$

$$+ \left\{ \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{3h}{4} + Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{3h}{4} + Z\right)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{3h}{4} - Z\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2 + Y^2 + \left(\frac{3h}{4} - Z\right)^2}} \right\} \left(A\frac{h}{2} + B\frac{3h^2}{8} + C\frac{7h^3}{24}\right). \tag{8.4}$$

Формулы (6.2), (6.3), (6.4), (7.3), (8.3) и (8.4) дают возможность фактически вычислить значение потенциала Φ для любой точки рассматриваемой области в предположении, что $q(\zeta)$ представляет собой квадратный трехчлен (6.1).

§ 9. Вдоль оси z от $z = 0$ до $z = h$ мы помещаем линию стока, мощность которой характеризуется квадратным трехчленом (6.1) и, кроме того, на оси z при $z = h$ помещаем точечный сток мощности D. Соответствующий потенциал φ в любой точке может быть вычислен по формуле

$$\varphi = u + \frac{1}{4\pi} \sum_{l_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{l_3 = -\infty}^{\infty} v_{l_2, l_3} + w, \tag{9.1}$$

причем $u = \Phi_1$ может быть вычислено по формуле (6.3), v_{l_2, l_3} может быть вычислено по одной из формул (7.3), (8.3), (8.4), а $w = DG$, причем G может быть вычислено по формулам (3.1), (4.1) и (4.3). Нам остается выбрать числа A, B, C и D так, чтобы удовлетворить условию 4), указанному в (1.3). Для этого вычисляем значение φ при $x^2 + y^2 = \rho^2$ и при $z = 0$, $z = z_1$, $z = z_2$, $z = h$, где $0 < z_1 < z_2 < h$ и найденные четыре значения φ приравниваем заданному значению потенциала на поверх-

ности скважины. Мы получаем, таким образом, для определения A, B, C и D систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

При вычислении потенциала φ для точек, лежащих на поверхности скважины (при $x^2+y^2=\rho^2$), можно значительно упростить соответствующие формулы, если учесть, что $\rho \ll 1$ и если пренебречь членами порядка ρ^2. В самом деле, разлагая $u=\Phi_1$, выражаемое формулой (6.3), в ряд по степеням x и y и пренебрегая членами, содержащими x и y в квадрате *, получим

$$u=\frac{2h(A+3Bh+2Ch^2)}{3\pi^2 ab}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}' \frac{e^{-\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T^2}}}{H_{l_1,l_2}}, \tag{9.2}$$

где H_{l_1,l_2} попрежнему имеет значение (4.2). Формула (7.3) для вычисления $v_{0,0}$ может быть заменена следующей,

$$v_{0,0}=v'_{0,0}-v''_{0,0}, \tag{9.3}$$

$$v'_{0,0}=A\log R+B\left\{z+h+\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}-2\sqrt{\rho^2+z^2}+z\log\frac{(z+\sqrt{\rho^2+z^2})^2R}{4(z+h)^2}\right\}+$$
$$+C\left\{\frac{h+3z}{2}\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}+\frac{h-3z}{2}+(h+z)+z^2\log R\right\}, \tag{9.4}$$

где

$$R=R(z)=\frac{2(h+z)\left[h-z+\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}\right]}{\rho^2}=\frac{2(z+h)}{z-h+\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}}; \tag{9.5}$$

$$v''_{0,0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{2ATh\left[1-\frac{T^2(h^2+3z^2)}{9}\right]+BTh^2\left[1-\frac{T^2(h^2+2z^2)}{6}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}CTh^3\left[1-\frac{T^2(3h^2+5z^2)}{15}\right]\right\}. \tag{9.6}$$

Формулы (8.3) и (8.4) для вычисления v_{l_2,l_3} заменяются при $l_2=0$ формулой

$$v_{0,l_3}=\left\{\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\left|\frac{h}{2}+Z\right|\right]}{\left|\frac{h}{2}+Z\right|}+\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\left|\frac{h}{2}-Z\right|\right]}{\left|\frac{h}{2}-Z\right|}\right\}\left(Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{3}\right), \tag{9.7}$$

если одновременно не выполнены соотношения $h>\frac{1}{2}$ и $l_3=-1$, и формулой

$$v_{0,l_3}=\left\{\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\left|\frac{h}{4}+Z\right|\right]}{\left|\frac{h}{4}+Z\right|}+\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\left|\frac{h}{4}-Z\right|\right]}{\left|\frac{h}{4}-Z\right|}\right\}\left(A\frac{h}{2}+B\frac{h^2}{8}+C\frac{h^3}{24}\right)+$$
$$+\left\{\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\left|\frac{3h}{4}+Z\right|\right]}{\left|\frac{3h}{4}+Z\right|}+\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\left|\frac{3h}{4}-Z\right|\right]}{\left|\frac{3h}{4}-Z\right|}\right\}\left(A\frac{h}{2}+B\frac{3h^2}{8}+C\frac{7h^3}{24}\right) \tag{9.8}$$

в противном случае.

---

* Это можно сделать, так как во всех случаях, встречающихся на практике, $a>b>1$.

Если же $l_2 \neq 0$, то v_{l_2,l_3} вычисляется по формуле

$$v_{l_2,l_3} = \left\{ \frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}+Z\right)^2}\right]}{\sqrt{l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}+Z\right)^2}} + \frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}-Z\right)^2}\right]}{\sqrt{l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}-Z\right)^2}} \right\} \cdot \left(Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{3}\right). \quad (9.9)$$

Для вычисления w мы пользуемся формулами (3.1), (4.1), (4.3) и находим

$$w = \frac{4D}{\pi^2 ab} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty}{}' \frac{e^{-\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T^2}}}{H_{l_1,l_2}} + \frac{D}{4\pi} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} f_{l_2,l_3}, \quad (9.10)$$

где при $l_2 = l_3 = 0$

$$f_{0,0} = \frac{1-\operatorname{erf}[T(h+z)]}{h+z} + \frac{1-\operatorname{erf}[T\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}]}{\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}}, \quad (9.11)$$

и, если l_2 и l_3 одновременно не равны нулю,

$$f_{l_2,l_3} = \frac{1-\operatorname{erf}[T\sqrt{l^2b^2+(h+Z)^2}]}{\sqrt{l^2b^2+(h+Z)^2}} + \frac{1-\operatorname{erf}[T\sqrt{l^2b^2+(h-Z)^2}]}{\sqrt{l^2b^2+(h-Z)^2}}. \quad (9.12)$$

Заметим, что полученные нами формулы для вычисления потенциала φ на поверхности скважины зависят от $\rho^2 = x^2 + y^2$, а не от x и y в отдельности. Это вполне согласуется с физическими соображениями, так как поблизости от линии стока потенциал обладает, с точностью до величины, зависящей от степени этой близости, круговой симметрией.

После того как определены A, B, C и D, можно вычислить дебит скважины по формуле

$$q = \int_0^h (A + B\zeta + C\zeta^2)\,d\zeta + D = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3} + D, \quad (9.13)$$

так как мощность стока означает количество жидкости, притекающей к стоку в единицу времени.

§ 10. Изложенное нами решение рассматриваемой задачи дает возможность определить распределение мощности линии стока, совпадающей с осью z от $z=0$ до $z=h$ так, чтобы приближенно удовлетворить условию на поверхности скважины. Мы представили это распределение в форме квадратного трехчлена $A+B\zeta+C\zeta^2$ и, кроме линии стока с таким распределением мощности, ввели еще точечный сток мощности D. Такое решение задачи дает первое приближение.

Мы можем получить более точное решение задачи, если поступить следующим образом. Вдоль оси z от $z=0$ до $z=h_1$ ($h_1 < h$) поместим дополнительную линию стока с постоянной мощностью A_1. Вычисляем значение потенциала φ при $x^2+y^2=\rho^2$ для пяти надлежащим образом выбранных значений z. Найденные значения потенциала φ приравниваем

заданному значению потенциала, согласно условию на границе скважины, и тем самым получаем пять уравнений для определения пяти неизвестных A, B, C, D, A_1. Полученное таким образом решение будет более точным.

Если вместо дополнительной линии стока от $z=0$ до $z=h_1$ с постоянной мощностью A_1 ввести линию стока, распределение мощности которой характеризуется функцией $A_1+B_1\zeta$ или функцией $A_1+B_1\zeta+$ $+C_1\zeta^2$ $(0\leqslant\zeta\leqslant h_1)$, то мы получим еще более точные решения, но при этом нам придется решать систему шести уравнений с шестью неизвестными A, B, C, D, A_1, B_1 или, соответственно, систему семи уравнений с семью неизвестными A, B, C, D, A_1, B_1, C_1.

Введя другие дополнительные линии стока вдоль оси z или дополнительные точечные стоки, мы можем получить решение задачи, все более и более точно удовлетворяющее условию на границе скважины. Однако рассмотрение численных примеров, к которым мы обратимся ниже, показывает, что для случаев, встречающихся на практике, достаточно ограничиться первым приближением, приводящим к системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными A, B, C и D. Из рассмотрения этих примеров выяснится также значение точечного стока мощности D, помещаемого нами в точке $(0, 0, h)$.

§ 11. Если в рассматриваемой задаче a значительно больше b, то непосредственное применение формулы (6,3) или (9.2) для вычисления u затруднительно, так как ряды в правых частях этих формул сходятся при больших a весьма медленно. Для того, чтобы устранить это затруднение, заметим, что при достаточно больших значениях x потенциал φ в пределах требуемой точности зависит только от x и не зависит от y и z. В самом деле, пусть T удовлетворяет условию

$$\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T^2}\geqslant\pi^2 \text{ при } l_2\geqslant 1.$$

Тогда выражение (6.3) для $u=\Phi_1$ будет в пределах точности наших вычислений зависеть только от x, так как $e^{-\pi^2}\approx 0{,}00005$, и членами, соответствующими $l_2\geqslant 1$, можно пренебречь. Последнее условие будет выполнено, если будет удовлетворено неравенство

$$\frac{\pi^2\frac{4}{b^2}}{4T^2}\geqslant\pi^2;$$

поэтому достаточно взять

$$T=\frac{1}{b}.$$

С другой стороны, по формуле (6.5) можно положить v_{l_2,l_3} равным нулю, если будет удовлетворено неравенство

$$T\sqrt{x^2+(l_2b-y)^2}\geqslant 3,$$

так как

$$1-\operatorname{erf}(3)\approx 0{,}00002.$$

Последнее неравенство наверное будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$T|x| \geqslant 3$$

или

$$|x| \geqslant \frac{3}{T} = 3b.$$

Таким образом, при решении нашей задачи имеет смысл брать a, удовлетворяющее условию

$$\frac{a}{2} = 3b$$

или

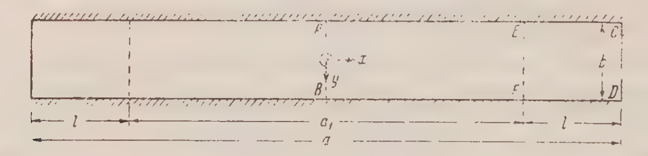
$$a = 6b.$$

§ 12. Если по условию задачи $a > 6b$, то мы применяем изложенное выше решение для части области длины $a_1 = 6b$, а в оставшихся частях области, каждая из которых имеет длину

$$l = \frac{a - a_1}{2},$$

решаем задачу, имея в виду одноразмерное распределение потенциала.

На фиг. 5 изображена рассматриваемая область в плане. Эта область симметрична относительно пунктирной прямой, проходящей



Фиг. 5

через ось скважины. Поэтому мы можем рассматривать лишь одну половину области, например $ABDC$. Для области $ABFE$ мы решаем задачу по изложенному выше способу, а для области $EFDC$ мы решаем задачу, имея в виду одноразмерное распределение потенциала.

Пусть нам задана разность потенциалов $\Delta\varphi$ на поверхности скважины и на границе области CD. Обозначим значение потенциала на линии CD через φ_0, а значение потенциала на линии EF через $\varphi_0 + \psi$. В виду одноразмерного распределения потенциала, мы получаем для значения потенциала φ в любой точке области $EFDC$ с абсциссой x выражение

$$\varphi = \frac{\psi}{l}\left(\frac{a_1}{2} + l - x\right) + \varphi_0. \tag{12.1}$$

Обозначим дебит скважины через Q. Пусть q означает дебит скважины в предположении, что разность потенциалов на поверхности скважины и на линии EF равна единице. Тогда

$$Q = (\Delta\varphi - \psi)\, q, \tag{12.2}$$

причем q вычисляется по формуле (9.13). Так как количество жидкости,

протекающей через границу EF равна половине дебита скважины, то

$$\frac{Q}{2}=\psi\frac{b}{l}. \tag{12.3}$$

Из (12.2) и (12.3) находим

$$2\psi\frac{b}{l}=(\Delta\varphi-\psi)\,q,$$

откуда

$$\psi=\frac{ql}{2b+ql}\Delta\varphi. \tag{12.4}$$

Подставив это значение в (12.1), получим

$$\varphi=\frac{q\Delta\varphi}{2b+ql}\left(\frac{a_1}{2}+l-x\right)+\varphi_0. \tag{12.5}$$

Это равенство дает возможность вычислить значение потенциала в любой точке области $EFDC$.

Подставив значение (12.4) в (12.3), мы находим для дебита скважины выражение

$$Q=\frac{2bq\Delta\varphi}{2b+ql}. \tag{12.6}$$

§ 13. Переходим теперь к решению второй из формулированных выше задач (§ 1). С этой целью строим функцию Грина для прямоугольного параллелепипеда (фиг. 4) с единичным стоком в точке $(0, 0, \zeta)$ и граничными условиями 1), 2) и 3), указанными в (1.4).

Построим систему взаимно ортогональных плоскостей

$$x=l_1a+c,\quad y=\left(l_2+\frac{1}{2}\right)b,\quad z=l_3,$$

параллельных граням рассматриваемого параллелепипеда, где l_1, l_2 и l_3 независимо друг от друга пробегают все целые числа от $-\infty$ до $+\infty$. Отразим точку $(0, 0, \zeta)$ повторно в этих плоскостях; в результате получаем систему точек

$$(2l_1a+c\mp c,\quad l_2b;\ 2l_3\pm\zeta),$$

в которых мы поместим единичные стоки или источники, смотря по тому, является ли l_1 числом четным или нечетным. Потенциал построенной таким образом пространственной решетки выражает, как легко проверить, искомую функцию Грина

$$G=G(x,\ y,\ z;\ \zeta).$$

Для нахождения G мы опять пользуемся формулой (2.8). При этом мы полагаем

$$\alpha=4a,\quad \beta=b,\quad \gamma=2.$$

В основном прямоугольнике помещаем четыре единичных стока в точках

$$(0, 0, \zeta),\quad (0, 0, 2-\zeta),\quad (2c, 0, \zeta),\quad (2c, 0, 2-\zeta)$$

и четыре единичных источника в точках

$$(2a, 0, \zeta),\quad (2a, 0, 2-\zeta),\quad (2a+2c, 0, \zeta),\quad (2a+2c, 0, 2-\zeta).$$

Пользуясь формулой (2.8), мы после ряда преобразований (ср. § 3) находим функцию Грина в виде

$$G = G_1 + G_2, \tag{13.1}$$

где

$$G_1 = \frac{8}{\pi^2 ab} \sum_{l_1=0}^{\infty} {\sum_{l_2=0}^{\infty}}' {\sum_{l_3=0}^{\infty}}' \frac{e^{-\frac{\pi^2 H_l}{4T^2}}}{H_l} \cos(2l_1+1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{c}{a}\right)\cos(2l_1+1)\frac{\pi c}{2a}\cdot$$

$$\cdot \cos 2l_2 \frac{\pi y}{b} \cos l_3\pi z \cos l_3 \pi\zeta,$$

$$H_l = \frac{(2l_1+1)^2}{4a^2} + \frac{4l_2^2}{b^2} + l_3^2,$$

$$G_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} (-1)^{l_1} \left\{ \frac{1-\mathrm{erf}(TR_1)}{R_1} + \frac{1-\mathrm{erf}(TR_2)}{R_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\mathrm{erf}(TR_3)}{R_3} + \frac{1-\mathrm{erf}(TR_4)}{R_4} \right\},$$

причем

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(2l_1a-x)^2+(l_2b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2},\\ R_2 &= \sqrt{(2l_1a-x)^2+(l_2b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2},\\ R_3 &= \sqrt{(2l_1a+2c-x)^2+(l_2b-y)^2+(\zeta+z+2l_3)^2}\\ R_4 &= \sqrt{(2l_1a+2c-x)^2+(l_2b-y)^2+(\zeta-z-2l_3)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Выбирая теперь T из условия

$$\frac{\pi}{a-c} \leqslant T \leqslant \frac{1}{2},$$

мы можем заменить найденные нами точные значения для G_1 и G_2 приближенными значениями, пригодными во всех практических случаях, а именно

$$G_1 = \frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{l_1=0}^{\infty} {\sum_{l_2=0}^{\infty}}' \frac{e^{-\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T^2}}}{H_{l_1,l_2}} \cos(2l_1+1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{c}{a}\right)\cos(2l_1+1)\frac{\pi c}{2a}\cdot$$

$$\cos 2l_2\frac{\pi y}{b}, \tag{13.3}$$

где

$$H_{l_1,l_2} = \frac{(2l_1+1)^2}{4a^2} + \frac{4l_2^2}{b^2} \tag{13.4}$$

и

$$G_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{4} \frac{1-\mathrm{erf}(TR_n)}{TR_n}, \tag{13.5}$$

причем R_1, R_2, R_3 и R_4 имеют значения (13.2) при $l_1=0$.

§ 14. Если вдоль оси z от $z=0$ до $z=h$ помещена линия стока, мощность которой характеризуется квадратным трехчленом

$$q(\zeta) = A + B\zeta + C\zeta^2, \tag{14.1}$$

то для потенциала Φ, соответствующего этой линии стока, будем иметь

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{14.2}$$

где

$$\Phi_1 = \frac{2h\,(6A + 3Bh + 2Ch^2)}{3\pi^2 ab} \sum_{l_1=0}^{\infty} {\sum_{l_2=0}^{\infty}}' \Psi_{l_1, l_2}, \tag{14.3}$$

$$\Psi_{l_1, l_2} = \frac{e^{-\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T^2}}}{H_{l_1,l_2}} \cos(2l_1+1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{c}{a}\right)\cos(2l_1+1)\frac{\pi c}{2a}\cos 2l_2\frac{\pi y}{b},$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} (v_{l_2,l_3} + v^{(c)}_{l_2,l_3}). \tag{14.4}$$

При

$$x^2 + y^2 < 1 \quad \text{и} \quad l_2 = l_3 = 0 \tag{14.5}$$

$v_{0,0}$ вычисляется по формуле (7.3); если одновременно не выполнены соотношения (14.5), то v_{l_2,l_3} вычисляется по формуле (8.3) или (8.4), наконец, $v^{(c)}_{l_2,l_3}$ вычисляется по формуле

$$v^{(c)}_{l_2,l_3} = \left\{ \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{(2c-x)^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2}+Z\right)^2}\right]}{\sqrt{(2c-x)^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2}+Z\right)^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{(2c-x)^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2}-Z\right)^2}\right]}{\sqrt{(2c-x)^2 + Y^2 + \left(\frac{h}{2}-Z\right)^2}} \right\}\left(Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}\right), \tag{14.6}$$

причем

$$Y = l_2 b - y, \quad Z = z + 2l_3. \tag{14.7}$$

Ряды (14.3) и (14.4) для Φ_1 и Φ_2 весьма быстро сходятся, и мы можем фактически вычислить значение потенциала Φ в любой точке (x, y, z) рассматриваемой области.

§ 15. Если вдоль оси z от $z=0$ до $z=h$ поместить линию стока, мощность которой характеризуется квадратным трехчленом (14.1), и, кроме того, на оси z при $z=h$ поместить точечный сток мощности D, то соответствующий потенциал φ в любой точке (x, y, z) рассматриваемой области может быть вычислен по формуле

$$\varphi = u + \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_3=-\infty}^{\infty} (v_{l_2,l_3} + v^{(c)}_{l_2,l_3}) + w, \tag{15.1}$$

причем $u = \Phi_1$ может быть вычислено по формуле (14.3), v_{l_2,l_3} может быть вычислено по одной из формул (7.3), (8.3), (8.4), $v^{(c)}_{l_2,l_3}$ вычисляется по формуле (14.6), а $w = DG$, причем G вычисляется по формулам (13.1), (13.3) и (13,5).

Для определения A, B, C и D соответственно условию 4), указанному в (1.4), мы опять приходим к системе четырех уравнений

с четырьмя неизвестными, если вычислить φ при $x^2+y^2=\rho^2$ и при $z=0$, z_1, z_2, h $(0<z_1<z_2<h)$ и приравнять найденные значения φ заданному значению потенциала на поверхности скважины.

Если $\rho \ll 1$, то при $x^2+y^2=\rho^2$ формулы для вычисления φ значительно упрощаются. Именно, при вычислении u мы можем в формуле (14.3) для $\Phi_1=u$ положить $x=y=0$; v_{l_2,l_3} вычисляется по формулам (9,3)—(9.9), $v^{(c)}_{l_2,l_3}$ вычисляется по формуле

$$v^{(c)}_{l_2,l_3}=\left\{\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{4c^2+l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}+Z\right)^2}\right]}{\sqrt{4c^2+l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}+Z\right)^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{4c^2+l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}-Z\right)^2}\right]}{\sqrt{4c^2+l_2^2b^2+\left(\frac{h}{2}-Z\right)^2}}\right\}\left(Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{3}\right) \qquad (15.2)$$

и соответственным образом находим из (13.1), (13.3) и (13.5) формулы для вычисления w.

После нахождения A, B, C и D можно вычислить приближенное значение потенциала в любой точке рассматриваемой области по формуле (15.1) и дебит скважины по формуле

$$q=Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{3}+D. \qquad (15.3)$$

Введением дополнительных линий стока на оси скважины можно достигнуть более точного решения задачи.

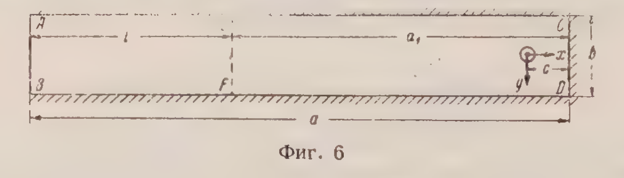
§ 16. Рассуждениями, аналогичными приведенным в § 11, мы убеждаемся в том, что рассматриваемую задачу достаточно решить при условии

$$a\leqslant 3b+c.$$

Если это условие не выполнено, то применяем изложенное решение для части области длины

$$a_1=3b+c,$$

а в оставшейся части области длины $l=a-a_1=a-3b-c$ решаем задачу, имея в виду одноразмерное распределение потенциала.



Фиг. 6

На фиг. 6 изображена рассматриваемая область в плане. Для области $EFDC$ решаем задачу по изложенному выше способу, а для области $ABFE$ решаем задачу, имея в виду одноразмерное распределение потенциала.

Пусть задана разность потенциалов $\Delta\varphi$ на поверхности скважины и на границе области AB. Обозначим значение потенциала на линии AB через φ_0, а значение потенциала на линии EF — через $\varphi_0+\psi$. Ввиду одноразмерного распределения потенциала, мы получаем для значения потенциала φ в любой точке области $ABFE$ с абсциссой x выражение

$$\varphi=\frac{\psi}{l}(x+a-c)+\varphi_0. \tag{16.1}$$

Если обозначить дебит скважины через Q, а дебит скважины в предположении, что разность потенциалов на поверхности скважины и на линии EF равна единице — через q, то

$$Q=(\Delta\varphi-\psi)\,q,$$

причем q вычисляется по формуле (15.3). С другой стороны, так как количество жидкости, протекающей через границу EF, равно дебиту скважины, то

$$Q=\psi\frac{b}{l}, \tag{16.2}$$

следовательно,

$$\psi\frac{b}{l}=(\Delta\varphi-\psi)\,q,$$

откуда

$$\psi=\frac{ql}{b+ql}\Delta\varphi. \tag{16.3}$$

Подставив это значение в (16.1), находим

$$\varphi=\frac{q\Delta\varphi}{b+ql}(x+a-c)+\varphi_0. \tag{16.4}$$

Эта формула дает возможность вычислить значение потенциала в любой точке области $ABFE$. Подставив значение (16.3) в (16.2), находим для дебита скважины выражение

$$Q=\frac{bq}{b+ql}\Delta\varphi. \tag{16.5}$$

§ 17. Приведем результаты расчета нескольких численных примеров. *

Пусть (фиг. 1) глубина пласта равна 10 м, расстояние между двумя соседними скважинами равно 200 м, ширина пласта равна 10 км, глубина скважины равна 2,5 м, радиус скважины равен 10 см. Пусть, далее, падение напора на границе области и на границе скважины есть ΔH, а коэффициент фильтрации есть k. Тогда, принимая глубину пласта за единицу измерения длин, имеем (см. обозначения § 1)

$$a=1000,\quad b=20,\quad \rho=0{,}01,\quad h=0{,}25.$$

Так как $a>6b$, то (ср. § 12) полагаем

$$a_1=6b=120,\quad l=440.$$

* Вычисления выполнялись К. Т. Земцовой, Т. С. Зезиной (Московский станкоинструментальный институт им. И. В. Сталина) и М. Д. Тахтамышевой.

Таблица 1

z	0			0,125			0,200			0,250		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
u	0,3860	0.0482	0,0080									
v_0'	7,8245	0,4802	0,0625	7,5374	0,9176	0,1335	6,8124	1,1390	0,2154	4,6052	0,8146	0,1679
v_0''	0,1772	0,0221	0,0037	0,1770	0,0221	0,0037	0,1769	0,0221	0,0037	0,1768	0,0220	0,0037
v_0	7,6473	0,4581	0,0588	7,3604	0,8955	0,1298	6,6355	1,1169	0,2117	4,4284	0,7926	0,1642
v_1	0,0919	0,0115	0,0019	0,0821	0,0103	0,0017	0,0754	0,0094	0,0016	0,0713	0,0089	0,0015
v_2	0,0096	0,0012	0,0002	0,0082	0,0010	0,0002	0,0075	0,0009	0,0002	0,0070	0,0009	0,0002
v_{-1}	0,0942	0,0118	0,0020	0,1092	0,0137	0,0023	0,1191	0,0149	0,0025	0,1263	0,0158	0,0026
v_{-2}	0,0096	0,0012	0,0002	0,0111	0,0014	0,0002	0,0122	0,0015	0,0003	0,0129	0,0016	0,0003
$\sum v_{l_3}$	7.8526	0,4833	0,0631	7,5710	0,9219	0,1342	6,8497	1,1436	0,2163	4,6459	0,8198	0,1688
$\frac{1}{4\pi}\sum v_{l_3}$	0,6249	0,0385	0,0050	0,6025	0,0734	0,0107	0,5451	0,0910	0,0172	0,3697	0,0652	0,0134
$u+\frac{1}{4\pi}\sum v_{l_3}$	1,0109	0,0867	0,0130	0,9885	0,1216	0,0187	0,9311	0,1392	0,0252	0,7557	0,1134	0,0214

Вдоль оси скважины, т. е. вдоль оси z от $z=0$ до $z=h$ помещаем линию стока, мощность которой характеризуется квадратным трехчленом

$$A+B\zeta+C\zeta^2 \quad (0\leqslant\zeta\leqslant h),$$

и, кроме того, на оси z при $z=h$ помещаем точечный сток мощности D. Вычисляем соответствующий потенциал φ_1 на поверхности скважины, т. е. при

$$x^2+y^2=\rho^2$$

для четырех точек, при

$$z=0; \quad z=0{,}125; \quad z=0{,}2; \quad z=0{,}25.$$

Для этого мы пользуемся формулами § 9, заменяя в них a на a_1. Если положить

$$T=\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{10}, \tag{17.1}$$

то T удовлетворяет условиям § 4. В результате вычислений находим

$$\alpha=\frac{2}{a}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'\frac{e^{-\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T}}}{H_{l_1,l_2}}=152{,}38. \tag{17.2}$$

При выбранном значении (17.1) для T можно принять в пределах точности наших вычислений $v_{l_2,l_3}=0$, если $l_2\neq 0$.
Полагая поэтому

$$v_{0,l_3}=v_{l_3},$$

мы можем расположить результаты вычисления $u+\frac{1}{4\pi}\sum v_{l_3}$ для указанных значений z так, как это показано в табл. 1.

В столбцах под буквами A, B и C указаны коэффициенты при этих буквах в соответствующих выражениях, приведенных в первом столбце. Так как u не зависит от z, то выражение для u указано только один раз.

При вычислении w мы используем значение (17.2) для α и находим для $z=0$; 0,125; 0,200 и 0,250 соответственно,

$$w=2{,}1930D;\ \ 2{,}4042D;\ \ 3{,}2954D;\ \ 9{,}6767D.$$

Значения для φ_1 на поверхности скважины даны в табл. 2.

Таблица 2

z	φ_1
0	$1{,}0109A+0{,}0867B+0{,}0130C+2{,}1930D$
0,125	$0{,}9885A+0{,}1216B+0{,}0187C+2{,}4042D$
0,200	$0{,}9311A+0{,}1392B+0{,}0252C+3{,}2954D$
0,250	$0{,}7557A+0{,}1134B+0{,}0214C+9{,}6767D$

Пусть на поверхности скважины задано постоянное значение потенциала, равное единице (ср. (1.3), условие 4)). Приравнивая

каждое из четырех найденных значений единице, мы получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными A, B, C и D. Решив эту систему, находим

$$A = 0{,}9037; \quad B = -0{,}4930; \quad C = 5{,}6058; \quad D = 0{,}0262 \qquad (17.3)$$

и по формуле (9.13) для дебита скважины получаем значение

$$q = 0{,}266. \qquad (17.4)$$

Воспользовавшись формулой (12.6), находим для дебита скважины данной области значение

$$Q = 0{,}0678\Delta\varphi.$$

Если коэффициент фильтрации выражен в метрах в сутки, напор выражен в метрах, то, заметив, что глубина пласта, равная 10 м, была принята за единицу измерения длин, найдем

$$Q = 0{,}678\ k\Delta H \text{ м}^3/\text{сут}.$$

§ 18. Приведем теперь результаты вычислений, имеющих своей целью показать, насколько точен изложенный способ решения рассматриваемой задачи и какова роль точечного стока, помещенного на оси z при $z = h$.

С этой целью вычисляем значение потенциала φ_1 еще для четырех точек на поверхности скважины (табл. 3).

Таблица 3

z	φ_1
0,050	$1{,}0081A + 0{,}0970B + 0{,}0139C + 2{,}2191D = 0{,}999$
0,090	$1{,}0003A + 0{,}1099B + 0{,}0160C + 2{,}2871D = 0{,}999$
0,160	$0{,}9697A + 0{,}1307B + 0{,}0218C + 2{,}6300D = 1{,}003$
0,220	$0{,}8954A + 0{,}1382B + 0{,}0260C + 4{,}2440D = 0{,}997$

Полученные таким образом контрольные значения для φ_1 показывают, что найденное нами выражение потенциала φ_1 с достаточной точностью удовлетворяет условию на поверхности скважины.

Поместим теперь вдоль оси z от $z = 0$ до $z = \frac{h}{2} = 0{,}125$ линию стока постоянной мощности A_1. Значения соответствующего потенциала на поверхности скважины при $z = 0$; 0,050; 0,090; 0,125; 0,160; 0,200; 0,220; 0,250 можно вычислить по формулам § 9, положив в них $A = A_1$, $B = C = 0$; мы находим соответственно $0{,}7067A_1$; $0{,}6931A_1$; $0{,}6501A_1$; $0{,}5053\,A_1$; $0{,}3597A_1$; $0{,}3108A_1$; $0{,}2968A_1$; $0{,}2819A_1$.

При помощи этих и ранее найденных значений для φ_1 мы можем теперь найти на поверхности скважины при указанных значениях z значение потенциала φ_2, соответствующего помещенным на оси z: линии стока постоянной мощности A_1 от $z = 0$ до $z = 0{,}125$; линии стока, мощность которой характеризуется квадратным трехчленом

$A+Bz+Cz^2$ от $z=0$ до $z=h=0{,}25$; точечного стока мощности D при $z=h=0{,}25$.

Потенциал φ_2 будет зависеть от пяти параметров: A_1, A, B, C, D. Соответственно этому мы приравниваем единице пять значений φ_2 при $z=0$; 0,090; 0,160; 0,220; 0,250 и получаем систему пяти линейных уравнений с пятью неизвестными. Решив эту систему, мы находим

$$A_1=0{,}045;\quad A=0{,}851;\quad B=-0{,}422;\quad C=6{,}724,\quad D=0{,}026.$$

Если еще обозначить через φ_3 потенциал, соответствующий только что указанными двум особым линиям на оси z, но без точечного стока при $z=h$, то φ_3 будет зависеть от четырех параметров: A_1, A, B, C. Соответственно этому можно приравнять четыре значения φ_3 при $z=0$; 0,125; 0,200; 0,250 единице и получить систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Решив эту систему, мы находим

$$A_1=4{,}484;\quad A=-4{,}120;\quad B=14{,}33;\quad C=57{,}62.$$

Значения потенциалов φ_1, φ_2 и φ_3 на поверхности скважины в восьми точках и соответствующие им значения дебитов приведены в табл. 4.

Таблица 4

φ \ z	0	0,050	0,090	0,125	0,160	0,200	0,220	0,250	q
φ_1	1	0,999	0,999	1	1,003	1	0,0997	1	0,266
φ_2	1	0,999	1	1,000	1	1,002	1	1	0,267
φ_3	1	1,145	1.291	1	0,747	1	1,120	1	0,278

Табл. 4 показывает, что потенциал φ_2 более точно, чем потенциал φ_1, удовлетворяет условию на поверхности скважины. Это объясняется дополнительным введением линии стока от $z=0$ до $z=0{,}125$, благодаря чему мы получили возможность распорядиться лишним параметром A_1. Что касается потенциала φ_3, то он гораздо хуже, чем φ_1, удовлетворяет условию на поверхности скважины, хотя при определении φ_3, так же как и при определении φ_1, мы имели в своем распоряжении четыре параметра. Мы видим, таким образом, что помещение точечного стока на оси z при $z=h$ вполне оправдывается.

Таблица 4 показывает также, что для практических целей вполне достаточно строить потенциал φ_1 и нет надобности вводить более сложный потенциал φ_2.

§ 19. Воспользовавшись формулой (9.1), можно найти значение потенциала в любой точке области длины a_1. При изучении движения грунтовых вод важно знать распределение напора в рассматриваемой области при $z=0$ в точках, не слишком близких к колодцу. В этом случае формула (9.1) для φ упрощается. Именно, мы имеем

$$\varphi=u+\frac{1}{2\pi}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty} v_{l_3}+w,$$

где u имеет прежнее значение,

$$v_{l_3} = \frac{1 - \operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{h}{2}+2l_3\right)^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{h}{2}+2l_3\right)^2}}\left(Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}\right);$$

$$w = \frac{4D}{\pi^2 ab}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}' + \frac{D}{2\pi}\sum_{l_3=-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{x^2+y^2+(h+2l_3)^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+(h+2l_3)^2}},$$

причем $\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'$ означает двойную сумму, встречающуюся при вычислении u, а A, B, C и D имеют значения (17.3).

Пользуясь этими формулами, можно найти, например, значения для потенциала $\varphi = \varphi(x, y, z)$, указанные в табл. 5.

Таблица 5

x	$\varphi(x, 0, 0)$	y	$\varphi(0, y, 0)$
1	0,4495	1	0,4500
2	0,4177	2	0,4193
4	0,3864	4	0,3921
6	0,3659	6	0,3784
8	0,3494	8	0,3717
10	0,3344	10	0,3695

Эти значения найдены в предположении, что $\varphi = 0$ при $x = \frac{a_1}{2} = 60$ и $\varphi = 1$ при $x^2 + y^2 = \rho^2$ (фиг. 5).

Если коэффициент фильтрации попрежнему обозначить через k, а падение напора на границе CD всей области длины a и на поверхности колодца — через ΔH, то

$$\Delta\varphi = k\Delta H.$$

Разность потенциалов на поверхности колодца и на границе EF части области длины a_1 будет по формуле (12.4)

$$\Delta\varphi - \psi = \frac{2b\Delta\varphi}{2b+ql} = 0{,}2547\Delta\varphi,$$

и мы находим

$$\varphi(1, 0, 0) = 0{,}4495 \cdot 0{,}2547\Delta\varphi + \Phi_0,$$

где Φ_0 — произвольная постоянная, равная значению φ при $x = \frac{a_1}{2}$. Поэтому (см. § 12)

$$\Phi_0 = \psi + \varphi_0 = \frac{ql}{2b+ql}\Delta\varphi + \varphi_0 = 0{,}7453\Delta\varphi + \varphi_0,$$

и мы находим окончательно

$$\varphi(1, 0, 0) = (0{,}4495 \cdot 0{,}2547 + 0{,}7453)\Delta\varphi + \varphi_0 = 0{,}8598\Delta\varphi + \varphi_0,$$

где φ_0 — произвольное постоянное, имеющее значение, указанное в § 12.

Аналогично находятся значения потенциала в других точках части области длины a_1.

Для напора H мы получаем

$$H(1, 0, 0) = -0{,}8598\Delta H + H_0,$$

где H_0 означает произвольную постоянную — значение напора в какой-нибудь определенной точке. Аналогично находятся значения напора в других точках части области длины a_1 (фиг. 5).

Для нахождения потенциала в остальной части области длины $a = a_1 + 2l$ пользуемся формулой (12.5) и находим

$$\varphi = \frac{0{,}266\Delta\varphi}{2\cdot 20 + 0{,}266\cdot 440}(60 + 440 - x) + \varphi_0 = 0{,}00169\Delta\varphi(500 - x) + \varphi_0,$$

а для нахождения напора получаем

$$H = 0{,}00169\Delta H(x - 500) + H_0.$$

Следует отметить, что в последней формуле за единицу длины для выражения x следует принять толщину пласта, а H выражается в тех же единицах длины, что и ΔH.

§ 20. Пусть попрежнему $a = 120$, $b = 20$, $\rho = 0{,}01$. Выше мы подробно рассмотрели случай, когда $h = 0{,}25$. Рассмотрим теперь случаи, когда $h = 0{,}5$ и $h = 0{,}75$. При рассмотрении каждого из этих случаев и во всех дальнейших примерах мы ограничиваемся первым приближением, т. е. вдоль оси z от $z = 0$ до $z = h$ помещаем линию стока, мощность которой характеризуется квадратным трехчленом $A + B\zeta + C\zeta^2$ $(0 \leqslant \zeta \leqslant h)$, и, кроме того, на оси z при $z = h$ помещаем точечный сток мощности D. Для потенциала φ на поверхности скважины, т. е. при $x^2 + y^2 = \rho^2$ мы находим (ср. § 17) значения, приведенные в табл. 6 и 7.

Таблица 6

$h = 0{,}5$

z	φ
0	$1{,}5113A + 0{,}2730B + 0{,}0847C + 1{,}8840D$
0,120	$1{,}5064A + 0{,}3111B + 0{,}0918C + 1{,}9043D$
0,250	$1{,}4897A + 0{,}3685B + 0{,}1144C + 1{,}9942D$
0,300	$1{,}4783A + 0{,}3898B + 0{,}1264C + 2{,}0689D$
0,375	$1{,}4491A + 0{,}4150B + 0{,}1453C + 2{,}3006D$
0,425	$1{,}4148A + 0{,}4236B + 0{,}1562C + 2{,}7163D$
0,450	$1{,}3854A + 0{,}4211B + 0{,}1587C + 3{,}2245D$
0,500	$1{,}2076A + 0{,}3531B + 0{,}1321C + 9{,}6218D$

Для случая $h = 0{,}5$ мы приравниваем единице значения φ при $z = 0$; 0,300; 0,425; 0,500 и находим в результате решения получаемой системы линейных уравнений

$$A = 0{,}6212; \quad B = -0{,}2910; \quad C = 1{,}2182; \quad D = 0{,}0199. \qquad (20.1)$$

Таблица 7

$h = 0,75$

z	φ
0	$1,9693A + 0,5590B + 0,2656C + 1,7960D$
0,240	$1,9624A + 0,6575B + 0,2974C + 1,8263D$
0,400	$1,9496A + 0,7443B + 0,3519C + 1,8971D$
0,525	$1,9299A + 0,7991B + 0,4083C + 2,0317D$
0,600	$1,9059A + 0,8387B + 0,4411C + 2,2162D$
0,675	$1,8629A + 0,8326B + 0,4661C + 2,7520D$
0,700	$1,8335A + 0,8435B + 0,4653C + 3,2658D$
0,750	$1,6586A + 0,7135B + 0,3957C + 9,6770D$

Для случая $h = 0,75$ мы приравниваем единице значения φ при $z = 0$; 0,525; 0,675; 0,750 и находим

$$A = 0,4922; \quad B = -0,2391; \quad C = 0,5130; \quad D = 0,0156. \qquad (20.2)$$

Подставляя эти значения в ранее найденные выражения для φ, получаем несколько значений потенциала на поверхности скважины. Эти значения показаны в табл. 8, причем для удобства сравнения присоединен ранее рассмотренный случай $h = 0,25$.

Таблица 8

$h = 0,25$	z	0	0,050	0,090	0,125	0,160	0,200	0,220	0,250
	φ	1	0,999	0,999	1	1,003	1	0,997	1
$h = 0,50$	z	0	0,120	0,250	0,300	0,375	0,425	0,450	0,500
	φ	1	0,995	0,997	1	1,002	1	0,996	1
$h = 0,75$	z	0	0,240	0,400	0,525	0,600	0,675	0,700	0,750
	φ	1	0,990	0,992	1	0,998	1	0,990	1

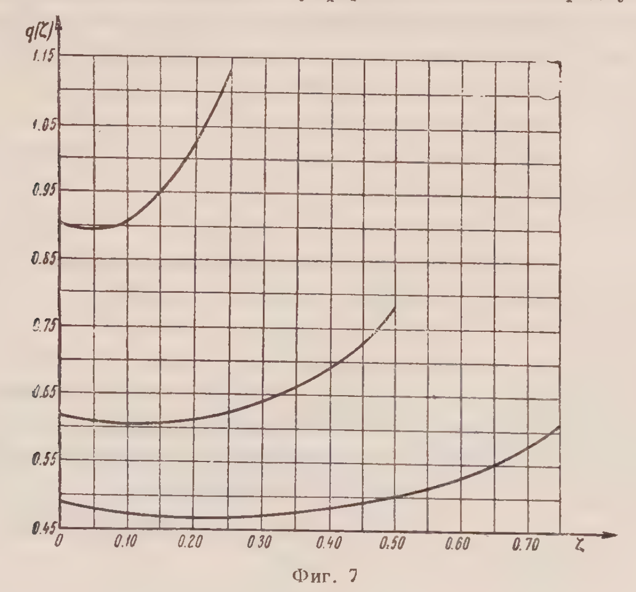
Табл. 8 показывает, что почти во всех случаях можно ограничиться первым приближением. По мере увеличения h результат приближения лишь в незначительной степени ухудшается, хотя мы во всех трех случаях берем одинаковое число узловых точек, в которых приравниваем φ единице. Это объясняется тем, что по мере увеличения h функция $q(\zeta)$ все более приближается к постоянной величине, т. е. кривая, характеризующая распределение мощности линии стока, помещенной на оси скважины, все более приближается к прямой.

На фиг. 7 даны соответствующие приближенные кривые для трех рассмотренных нами случаев. Эти кривые построены по уравнению

$$q(\zeta) = A + B\zeta + C\zeta^2 \quad (0 \leqslant \zeta \leqslant h),$$

причем значения A, B, C даны в (17.3), (20.1) и (20.2).

§ 21. Ниже мы приводим табл. 9, содержащую значения дебита q, в которой для сравнения приведены также значения q для случая $h=0$, т. е. когда скважина заменена полусферической выемкой радиуса $\rho=0,01$



Фиг. 7

на поверхности пласта, и для случая $h=1$, т. е. когда скважина является совершенной (плоская задача).

Таблица 9

h	0	0,25	0,50	0,75	1,00
q	0,057	0,266	0,345	0,390	0,423

Для вычисления q при $h=0$ мы пользуемся формулами (3.1) (4.1) и (4.3), причем полагаем в (4.3) $\zeta=0$; после некоторых упрощений находим

$$\varphi=qG=\frac{2q\alpha}{\pi^2 b}+\frac{q}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{erf}\left[T\sqrt{\rho^2+Z^2}\right]}{\sqrt{\rho^2+Z^2}},$$

где

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad Z=z+2l,$$

а T имеет значение (17.2). Предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\frac{2\pi\varphi}{q}=\frac{4\alpha}{\pi b}+\frac{1-\operatorname{erf}(T\rho)}{\rho}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1-\operatorname{erf}(2Tl)}{l}.$$

Подставляя сюда значения

$$b=20,\quad \rho=0{,}01,\quad T=\frac{2\pi}{b},\quad \alpha=152{,}38$$

и полагая $\varphi=1$, мы находим указанное в таблице значение q.

Для вычисления q при $h=1$ мы пользуемся известной формулой для соответствующей плоской задачи:

$$q=\frac{4\pi\rho}{\frac{\pi a}{b}+2\log\frac{b}{2\pi\rho}-\log 2}.$$

Подставляя сюда значения

$$a=120,\quad b=20,\quad \rho=0{,}01$$

и полагая $\varphi=1$, мы находим указанное в таблице значение q при $h=1$.

Вычисление q для остальных значений h произведено по формуле (9.13).

§ 22. Изложим вкратце результаты вычисления других примеров. Пусть $a=120$, $b=15$, $h=0{,}25$, $\rho=0{,}01$. Находим по формуле (17.2) $\alpha=147{,}95$ и используем вычисления вышеприведенного примера при $b=20$ и $h=0{,}25$. При этом для потенциала на поверхности скважины мы получаем значения, приведенные в табл. 10.

Таблица 10

z	φ
0	$1{,}1251A+0{,}1009B+0{,}0151C+2{,}6483D$
0,050	$1{,}1218A+0{,}1113B+0{,}0163C+2{,}6744D$
0,090	$1{,}1140A+0{,}1242B+0{,}0184C+2{,}7424D$
0,125	$1{,}1024A+0{,}1358B+0{,}0209C+2{,}8595D$
0,160	$1{,}0834A+0{,}1450B+0{,}0242C+3{,}0853D$
0,200	$1{,}0450A+0{,}1535B+0{,}0275C+3{,}7507D$
0,220	$1{,}0091A+0{,}1525B+0{,}0284C+4{,}6993D$
0,250	$0{,}8694A+0{,}1276B+0{,}0238C+10{,}1320D$

Считая попрежнему значения $z=0$; 0,125; 0,200; 0,250 узловыми и приравнивая выражения для φ при этих значениях z единице, находим

$$A=0{,}8090,\quad B=-0{,}5045,\quad C=5{,}2969,\quad D=0{,}0232.$$

Поэтому для значений φ на поверхности скважины мы получаем таблицу 11.

Таблица 11

z	0	0,050	0,090	0,125	0,160	0,200	0,220	0,250
φ	1	1,000	1,000	1	1,003	1	0,999	1

Для дебита q мы находим по формуле (9.13) значение

$$q=0{,}237.$$

Вычислим для сравнения дебит скважины, ось которой совпадает с осью цилиндрического пласта радиуса $\frac{a}{2}=60$, в предположении, что $h=0{,}25$. По формуле (6), помещенной на стр. 274 книги [2], находим при $h=1$, $\bar{h}=0{,}25$, $r_e=60$, $r_w=0{,}01$ и $k\Delta p/\mu=1$ для дебута q значение

$$q=0{,}362.$$

Считая, что в этом случае $b=\infty$ и воспользовавшись значением (17.4), мы получаем табл. 12, показывающую изменение дебита в зависимости от расстояния b между двумя соседними скважинами:

Таблица 12

b	∞	20	15
q	0,362	0,266	0,237

§ 23. Пусть $a=120$, $b=15$, $h=0{,}25$, $\rho=0{,}002$. Здесь значение α, значения v_{l_3} и значения f_{l_3} при $l_3\neq 0$ остаются такими же, как и в предыдущем примере. Приходится вычислять заново лишь значения v_0 и f_0. В результате получаем значения потенциала φ на поверхности скважины, приведенные в табл. 13.

Таблица 13

z	φ
0	$1{,}3810A+0{,}1023B+0{,}0154C+2{,}6481D$
0,050	$1{,}3777A+0{,}1242B+0{,}0170C+2{,}6748D$
0,090	$1{,}3700A+0{,}1474B+0{,}0205C+2{,}7433D$
0,125	$1{,}3583A+0{,}1679B+0{,}0251C+2{,}8610D$
0,160	$1{,}3393A+0{,}1871B+0{,}0307C+3{,}0909D$
0,200	$1{,}3001A+0{,}2045B+0{,}0378C+3{,}7807D$
0,220	$1{,}2631A+0{,}2084B+0{,}0407C+4{,}8360D$
0,250	$0{,}9975A+0{,}1591B+0{,}0315C+41{,}9633D$

Считая значения $z=0$; 0,125; 0,200; 0,250 узловыми, находим

$$A=0{,}6957;\quad B=-0{,}3202;\quad C=3{,}6851;\quad D=0{,}00574;$$

соответствующие значения $\bar{\varphi}$ на поверхности скважины, помещены в табл. 14.

Таблица 14

z	0	0,050	0,090	0,125	0,160	0,200	0,220	0,250
φ	1	0,996	0,997	1	1,003	1	0,990	1

Для дебита q находим значение

$$q=0{,}189,$$

и мы можем составить таблицу, показывающую изменение дебита в зависимости от радиуса скважины (табл. 15).

Таблица 15

ρ	0,01	0,002
q	0,237	0,189

§ 24. В заключение приведем результаты вычисления примера, относящегося ко второй из разобранных в настоящей работе задач (§§ 13—16).

Пусть $a=70$, $b=20$, $c=10$, $h=0,25$, $\rho=0,01$. Вычислием

$$\alpha=\frac{2}{a}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}{}'\frac{e^{-\frac{\pi^2 H_{l_1,l_2}}{4T^2}}}{H_{l_1,l_2}}\cos^2(2l_1+1)\frac{\pi}{2a}=289,58$$

и воспользовавшись результатами других вычислений в приведенных выше примерах при $h=0,25$, находим значения потенциала φ на поверхности скважины (табл. 16).

Таблица 16

z	φ
0	$1,3589A+0,1301B+0,0200C+3,5834D$
0,050	$1,3556A+0,1405B+0,0212C+3,6095D$
0,090	$1,3478A+0,1534B+0,0233C+3,6775D$
0,125	$1,3362A+0,1650B+0,0253C+3,7946D$
0,160	$1,3172A+0,1742B+0,0291C+4,0204D$
0,200	$1,2788A+0,1827B+0,0324C+4,6858D$
0,220	$1,2429A+0,1817B+0,0333C+5,6344D$
0,250	$1,1032A+0,1568B+0,0287C+11,0671D$

При тех же узловых значениях z что и выше, находим

$$A=0,6548;\quad B=-0,2037;\quad C=3,4009;\quad D=0,01915.$$

Таким образом, получаем значения φ на поверхности скважины (табл. 17).

Таблица 17

z	0	0,050	0,090	0,125	0,160	0,200	0,220	0,250
φ	1	1,000	1,001	1	1,003	1	0,998	1

Для дебита q находим

$$q=0,194. \tag{24.1}$$

В целях сравнения значения дебита в последнем примере со значениями дебита, найденными в предыдущих примерах, видоизменим последний пример, положив $a = 120$ вместо $a = 70$; остальные данные примера оставляем без изменений. Используя уже найденное значение (24.1), мы найдем по формуле (16.5), в которой следует положить $\Delta\varphi = 1$ и $l = 50$, следующее значение для дебита скважины:

$$Q = 0,131,$$

которое, как и следовало ожидать, приблизительно вдвое меньше, чем значение (17.4).

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило
26. II. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Muskat, M., Potential distributions in large cylindrical disks with partially penetrating electrodes, Physics, 2 (1932), 329—364.

[2] Muskat, M., The flow of homogeneous fluids through porous media, New York and London, 1937.

[3] Лейбензон, Л. С., Нефтепромысловая механика, ч. II, ОНТИ, Москва—Грозный—Ленинград—Новосибирск, 1934.

[4] Ewald, P. P., Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale, Annalen der Physik, 64 (1921), 253—287.

[5] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A Course of Modern Analysis, Cambridge, 1927.

B. I. SEGAL. SOME THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE POTENTIAL THEORY AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

The three-dimensional problems of the potential theory considered in the present paper are connected mainly with the flow of liquids through porous media. A detail study of two important systems of wells only partly penetrating a sand is performed.

In the first of them is considered an infinite array of vertical wells situated in the middle of an infinite strip (fig. 1). It is assumed that at the vertical sides of the strip the potential is equal to zero, the upper and lower sides of the strip are impermeable and that at the well surfaces the potential has a given value. The problem is reduced to the determination of the potential distribution in the domain of fig. 2 with the boundary conditions (1.3) of the text.

In the second of the mentioned problems is considered an infinite array of vertical wells situated parallel to and at a given distance from one of the vertical sides of an infinite strip (fig. 3). This side as well as the upper and lower ones are supposed to be impermeable. Further, it is supposed that at the other vertical side of the strip the potential is equal to zero and that at the well surfaces the potential has a given value. The problem is reduced to the determination of the potential distribution in the domain of fig. 4 with the boundary conditions (1.4) of the text.

Other analogous problems may be solved by the method stated in the present paper. The method is used to get detailed solutions of several numerical examples.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 359—392 Série mathématique

А. МЫШКИС

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА НА ГРАНИЦЕ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком **С. Л. Соболевым)**

Рассматривается вопрос о существовании полного дифференциала на границе области вещественной евклидовой плоскости.

§ 1

Под областью G с границей G_g мы будем здесь понимать* любое открытое (не обязательно связное) множество вещественной евклидовой плоскости. Мы скажем, что функция $f(B)$, заданная на G вблизи точки $A \in G_g$ и принимающая вещественные** значения, имеет в A полный дифференциал (граничный)

$$df = a\,dx + b\,dy$$

(a и b — постоянные), если существует $\lim\limits_{B\to A} f(B)$ и если

$$f(B) - \lim_{B\to A} f(B) = a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + o(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|),$$

где x_A и y_A — соответственно, абсцисса и ордината точки A (аналогично x_B, y_B)***.

При выполнении этого условия будем обозначать $\lim\limits_{B\to A} f(B)$ через $f(A)$ и называть плоскость

$$z - f(A) = a(x - x_A) + b(y - y_A)$$

касательной к поверхности $z = f(B)$ в точке $\xi = \{x_A, y_A, f(A)\}$.

В отличие от случая, когда A является внутренней точкой $G + A$, полный дифференциал на границе, в случае его существования, не всегда определен однозначно. Здесь нам понадобится следующее определение [см. ([3]) *и* ([4]), стр. 423]: мы скажем, что плоское множество E имеет в точке $K \in E'$ касательную l_K, если:

---

* Обозначение Hausdorff'a; всюду в дальнейшем при любом множестве E мы будем понимать под E_g границу E [([2]), стр. 115], под $\overline{E}$ — замыкание E [([2]), стр. 101], под E' — производное множество от E [([2]), стр. 125]. $E_1 + E_2$ и $E_1 \cap E_2$ означает, соответственно, объединение и пересечение множеств E_1 и E_2.

** Не представляет труда обобщить основные результаты на функции, принимающие комплексные значения.

*** Всюду в дальнейшем, если не будет специальных оговорок, буквой A с индексами или без обозначаются точки G_g, а буквой B — точки G.

a) l_K есть прямая линия, проходящая через K;

b) для любой пары углов с прямолинейными сторонами и общей вершиной K, содержащей l_K (кроме K) строго внутри себя, множество E в достаточной близости от K целиком содержится внутри этих углов ($K \in E$ разрешается) *.

Ясно, что в случае существования такой касательной в K к E, она определена однозначно.

ЛЕММА 1. *Если у $f(B)$ существует в точке $A \in G_g$ полный дифференциал, то он определен однозначно тогда и только тогда, когда G не имеет в A касательной.*

При наличии касательной l_A касательные плоскости к $z = f(B)$ (если есть хоть одна) образуют пучок всех плоскостей, кроме вертикальной, с осью, проектирующейся на l_A.

Доказательство крайне элементарно. Под конусообразной окрестностью $K(P, \xi, \alpha)$ плоскости P с вершиной $\xi \in P$ и углом $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ будем понимать дополнение к топологически замкнутому двуполому круглому конусу, осью которого служит нормаль к P в точке ξ, вершиной — ξ, и плоский угол при вершине которого равен $\pi - 2\alpha$. Легко видеть, что требование того, чтобы плоскость P была касательной в точке ξ к некоторой поверхности, равносильно тому, чтобы для любого α ** в достаточной близости от ξ вся поверхность содержалась внутри $K(P, \xi, \alpha)$.

Если в точке $\xi = \{x_A, y_A, f(A)\}$ поверхность $z = f(B)$ обладает по крайней мере двумя касательными плоскостями P_1 и P_2, то при любом α в достаточной близости от ξ вся поверхность должна содержаться в пересечении $K(P_1, \xi, \alpha) \cap K(P_2, \xi, \alpha)$ (отметим, что ξ не принадлежит поверхности $z = f(B)$, так как $A \bar{\in} G$). Но при достаточно малом α это пересечение проектируется на плоскость XOY внутрь любой фиксированной пары углов с вершиной A, содержащей внутри себя проекцию $P_1 \cap P_2$ на плоскость XOY. Из этого сразу следует, что G имеет в A касательную, являющуюся проекцией прямой пересечения $P_1 \cap P_2$ на плоскость XOY.

Пусть теперь, обратно, G имеет в $A \in G_g$ касательную l_A, а поверхность $z = f(B)$ имеет в $\xi = \{x_A, y_A, f(A)\}$ касательную плоскость P. Тогда из предыдущего непосредственно следует, что для любой другой касательной плоскости P' прямая $P \cap P'$ должна проектироваться на XOY на l_A. Остается убедиться в том, что любая плоскость P_1 такая, что прямая $P_1 \cap P$ проектируется на l_A, кроме вертикальной (которая, согласно нашему определению, не может быть касательной), служит касательной к нашей поверхности в точке ξ.

---

* Согласно терминологии Bouligand'а ([5]) это означает, что контингенция E в K состоит из одного луча или из двух, направленных противоположно друг другу.

** Здесь, как и впредь, будем считать $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Возьмем $K(P_1, \xi, \alpha')$ при любом α. Легко видеть, что всегда можно подобрать такое малое α, а также такую пару углов на XOY с вершиной в A, содержащую l_A внутри себя, что любая точка $K(P, \xi, \alpha)$, проектирующаяся на XOY внутрь этих углов, принадлежит также $K(P_1, \xi, \alpha')$.

Таким образом, из того, что P является касательной плоскостью к поверхности $z=f(B)$, а l_A — касательной к G в A, следует, что в достаточной близости ξ все точки нашей поверхности содержатся внутри $K(P_1, \xi, \alpha')$; следовательно, P_1 является также касательной плоскостью к поверхности в ξ, что и завершает доказательство леммы.

Пусть на G вблизи $A \in G_g$ задана $f(B)$, причем существует $\lim\limits_{B\to A} f(B)$. Пусть f имеет непрерывные частные производные f'_x и f'_y, причем существует $\lim\limits_{B\to A} f'_x(B)=a$ и $\lim\limits_{B\to A} f'_y(B)=b$.

В случае, когда A является внутренней точкой $G+A$, из этого сразу следует наличие в A полного дифференциала $df=a\,dx+b\,dy$. Простые примеры показывают, однако, что для общего случая это уже не всегда верно.

Пример 1. Пусть $G=\sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, где

$$G_i = E\left\{\frac{1}{2i} < x < \frac{1}{2i-1},\ 0<y<1\right\}^{*},$$

а $f(B)$ определена постоянной для каждого G_i, именно,

$$f(G_i)=(-1)^i i^{-1}.$$

Ясно, что в точках G_g с $x=0$ f не обладает полным дифференциалом, в то время как f равномерно непрерывна ** на G и

$$f'_x \equiv f'_y \equiv 0$$

всюду на G.

Пример 2. G можно считать связной. Пусть

$$G=\Gamma+\sum_{i=1}^{\infty} G_i,$$

где

$$G_i=E\left\{\frac{1}{2i}<x<\frac{1}{2i-1},\ 0\leqslant y<1\right\},$$

а

$$\Gamma=E\{0<x<1,\ -1<y<0\},$$

и

$$f(B)=\begin{cases} 0, & \text{если } B\in\Gamma,\\ (-1)^i i^{-1}(y-(1-(1-y)^i)\,i^{-1}), & \text{если } B\in G_i.\end{cases}$$

* Всюду в дальнейшем под $E\{c\}$ понимается множество всех точек, обладающих свойством c.

** Заметим, что требование равномерной непрерывности f на всяком ограниченном подмножестве G эквивалентно требованию возможности расширить f до непрерывной на $\overline{G}$.

Тогда в точках G_g, именно на $E\{x=0,\ 0<y<1\}$ f опять не обладает полным дифференциалом, в то время как f равномерно непрерывна на G вместе со своими частными производными, причем

$$f'_x \equiv 0, \quad \lim_{x\to 0} f'_y = 0.$$

Пример 3. Легко осуществить и локальную связность G в рассматриваемой граничной точке. Пусть G в полярных координатах имеет вид:

$$G=E\left\{3\pi<\varphi<\infty,\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varphi+2\pi}+\frac{2}{\varphi}\right)<\rho<\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\varphi}+\frac{1}{\varphi-2\pi}\right)\right\},$$

т. е. G имеет вид спирали с фокусом в начале координат O и φ естественным образом является однозначной функцией точки G. Положим

$$f(\rho,\ \varphi)=\frac{1}{\varphi}.$$

Тогда f равномерно непрерывна на G и $f(O)=0$. Прямой подсчет показывает, что f'_x и f'_y равномерно непрерывны на G, причем

$$\lim_{B\to 0} f'_x(B) = \lim_{B\to 0} f'_y(B) = 0.$$

Однако в точке $O \in G_g$ f не имеет полного дифференциала.

Пример 4. Пусть $\varphi_0(x)$ есть непрерывная функция при $0<x\leqslant 1$, график которой представляет собой бесконечнозвенную ломаную с последовательными вершинами

$$A_1=\{x_1,\ y_1\},\ A_2=\{x_2,\ y_2\},\ \ldots,\ A_n=\{x_n,\ y_n\},\ \ldots,$$

координаты которых задаются следующими соотношениями:

$$x_{2i-1}=\frac{1}{i!}, \quad x_{2i}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i!}+\frac{1}{(i+1)!}\right),$$

$$y_{2i-1}=0, \qquad y_{2i}=2^{-i}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ldots).$$

Пусть G представляет собой область

$$G=E\{0<x<1, \quad \varphi_0(x)-e^{-2x^{-1}}<y<\varphi_0(x)+e^{-2x^{-1}}\},$$

и $f(x,y)$ определена следующим образом: на каждом из участков $x_i\leqslant x<x_{i+1}$, где имеется всего одно звено ломаной $y=\varphi_0(x)$, f постоянна по x, причем в точках, лежащих строго выше (ниже) всего рассматриваемого звена, f равна своему значению в верхнем (нижнем) конце этого звена. Остается определить значение f вдоль каждого звена ломаной. Пусть

$$f_0(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{1}{3}, \\ 1+\cos 3\pi x & \text{при} \quad \frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3}, \\ 2 & \text{при} \quad \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Зададим f на звеньях следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x_{4i-1}\left(2-f_0\left(\dfrac{x-x_{4i-2}}{x_{4i-3}-x_{4i-2}}\right)\right) & \text{при } x_{4i-2}\leqslant x<x_{4i-3}, \\ x_{4-1}\left(4-f_0\left(\dfrac{x-x_{4i-1}}{x_{4i-3}-x_{4i-2}}\right)\right) & \text{при } x_{4i-1}\leqslant x<x_{4i-2}, \\ x_{4i-1}\left(2+f_0\left(\dfrac{x-x_{4i}}{x_{4i-1}-x_{4i}}\right)\right) & \text{при } x_{4i}\leqslant x<x_{4i-1}, \\ x_{4i-1}\cdot f_0\left(\dfrac{x-x_{4i+1}}{x_{4i-1}-x_{4i}}\right) & \text{при } x_{4i+1}\leqslant x<x_{4i} \end{cases}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Легко проверить, что построенная функция $f(B)$ равномерно непрерывна на всей G, причем $f(0)=0$, и обладает равномерно непрерывными частными производными f'_x и f'_y, стремящимися к нулю при приближении к началу координат O. В то же время f не обладает в точке O полным дифференциалом уже потому, что $f(B)\cdot x_B^{-1}$ не имеет определенного предела, когда B стремится по оси абсцисс к O, оставаясь внутри G. В данном случае G ограничена простым замкнутым спрямляемым контуром, и точка O достижима из любой внутренней точки G посредством спрямляемой кривой.

Нам придется несколько развить понятие достижимости граничной точки, связав его с метрикой.

Под $d_r(B_1B_2)$ $(B_1\in G,\ B_2\in G)$ мы будем, следуя М. Лаврентьеву [([6]), стр. 1408], понимать нижнюю грань длин спрямляемых кривых, соединяющих B_1 с B_2 по G, если такие кривые есть; в противном случае $d_r(B_1B_2)=\infty$.

Если $A\in G_g$, $B\in G$, то, по определению,

$$d_r(BA)=\lim_{B_1\to A,\ B_1\in G}\inf d_r(B_1B).$$

Обозначим через $r(AB)$ расстояние между A и B. Точку $A\in G_g$ назовем **хорошо достижимой**, если вблизи A отношение $\dfrac{d_r(BA)}{r(BA)}$ $(B\in G)$ ограничено; в противном случае назовем точку A **плохо достижимой**.

ЛЕММА 2. *Пусть $A\in G_g$ является хорошо достижимой точкой G и*

$$\lim_{B\to A,\ B\in G}\sup\frac{d_r(BA)}{r(BA)}=c_1.$$

Пусть на G вблизи A задана $f(B)$, имеющая $\lim\limits_{B\to A,\ B\in G} f(B)$. Пусть модули всех восьми частных производных чисел Df (четыре по x (D_xf) и четыре по y (D_yf)) при приближении к A по G имеют верхний предел $\leqslant c_2$. В этом случае

$$\lim_{B\to A,\ B\in G}\sup\left|\frac{f(B)-\lim\limits_{B'\to A} f(B')}{r(BA)}\right|\leqslant 2\sqrt{2}\,c_1c_2.$$

Доказательство. Пусть при $r(BA)<R$

$$\frac{d_r(BA)}{r(BA)}<c_1+\varepsilon_1,$$

и все

$$|Df| < c_2 + \varepsilon_2$$

и пусть

$$r(BA) = r < R.$$

Выберем последовательно в G точки $B_0 = B, B_1, B_2, \ldots$ так, чтобы

$$r(AB_i) < \frac{r}{2^i}, \quad d_r(B_i B_{i+1}) < \frac{r}{2^i}(c_1 + \varepsilon_1) \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Соединим B_i с B_{i+1} ломаной длины $< \frac{r}{2^i}(c_1 + \varepsilon_1)\sqrt{2}$ с конечным числом звеньев, попеременно параллельных координатным осям, и оценим приращения f на каждом из этих звеньев; суммируя полученные неравенства, найдем

$$|f(B_i) - f(B_{i+1})| < \frac{r}{2^i}(c_1 + \varepsilon_1)(c_2 + \varepsilon_2)\sqrt{2}.$$

Суммируя эти неравенства от $i = 0$ до $i = n$ и переходя затем к пределу при $n \longrightarrow \infty$, получим

$$|f(B) - \lim_{B' \to A} f(B')| < 2\sqrt{2}\, r(c_1 + \varepsilon_1)(c_2 + \varepsilon_2).$$

Из этого соотношения непосредственно следует утверждение леммы.

Из доказательства, между прочим, следует, что любую точку B области G, лежащую в достаточно малой окрестности хорошо достижимой точки $A \in G_g$, можно соединить спрямляемой кривой без самопересечений, целиком, кроме своего конца A, лежащей в G.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть на G вблизи хорошо достижимой $A \in G_g$ задана $f(B)$, имеющая $\lim_{B \to A,\, B \in G} f(B)$, причем все четыре производных числа $D_x f$ имеют в A предел a, а все $D_y f$ — предел b. Тогда выражение $a\,dx + b\,dy$ есть полный дифференциал f в A* (назовем его в этом случае предельным).

Обратно, если $A \in G_g$ есть плохо достижимая точка, то на G существует такая f, что $\lim_{B \to A,\, B \in G} f(B) = 0$, все Df ограничены на G и стремятся к 0 при подходе к A, однако в A у f нет полного дифференциала.

Доказательство. Пусть выполнены условия первой части теоремы. Тогда выражение

$$f_1(B) = f(B) - a(x_B - x_A) - b(y_B - y_A)$$

имеет

$$\lim_{B \to A,\, B \in G} f_1(B) = \lim_{B \to A,\, B \in G} f(B)$$

и все $Df_1 \underset{B \to A}{\longrightarrow} 0$. Отсюда, учитывая лемму 2, имеем

$$\lim_{B \to A,\, B \in G} \left| \frac{f_1(B) - \lim_{B' \to A} f_1(B')}{r(BA)} \right| = 0;$$

переходя к $f(B)$, получаем требуемое.

Пусть теперь $A \in G_g$ есть плохо достижимая точка. Тогда возможны два случая:

1°. Пусть $d_r(BA) \underset{B\to A,\ B\in G}{\not\to} 0$. Возьмем последовательность

$$B_i \in G \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad B_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} A$$

так, чтобы

$$d_r(B_iA) > 2\varepsilon > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Так как при переходе к подпоследовательности эти соотношения не изменятся, и так как для каждого i существует такое $n_0 = n_0(i)$, что при $n > n_0$ $d_r(B_iB_n)$ будет больше 2ε, то без ограничения общности можно считать, что

$$d_r(B_iB_j) > 2\varepsilon \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots),$$

и последовательность лучей, проведенных из A в B_i сходится.

Пусть

$$f_i(B) = \begin{cases} r(B_iA)[\varepsilon - d_r(BB_i)], & \text{если } B \in G,\ d_r(BB_i) \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{, если } B \in G,\ d_r(BB_i) > \varepsilon. \end{cases}$$

Положим

$$f(B) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i f_i(B).$$

Тогда функция $f(B)$ — искомая. В самом деле, множества $E_i = E\{f_i \neq 0\}$ попарно не имеют общих точек; кроме того, $A \in \bar{E}_i$, $\max f_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и все $|Df_i|$ не превосходят $r(B_iA)$. Отсюда следует, что f непрерывна в G и $f(B) \underset{B\to A}{\longrightarrow} 0$. Далее, все производные числа Df ограничены на G и стремятся к 0 при подходе к A. В то же время

$$f(B_i) = (-1)^i r(B_iA) \cdot \varepsilon.$$

Из этого, а также из сходимости лучей $\overline{AB_i}$ легко следует отсутствие какого бы то ни было полного дифференциала в A.

2°. Пусть $d_r(BA) \underset{B\to A,\ B\in G}{\longrightarrow} 0$; тогда

$$\lim_{B\to A,\ B\in G} \sup \frac{d_r(BA)}{r(BA)} = \infty.$$

Положим

$$\psi(r) = \sup_{r(BA)=r,\ B\in G} d_r(BA) \quad (0 < r < r_0).$$

Тогда $\psi(r) \geqslant r$, $\psi(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ и, кроме того, $\lim_{r\to 0} \sup \frac{\psi(r)}{r} = \infty$. Возьмем последовательность $r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > r_i > \ldots > 0$ так, чтобы

$$\psi(r_{i+1}) < \frac{\psi(r_i)}{2}, \quad \frac{\psi(r_{i+1})}{r_{i+1}} > \frac{\psi(r_i)}{r_i} \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad \lim_{i\to\infty} \frac{\psi(r_i)}{r_i} = \infty.$$

Определим $\varphi(s)$ при $0 < s < \infty$; именно, при $\psi(r_{i+1}) < s \leqslant \psi(r_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ положим

$$\varphi(s) = \sqrt{r_{i+1}\psi(r_{i+1})} + \frac{s - \psi(r_{i+1})}{\psi(r_i) - \psi(r_{i+1})}\left(\sqrt{r_i\psi(r_i)} - \sqrt{r_{i+1}\psi(r_{i+1})}\right),$$

а при $s > \psi(r_1)$

$$\varphi(s) = \varphi(\psi(r_1)).$$

Тогда

$$f(B) = \varphi(d_r(BA))$$

будет искомой функцией, что легко проверить. В частности,

$$|Df(B)| \leqslant D\varphi(d_r(BA)) \underset{B \to A}{\longrightarrow} 0 \quad \text{и} \quad \lim_{B \to A,\, B \in G} \sup \frac{f(B)}{r(BA)} = \infty,$$

откуда следует отсутствие полного дифференциала в A.

Заметим, что лемма 2 и теорема 1 непосредственно переносятся на функции любого конечного числа независимых вещественных переменных. Как определения, так и доказательства совершенно аналогичны плоскому случаю. Единственным изменением является замена в лемме $\sqrt{2}$ на $\sqrt{n}$, где n — число независимых переменных.

Таким образом, в исследовании условий существования полного дифференциала на границе области большую роль играет изучение множества плохо достижимых точек. Здесь можно утверждать следующее:

1°. Для выпуклых областей, а также для областей, ограниченных замкнутой несамопересекающейся кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны и

$$|x'(t)| + |y'(t)| > c > 0,$$

кроме конечного числа значений t, при которых $x'(t)$ и $y'(t)$ терпят разрывы 1-го рода, все точки границы хорошо достижимы. При этом углы в контуре G могут равняться нулю.

Единственным случаем, требующим проверки, является последний; однако и тут доказательство чрезвычайно просто. Без ограничения общности мы можем считать исследуемую точку $A \in G_g$ совпадающей с началом координат, а угол — направленным острием в сторону отрицательной части оси абсцисс. Тогда G вблизи A совпадает с областью, заключенной между графиками кривых $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены при $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon > 0$, непрерывно дифференцируемы там, и

$$f_1(0) = f_2(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0, \quad f_2(x) > f_1(x) \quad (0 < x \leqslant \varepsilon).$$

Всякую точку $B \in G$ вблизи A можно соединить с A сначала по вертикальному отрезку до пересечения с графиком кривой

$$y = f_0(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x)),$$

и затем вдоль последней кривой до A. Отсюда получаем даже, что для всех точек A границы G в случаях 1°

$$\lim_{B \to A,\, B \in G} \frac{d_r(BA)}{r(BA)} = 1.$$

2°. Существуют такие области, для которых плохо достижимые точки заполняют целый отрезок (примеры 1 и 2) или даже всю границу. Простейшим примером этого может служить область G, полученная вращением

дополнения к канторову множеству на отрезке вокруг его центра. На этой области можно задать равномерно непрерывную $f(B)$, постоянную на каждом смежном плоском кольце, т. е. обладающую $f'_x \equiv f'_x \equiv 0$ и не имеющую ни в какой точке G_g полного дифференциала. Такую функцию можно получить из левой половины известной канторовой кривой, отображающей канторово множество на отрезок, при помощи такого же вращения.

Отсутствие граничного полного дифференциала следует из того, что канторова кривая в каждой точке своего роста имеет наибольшее из производных чисел равным бесконечности.

Можно указать и связную область, все граничные точки которой плохо достижимы; для этого достаточно взять известный пример Brouwer'a (7).

Небольшим усложнением примера 4 (накоплением особенностей) легко построить связную область G, ограниченную простой замкнутой спрямляемой кривой, множество плохо достижимых точек границы которой бесконечно (счетно).

Можно требовать существования точных частных производных на G в окрестности испытуемой точки ее границы, а также непрерывности этих производных на G. Естественно ожидать, что после соответствующего усовершенствования конструкции второй части теоремы 1 критерий существования полного дифференциала не изменится.

Можно, далее, исследовать функции, равномерно непрерывные в некоторой окрестности исследуемой точки границы. При этом условие существования граничного полного дифференциала изменится, что подтверждает следующий пример.

П р и м е р 5. Пусть G представляет собой область

$$G = E\{0 < x < 2, \quad -2 < y < 2\} - E\{0 < x < 1, \quad y = \sin\frac{1}{x}\}.$$

Все точки интервала $T = E\{x = 0, \quad -1 < y < 1\} \subset G_g$ недостижимы изнутри. Однако, если в окрестности $U(A)$ любой точки A этого интервала задать на G, равномерно непрерывную $f(B)$ с существующими пределами в A производных чисел

$$\lim D_x f = a, \quad \lim D_y f = b,$$

то выражение $adx + bdy$ будет полным дифференциалом f в A. Действительно, $f(B)$ можно расширить до непрерывной на $(\bar{G} - T) \cap U(A)$. Полученная функция, как легко видеть, имеет все частные производные числа стремящимися, соответственно, к тем же пределам a и b. Отсюда по общей теореме следует, что $adx + bdy$ является полным дифференциалом в A для расширенной функции, а тем более для исходной.

При рассмотрении этих вопросов на прямой целый ряд свойств значительно упрощается. Так, плохая достижимость $A \in G_g$ равносильна локальной несвязности CG (дополнения к G) в A. Здесь можно требовать от построенной $f(B)$ существования и непрерывности на G

точной производной f'. При дополнительном условии равномерной непрерывности f вблизи $A \in G_g$ существование предельного полного дифференциала, как легко показать, следует из существования предела производной или производных чисел тогда и только тогда, когда A является точкой локальной связности дополнения к совершенному ядру множества CG.

Рассмотрим еще одну возможную ситуацию в граничной точке области. Может оказаться, что для функции $f(B)$, заданной на G в окрестности точки $A \in G_g$, существуют

$$\lim_{B\to A} f(B) = f(A), \quad \lim_{B\to A} f'_x(B) = a, \quad \lim_{B\to A} f'_y(B) = b,$$

а в точке A у f имеется полный дифференциал, не равный $adx + bdy$. Будем называть такой полный дифференциал непредельным. Он может появиться и тогда, когда G не имеет в A касательной; в последнем случае предельный полный дифференциал необходимо отсутствует.

Простейшими здесь будут области, данные в примерах 1 и 2. Для G примера 1 достаточно положить на каждом G_i постоянно

$$f(G_i) = \frac{1}{i};$$

в этом случае во всех точках предельного отрезка $E\{x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ существует единственный (непредельный) полный дифференциал

$$df = 2dx.$$

Для G примера 2 положим аналогично

$$f(B) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } B \in \Gamma, \\ \frac{1}{i}\left(y - \frac{1-(1-y)^i}{i}\right), & \text{ если } B \in G_i; \end{cases}$$

в этом случае легко показать, что во всех точках предельного полуинтервала $E\{x = 0,\ \ 0 < y \leqslant 1\}$ существует единственный (непредельный) полный дифференциал

$$df = 2y\,dx.$$

Можно привести пример, аналогичный 3-му.

Пример 6. Пусть G в полярных координатах имеет вид:

$$G = E\left\{3\pi < \varphi < \infty,\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varphi + 2\pi} + \frac{2}{\varphi}\right) + 1 < \rho < \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\varphi} + \frac{1}{\varphi - 2\pi}\right) + 1\right\};$$

таким образом, G имеет вид спирали, накручивающейся на окружность $\rho = 1$. Положим

$$f(\rho,\ \varphi) = \frac{1}{\varphi} + 1.$$

Тогда f равномерно непрерывна на G и обладает равномерно непрерывными f'_x и f'_y, причем при приближении к предельной окружности эти частные производные стремятся к 0. В то же время прямой подсчет показывает, что в каждой точке $\{\varphi_0,\ 1\}$ предельной окружности существует единственный (непредельный) полный дифференциал

$$df = \cos\varphi_0 \cdot dx + \sin\varphi_0 \cdot dy.$$

Недостаточно требовать локальной связности G в A. Так, на области G примера 4 нетрудно осуществить ту же ситуацию; для этого достаточно строить $f(x, y)$ так же, как в примере 4, но на звеньях задавать f следующим образом: на каждом участке $[x_i, x_{i-1}]$ найдем точки $x_i < a_i < b_i < x_{i-1}$ так, что

$$\varphi_0(a_i) = \varphi_0(x_i) - (-1)^i e^{-2x_i^{-1}},$$

$$\varphi_0(b_i) - (-1)^i e^{-2b_i^{-1}} = \varphi_0(x_{i-1}).$$

На каждом звене $f(x, y)$ зададим как непрерывно дифференцируемую функцию $f(x)$ одной переменной; пусть при достаточно больших i

$$f(x) = \begin{cases} x_i & \text{на } [x_i, a_i], \\ x_{i-1} & \text{на } [b_i, x_{i-1}], \end{cases}$$

причем будем считать $f(x)$ выпуклой книзу (кверху) для нечетного (четного) i на $[a_i, 2a_i - x_i]$, выпуклой кверху (книзу) для нечетного (четного) i на $[2b_i - x_{i-1}, b_i]$ и линейной на $[2a_i - x_i, 2b_i - x_{i-1}]$.

Легко показать, что при выполнении этих условий $f(B)$ определится на G вблизи начала координат O как равномерно непрерывная функция, обладающая равномерно непрерывными частными производными, стремящимися к 0 при подходе к O, и имеющая в O единственный непредельный полный дифференциал $df = dx$. Накоплением особенностей можно построить пример связной области, ограниченной простой замкнутой спрямляемой кривой и на ней равномерно непрерывной f с равномерно непрерывными точными f'_x и f'_y и везде существующим единственным граничным полным дифференциалом с бесконечным (счетным) множеством точек, где этот дифференциал непределен.

В то же время не в любой плохо достижимой точке границы может существовать непредельный полный дифференциал.

Пример 7. Выделим на плоскости последовательность точек $A_i = \{x_i, y_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ с координатами

$$x_{4k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad x_{4k+2} = \frac{1}{2k+1}, \quad x_{4k+3} = \frac{-1}{2k+2}, \quad x_{4k+4} = \frac{-1}{2k+2},$$

$$y_{4k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad y_{4k+2} = \frac{-1}{2k+2}, \quad y_{4k+3} = \frac{-1}{2k+2}, \quad y_{4k+4} = \frac{1}{2k+3},$$

$$(k = 0, 1, \ldots).$$

Пусть $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$, где G_i — множество точек плоскости, удаленных от отрезка A_iA_{i+1} на расстояние $\frac{1}{2i^3}$. Начало координат $O \in G_g$ вообще недостижимо изнутри G посредством спрямляемой кривой, т. е. и подавно является плохо достижимой точкой. В то же время, если на G вблизи A задана $f(B)$, имеющая

$$\lim_{B \to A,\ B \in G} f(B) = f(A)$$

и если

$$\lim_{B\to A} D_x f = \lim_{B\to A} D_y f = 0$$

(что не ограничивает общности), то разность значений функции в соседних точках A_i является бесконечно малой высшего порядка в сравнении с расстоянием этих точек до O. Отсюда легко следует, что полный дифференциал f в O, если он существует, может быть только предельным, именно $dz = 0$,

Повидимому, возможность существования непредельного полного дифференциала в $A \in G_g$ связана со свободой перемещения по G вблизи A в различных направлениях.

§ 2

Такое различение дифференциальных свойств вблизи граничных точек применимо к следующей задаче И. Г. Петровского:

Пусть область G представлена в виде суммы попарно не пересекающихся множеств

$$G = G_1 + G_2 + D,$$

где G_1 и G_2 суть области, а $D = G \cap G_{1g} = G \cap G_{2g}$.

Пусть на $G \cap \overline{G}_1$ и $G \cap \overline{G}_2$ заданы соответственно непрерывные функции $f_1(B)$ и $f_2(B)$, совпадающие на D (т. е. образующие на G единую функцию $f(B)$) и имеющие непрерывные частные производные каждая на своей области задания (G_1 и G_2). Пусть на D

$$|f'_{1x} - f'_{2x}| + |f'_{1y} - f'_{2y}| > 0.$$

Ставится вопрос о том, когда D имеет простую структуру — например, является кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ с непрерывными $x'(t)$ и $y'(t)$ и $|x'(t)| + |y'(t)| > 0$.

Мы здесь сознательно не уточняли смысла производных в точках D для того, чтобы показать различие, которое получается при разных подходах.

Если требовать на D только существования и различия пределов из G_1 и G_2 полных дифференциалов функций f_1 и f_2, то D может иметь еще очень сложную структуру.

Пример 8. Пусть $G = E\{-1 < x < 1, \; -1 < y < 1\}$. Определим последовательность чисел $x_0 = 1, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ по закону

$$x_{2k} = \frac{1}{2^k}, \quad x_{2k+1} = \frac{x_{2k} + x_{2k+2}}{2} = \frac{3}{2^{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Пусть

$$G'_i = E\{x_i < x < x_{i-1}, \quad -1 < y < 1\} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$
$$G'_0 = E\{-1 < x < 0, \quad -1 < y < 1\},$$

$$G_1 = \sum_{k=0}^{\infty} G'_{2k}, \quad G_2 = \sum_{k=0}^{\infty} G'_{2k+1}, \quad D = \sum_{k=1}^{\infty} E\{x = x_k, -1 < y < 1\} + $$
$$+ E\{x = 0, -1 < y < 1\},$$

$f_1(B) = x_B$ на $\overline{G}'_0$, $f_1(B) = x_B - x_{2k}$ на $\overline{G}'_{2k}$, $f_2(B) = x_{2k} - x_B$ на $\overline{G}_{2k+1}$;

Ясно, что все условия выполнены. Можно представить и более сложные примеры.

ЛЕММА 3. *Если при всех предположениях, сделанных в начале § 2, в точке $A \in D$ поверхности $z = f_1(B)$, определенная на G_1 и $z = f_2(B)$, определенная на G_2, имеют несовпадающие касательные плоскости P_1 и P_2, то D имеет в A касательную, являющуюся проекцией на XOY прямой пересечения этих плоскостей.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 1; надо рассматривать функцию $f(A')$, определенную на D, и учесть, что множество $z = f(A')$ при $A' \in D$ имеет в точке $\{x_A, y_A, f(A)\}$ касательные плоскости P_1 и P_2 (при естественном определении такой касательной плоскости с помощью $K(P, \xi, \alpha)$).

Следствие. *Если направление касательных плоскостей P_1 и P_2 меняется непрерывно в зависимости от $A' \in D$, то касательная к D меняет свое направление также непрерывно.*

Это осуществляется, например, когда дифференциалы, соответствующие касательным плоскостям, являются предельными. В этом случае элементарной особенностью является точка возврата; ее легко осуществить на примере.

Пример 9. Пусть

$$G = E\{-1 < x < 1, \quad -1 < y < 1\}, \quad G_1 = E\{y^3 < x^2, \quad |x| < 1\},$$
$$G_2 = E\{y^3 > x^2; \quad |x| < 1\}, \qquad D = E\{y^3 = x^2, \quad |x| < 1\}.$$

При построении f мы используем следующий прием, нужный для дальнейшего: пусть K есть множество точек плоскости, измеримое (L) на каждой горизонтальной прямой; тогда под $f_K(B)$, где B — любая точка плоскости, мы будем понимать линейную меру множества $E\{x < x_B, \ y = y_B\}$ (случай $f_K(B) = \infty$ не исключается).

Итак, положим на всем G

$$f(B) = f_{G_2}(B).$$

Ясно, что все условия выполнены; в частности, на D f_1 и f_2 имеют предельные полные дифференциалы, различные, так как в G_1 $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$, а в G_2 $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$.

Из точек возврата можно образовать более сложные особенности.

Пример 10. Возьмем последовательность точек $A_1 = \{x_1, y_1\}$, $A_2 = \{x_2, y_2\}$, ..., координаты которых задаются следующим образом:

$$x_k = \frac{1}{k}, \quad y_{2k-1} = \sqrt{2k-1}, \quad y_{2k} = 2\sqrt{2k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Определим непрерывную функцию $y = \varphi(x)$ на $0 < x < 1$, положив

$$\varphi(x) = \frac{y_k - y_{k+1}}{\pi} \arcsin \frac{2x - (x_k + x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} + \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

на $x_{k+1} < x < x_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. График функции $y = \varphi(x)$ содержит последовательность точек возврата, накапливающуюся к началу координат.

Пусть

$G_1 = E\{-1<x<0,\ |y|<2\} + E\{0 \leqslant x < 1,\ y < 0\} + E\{0<x<1,\ y<\varphi(x)\}$,

$G_2 = E\{0 < x < 1,\ y > \varphi(x)\}$,

$D = E\{x = 0,\ 0 \leqslant y < 1\} + E\{0 < x < 1,\ y = \varphi(x)\}$,

$f(B) = f_{G_2}(B)$.

Легко проверить, что функции f_1 и f_2 обладают на D различными предельными полными дифференциалами $\left(\text{для проверки вблизи начала координат следует учесть сходимость ряда } \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}} \right| \right)$.

Если требовать для каждой точки D существования единственных полных дифференциалов (конечно, различных между собой) у каждой из функций f_1 и f_2, то по лемме 1 точек возврата быть не может. Однако и здесь возможны довольно сложные особенности.

Пример 11. Пусть

$$y'_i = \frac{1}{2i-1}, \quad y''_i = \frac{1}{2i},$$

$$G'_i = E\left\{ y'_i > y > y''_i,\ 0 < x < (y'_i - y''_i)^2 \cos^2 \pi \frac{2y - (y'_i + y''_i)}{2(y'_i - y''_i)} \right\},$$

$$G''_i = E\left\{ y'_i > y > y''_i,\ -(y'_i - y''_i)^2 \cos^2 \pi \frac{2y - (y'_i + y''_i)}{2(y'_i - y''_i)} < x < 0 \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$G'_0 = E\{-1 > x < 0,\ |y| < 1\}, \quad G''_0 = E\{0 < x < 1,\ |y| < 1\},$$

$$G_1 = \sum_{i=1}^{\infty} G'_i + G'_0 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \bar{G}''_i \right) \cap G'_0,$$

$$G_2 = \sum_{i=1}^{\infty} G''_i + G''_0 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \bar{G}'_i \right) \cap G''_0,$$

$$G = E\{|x| < 1,\ |y| < 1\}, \quad f(B) = f_{G_2}(B).$$

Начало координат является точкой накопления особых точек D.

Впоследствии мы увидим, что при дополнительном требовании единственности полных дифференциалов особенности D могут получиться только за счет несвязности G_1 и G_2 (в примере 11 каждое из них состоит из ∞ компонент связности).

Пусть D вблизи точки $A \in D$ можно представить в виде $y = \varphi(x)$, где φ однозначна и непрерывна при $a < x < b$ $(a < x_A < b)$. Тогда при наличии на D различных полных дифференциалов у f_1 и f_2 график $y = \varphi(x)$ имеет, по предыдущему, в каждой своей точке касательную. По теореме Серпинского* ([8]) $\varphi(x)$ в этом случае имеет для всех x, кроме, быть может, счетного множества значений, производную (равную, возможно, бесконечности определенного знака). Таким образом,

* В полной общности эта теорема доказана G. C Young ([9]).

множество точек возврата (единственная возможная здесь особенность) может иметь мощность не более, чем счетную.

Если требовать единственности полного дифференциала на D, то точек возврата вообще не будет, и в качестве D получается всюду дифференцируемая кривая ($\varphi' = +\infty$ и $\varphi' = -\infty$ допускаются).

Если требовать только существования и различия на D пределов полных дифференциалов, то даже в последнем предположении ($D = E\{a < x < b,\ y = \varphi(x)\}$) могут быть более сложные особенности.

Пример 12. Положим

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \varphi = E\{|x| < 1,\ |y| < 1\}.$$

Пусть G_1 и G_2 симметричны относительно оси OY и
$\{0, 0\} \in D, \quad E\{x = 0,\ 0 < y < 1\} \subset G_2, \quad E\{x = 0,\ -1 < y < 0\} \subset G_1$.

Зададим G_1 и G_2 при $0 < x < 1$. Для этого построим непрерывную функцию $y = \varphi(x)$, положив

$$y = \frac{y_k - y_{k-1}}{\pi} \arcsin \frac{2x - (x_k + x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} + \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \text{ на } x_{k-1} \leqslant x < x_k \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть

$$G_1 \cap E\{0 < x < 1\} = E\{0 < x < 1,\ y < \varphi(x)\},$$
$$G_2 \cap E\{0 < x < 1\} = E\{0 < x < 1,\ y > \varphi(x)\},$$
$$D \cap E\{0 < x < 1\} = E\{0 < x < 1,\ y = \varphi(x)\},$$
$$f(B) = f_{G_2}(B).$$

Нетрудно показать, аналогично примеру 9, что все условия выполнены; однако у функции $y = \varphi(x)$ при $x = 0$ обе верхние производные равны $+\infty$; а обе нижние $-\infty$. Во всех точках D, кроме начала координат O, у f_1 и f_2 существуют различные предельные полные дифференциалы. В точке же O существуют только пределы полных дифференциалов, или, что то же, пределы непрерывных в G_1 и G_2 частных производных f_1 и f_2, именно,

$$\lim_{B \to O} \frac{\partial f_1}{\partial y} = \lim_{B \to O} \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{|y_k - y_{k-1}|} \cos \frac{\pi}{2} \frac{y_k + y_{k+1}}{y_k - y_{k+1}}$$

$$\lim_{B \to O} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad \lim_{B \to O} \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1.$$

§ 3

Представляется естественным, вне связи с задачей Петровского, исследовать вообще множества D, заданные на плоской области G, плотные в себе, замкнутые относительно G и имеющие в каждой своей точке A касательную l_A, направление которой зависит от A непрерывно. Будем требовать также выполнения следующего условия (условие n): в любой точке $A \in D$ и любой окрестности $U(A)$ имеются

точки D по обе стороны* от нормали n_A к D (нормаль n_A определяется, естественно, как прямая, проходящая через A и перпендикулярная к l_A)

На протяжении § 3 будем предполагать, что D удовлетворяет всем вышеуказанным требованиям.

Рассмотрим поведение D вблизи произвольной точки $A \in D$. Без ограничения общности будем предполагать, что $x_A = y_A = 0$ и l_A совпадает с осью OX. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *При сделанных предположениях относительно D и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество $D_\varepsilon = D \cap E\{|x| < \varepsilon, \ |y| < \varepsilon\}$ заключено между графиками непрерывно дифференцируемых функций: наибольшей $y = y_1(x)$ и наименьшей $y = y_2(x)$, определенных при $|x| < \varepsilon$. При этом*

$$y_2(x) \leqslant y_1(x), \quad |y_1(x)| < \varepsilon, \quad |y_2(x)| < \varepsilon,$$
$$y_1(0) = y_2(0) = y_1'(0) = y_2'(0),$$

и эти графики сами принадлежат D.

Через каждую точку $A' \in D_\varepsilon$ проходит по крайней мере одна непрерывно дифференцируемая кривая $y = \varphi(x, A')$, определенная при $|x| < \varepsilon$ и целиком принадлежащая D_ε; среди таких кривых при данной A' также имеются наибольшая и наименьшая; все такие кривые соприкасаются в A', и направление их общей касательной при приближении A' к A стремится к горизонтальному.

Обратно, всякое замкнутое в G множество D, имеющее такую структуру вблизи каждой своей точки, удовлетворяет всем условиям первого абзаца § 3.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$E\{|x| < \varepsilon, \ |y| < \varepsilon\} \subset G$$

и чтобы касательные к D в точках D_ε, а также хорды, соединяющие A с точками D_ε, имели все угловой коэффициент, по абсолютной величине меньший единицы.

Поставим в соответствие каждому x, $|x| < \varepsilon$, наибольшую из ординат $y_1(x)$ точек множества D_ε, имеющих абсциссу x (существование таковой при наличии хоть одной точки D_ε с данной абсциссой следует из замкнутости D).

Пусть E — множество тех значений x, для которых $y_1(x)$ определена. Тогда E замкнуто на интервале $|x| < \varepsilon$, что непосредственно следует из замкнутости D и условия, наложенного на угловые коэффициенты хорд.

Далее, $0 \in E$. Кроме того, каждая точка E является двусторонней предельной, что следует из выполнения условия n и наличия в каждой

---

* Это осуществляется, в частности, при рассмотрении задачи Петровского, если требовать единственности граничных полных дифференциалов f_1 и f_2 на G. Согласно терминологии Bouligand'a ([5]), условие n означает, что контингенция D в A состоит из двух лучей, направленных противоположно друг другу.

точке D касательной. Таким образом, E совпадает с интервалом $|x| < \varepsilon$ и функция $y_1(x)$ определена на всем этом интервале.

Докажем теперь, что для любых x_1 и x_2 ($|x_1| < \varepsilon$, $|x_2| < \varepsilon$) будет выполнено условие

$$|y_1(x_2) - y_1(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|.$$

Пусть это не так; без ограничения общности будем считать

$$0 < x_1 < x_2, \quad \frac{y_1(x_2) - y_1(x_1)}{x_2 - x_1} = c > 1.$$

Возьмем x_2^* равным нижней грани таких $x > x_1$, что

$$\frac{y_1(x) - y_1(x_1)}{x - x_1} \geqslant c.$$

Если $x_2^* > x_1$, то из замкнутости D следует, что

$$\frac{y_1(x_2^*) - y_1(x_1)}{x_2^* - x_1} \geqslant c.$$

В точке $\{x_2^*, y_1(x_2^*)\}$ D имеет касательную с угловым коэффициентом, по модулю меньшим 1. Из условия n следует, что найдется значение $x = x_3$ такое, что $x_1 < x_3 < x_2^*$ и

$$\left|\frac{y_1(x_3) - y_1(x_2^*)}{x_3 - x_2^*}\right| < 1.$$

Отсюда

$$\left|\frac{y_1(x_3) - y_1(x_1)}{x_3 - x_1}\right| = \frac{|y_1(x_2^*) - y_1(x_1) - (y_1(x_2^*) - y_1(x_3))|}{x_3 - x_1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|y_1(x_2^*) - y_1(x_1)| - |y_1(x_2^*) - y_1(x_3)|}{x_3 - x_1} > \frac{c(x_2^* - x_1) - (x_2^* - x_3)}{x_3 - x_1} >$$
$$> \frac{c(x_2^* - x_1) - c(x_2^* - x_3)}{x_3 - x_1} = c,$$

что противоречит определению x_2^*.

Если же $x_2^* = x_1$, то существует последовательность чисел $x_1', x_2', \ldots$, таких что

$$x_n' > x_1, \quad x_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_1, \quad \frac{y_1(x_n') - y_1(x_1)}{x_n' - x_1} \geqslant c \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

из замкнутости D следует, что $y_1(x_n') \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_1(x_1)$, а это в свою очередь противоречит величине углового коэффициента касательной в точке $\{x_1, y_1(x_1)\}$.

Следовательно, $y_1(x)$ является непрерывной функцией x. Из непрерывности изменения направления касательной к D следует существование и непрерывность $y_1'(x)$ при $|x| < \varepsilon$. Так же можно построить и наименьшую функцию $y_2(x)$ с аналогичными свойствами.

Если, далее, дана любая точка $A' = \{x_0, x_0\} \in D_\varepsilon$, то точно так же можно доказать, что для достаточно малого ε' на интервале $|x - x_0| < \varepsilon'$, существуют две непрерывно дифференцируемые функции $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$,

$$\tilde{y}_1(x_0) = \tilde{y}_2(x_0) = y_0, \quad \tilde{y}_1'(x_0) = \tilde{y}_2'(x_0), \quad |\tilde{y}_1'(x)| < 1, \quad |\tilde{y}_2'(x)| < 1$$

такие, что графики $y = \tilde{y}_1(x)$ и $y = \tilde{y}_2(x)$ целиком принадлежат D, и в то же время для любой точки $\{x_1, y_1\}$ множества $D \cap E\,\{|x - x_0| < \varepsilon',$

$|y-y_0|<\varepsilon'\}$ выполняются неравенства

$$\tilde{y}_2(x_1) \leqslant y_1 \leqslant \tilde{y}_1(x_1).$$

Будем теперь расширять область определения кривых $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ в обе стороны, воспользовавшись замкнутостью D в G, а также условием, наложенным в начале доказательства этой теоремы на угловые коэффициенты касательных к D, и непрерывным изменением направления этих касательных.

Из этих свойств легко следует, что единственной границей области определения этих функций могут служить только концы интервала $|x|<\varepsilon$. При этом функции $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ будут обладать на расширенном таким образом интервале $|x|<\varepsilon$ определения теми же свойствами, какими они обладали на исходном интервале $|x-x_0|<\varepsilon$, что и требуется доказать*.

Прочие утверждения теоремы, включая обратную часть, очевидны.

После установления теоремы 2 легко выяснить строение D вблизи произвольной точки $A \in D$. В самом деле, пусть $A=\{0, 0\}$, $l_A=E\{y=0\}$ и $\varepsilon>0$ выбрано так, как при доказательстве этой теоремы. Рассмотрим компоненты связности открытого множества $E\{|x|<\varepsilon, |y|<\varepsilon\}-D_\varepsilon$. Две компоненты занимают исключительное положение: именно, часть $E_\varepsilon=E\{|x|<\varepsilon, |y|<\varepsilon\}$, лежащая выше $y=y_1(x)$, и часть E_ε, лежащая ниже $y=y_2(x)$.

Пусть $A_1=\{x_1, y_1\}$ есть точка $E_\varepsilon-D_\varepsilon$, не вошедшая ни в одну из этих двух компонент. Возьмем на $E\{x=x_1, y>y_1\}\bigcap D_\varepsilon$ точку A' с наименьшей, а на $E\{x=x_1, y<y_1\}\bigcap D_\varepsilon$ — точку A'' с наибольшей ординатой. Проведем через A' наименьшую, а через A'' — наибольшую кривые, принадлежащие D_ε, в обе стороны до их первой встречи, если таковая состоится, или до прямых $|x|=\varepsilon$, если эти кривые не пересекутся. Ясно, что компонента связности $E_\varepsilon-D_\varepsilon$, к которой принадлежит A_1, состоит из части плоскости, ограниченной этими кривыми и, быть может, одной из прямых $|x|=\varepsilon$; последний случай может быть только для конечного числа компонент. Таким образом, $E_\varepsilon-D_\varepsilon$ распадается: на 2 области, указанные в начале абзаца, на не более чем счетное число областей — «лунок», вида

$$E\{a_i<x<b_i, \ \varphi_i(x)<y<\psi_i(x)\},$$

где $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a_i, b_i]$, причем

$$\varphi_i(x)<\psi_i(x) \text{ на } (a_i, b_i), \quad \varphi_i(a_i)=\psi_i(a_i), \quad \varphi_i(b_i)=\psi_i(b_i),$$

$$\varphi_i'(a_i)=\psi_i'(a_i), \quad \varphi_i'(b_i)=\psi_i'(b_i),$$

и на не более чем конечное число областей, имеющих вид части такой «лунки», получающейся при рассечении последней вертикальной прямой.

---

* Доказано даже несколько больше: если на интервале $a<x<b$ ($|a|<\varepsilon$, $|b|<\varepsilon$) задана непрерывная функция $\bar{y}(x)$, причем $E\{a<x<b, \ y=\bar{y}(x)\}\subset D$, то

$$\tilde{y}_2(x) \leqslant \bar{y}(x) \leqslant \tilde{y}_1(x) \qquad (a<x<b).$$

При этом всякая вертикальная прямая пересекается не более чем с конечным числом компонент связности $E_\varepsilon - D_\varepsilon$, что опять-таки следует из наличия у D касательной и ограничения на ее наклон для D_ε.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть, кроме предположений теоремы 2, дано (условие f), что некоторая окрестность точки A пересекаются только с конечным числом компонент связности множества $G-D$. Тогда при достаточно малом ε множество D_ε состоит из конечного числа графиков непрерывно дифференцируемых по x функций $y=\varphi_i(x)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ на $0 \leqslant x < \varepsilon$ и конечного (вообще говоря, другого) числа графиков непрерывно дифференцируемых по x функций $y=\psi_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, l)$ на $-\varepsilon < x \leqslant 0$, по крайней мере по одному на каждом полуинтервале. При этом любые два графика имеют ровно одну общую точку — именно A и*

$$\varphi_i(0)=\varphi_i'(0)=\psi_j(0)=\psi_j'(0)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, k; \quad j=1, 2, \ldots, l).$$

Обратно, всякое замкнутое множество, имеющее такое строение около любой своей точки, удовлетворяет всем условиям первого абзаца § 3 и условию f.

Доказательство. Выберем $\varepsilon' > 0$ так, как при доказательстве теоремы 2 с дополнительным условием: $E\{|x|<\varepsilon', |y|<\varepsilon'\}$ пересекается только с конечным числом компонент связности $G-D$.

Возьмем все точки $D_{\varepsilon'} \cap E\{x=\frac{\varepsilon'}{2}\}$. Из предыдущего, а также из условий, наложенных на угловые коэффициенты касательных к $D_{\varepsilon'}$, следует, что это множество конечно и непусто; пусть эти точки будут

$$A_1=\left\{\frac{\varepsilon'}{2}, y_1\right\}, \quad A_2=\left\{\frac{\varepsilon'}{2}, y_2\right\}, \ldots, A_n=\left\{\frac{\varepsilon'}{2}, y_n\right\}.$$

Проведем через A_1 на $0 \leqslant x \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}$ непрерывную кривую l_1 вида $y=\varphi(x)$, принадлежащую D; далее, через A_2 — кривую $l_2 \subset D$ до первого пересечения с l_1 (оно состоится в худшем случае при $x=0$); через A_3 — аналогичную кривую l_3 до первого пересечения с l_1+l_2 и т. д. Обозначим множество точек всех этих кривых через D_1; оно связно и не разбивает плоскости.

Если множество

$$D_{\varepsilon'} \cap E\left\{0 \leqslant x \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\right\} - D_1$$

непусто, возьмем одну из его точек C' $\left(0 < x_{C'} < \frac{\varepsilon'}{2}\right)$ и проведем через нее непрерывную кривую $l' \subset D$ до первого пересечения (в обе стороны) с D_1. Множество D_1+l' разбивает плоскость на 2 части. Если

$$D_\varepsilon \cap E\left\{0 \leqslant x \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\right\} - (D_1+l')$$

непусто, возьмем одну из его точек C'' и проведем через нее кривую l'' до первого пересечения (в обе стороны) с D_1+l'; $D_1+l'+l''$ разбивает плоскость на три части, и т. д. Из конечности числа компонент связно-

сти множества $G-D$ на $E\{|x|<\varepsilon,\ |y|<\varepsilon\}$ и всюду плотности $G-D$ в G следует, что этот процесс должен оборваться на конечном шаге.

Таким образом,

$$D_{\varepsilon'} \cap E\left\{0 < x \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\right\} = l_1 + l_2 + \ldots + l_n + l' + l'' + \ldots + l^{(p)}.$$

То же можно проделать и на отрезке $-\frac{\varepsilon'}{2} \leqslant x \leqslant 0$. Отсюда непосредственно следует прямая часть теоремы 3. Обратная часть очевидна.

$k+l \geqslant 2$ всегда. Если $k+l>2$, то A является точкой ветвления D и число $k+l$ называется ее индексом* [([10]), ([11])].

Если, кроме выполнения всех вышеупомянутых условий, дано (условие F), что любое компактное подмножество G пересекается только с конечным числом компонент связности $G-D$, то D имеет такую же структуру вблизи любой своей точки. Примем для дальнейшего это условие F.

Представим G в виде объединения компактных множеств F_i $(i=0, 1, \ldots)$, где F_i состоит из всех точек G, расстояние $\rho(B)$ которых от G_g (при переходе к стереографической проекции, если G не ограничено) заключено в пределах

$$\frac{1}{i+1} \leqslant \rho(B) \leqslant \frac{1}{i}.$$

Воспользовавшись теоремой Гейне-Бореля, покроем каждое F_i конечным числом окрестностей вида $E\{|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon\}$, в каждой из которых D имеет описанный выше вид. Структура D становится теперь совершенно прозрачной. В частности, очень просто показать, что D является объединением множеств $D_1+D_2+\ldots$, где каждое D_i представляет собою кривую $x=x_i(t)$, $y=y_i(t)$ с непрерывными $x'(t)$ и $y'(t)$ и $|x'(t)|+|y'(t)|>0$, не имеющую кратных точек, кроме, быть может, совпадающих концов — одного из следующих 5 видов:

1°. $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0)=x(1)$, $y(0)=y(1)$, $x'(0)=x'(1)$,

$$y'(0)=y'(1), \quad D_i \cap \sum_{k=1}^{i-1} D_k \text{ пусто.}$$

2° $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0)=x(1)$, $y(0)=y(1)$, $x'(0)=x'(1)$, $y'(0)=y'(1)$,

$$D_i \cap \sum_{k=1}^{i-1} D_k = A_i = \{x(0), y(0)\}, \quad D_i \text{ в } A_i \text{ касается } \sum_{k=1}^{i-1} D_k.$$

3° $0 \leqslant t \leqslant 1$, $|x(0)-x(1)|+|y(0)-y(1)|<0$,

$$D_i \cap \sum_{k=1}^{i-1} D_k = B_i^1 + B_i^2, \text{ где } B_i^1 = \{x(0), y(0)\}, \quad B_i^2 = \{x(1), y(1)\},$$

$$D_i \text{ в } B_i^1 \text{ и } B_i^2 \text{ касается } \sum_{k=1}^{i-1} D_k.$$

---

* Этот общераспространенный индекс ветвления Урысона-Menger'а на 2 больше введенного в ([1]) для упрощения.

4° $0 \leqslant t < \infty$, $D_i \cap \sum_{k=1}^{i-1} D_k = C_i = \{x(0),\ y(0)\}$,

$$D_i \text{ в } C_i \text{ касается } \sum_{k=1}^{i-1} D_k,$$

при $t \to \infty$ расстояние от $\{x(t),\ y(t)\}$ до G_g на стереографической проекции стремится к 0.

5° $-\infty < t < \infty$, $D_i \cap \sum_{k=1}^{i-1} D_k$ пусто, при $|t| \to \infty$ расстояние от $\{x(t),$ $y(t)\}$ до G_g на стереографической проекции стремится к 0.

При этом пересечение D с любым компактным подмножеством G исчерпывается после конечного числа этих операций*.

Обратно, всякий такой процесс строит D, обладающее всеми указанными свойствами, включая условие F.

Если, кроме предположений первого абзаца § 3, дано, что CG на стереографической проекции и $G-D$ состоят только из конечного числа компонент связности, то весь этот процесс обрывается на конечном шаге. Действительно, если D_i не увеличивает числа компонент связности $G - \sum_{k=1}^{i-1} D_k$, то D_i может быть только вида 3° и 4° и, таким образом, уменьшает конечное число компонент связности** множества $CG + \sum_{k=1}^{i-1} D_k$.

Пусть для определенности G ограничено, связно, r связно и $G-D$ состоит из конечного числа K_{G-D} компонент связности. Тогда

$$K_{D+G_g} + \frac{\sum p_i}{2} + \frac{p}{2} = r - 1 + K_{G-D} + z, \quad (1)$$

где K_{D+G_g} — число компонент связности $D+G_g$, $\sum p_i$ — сумма индексов всех точек ветвления D, p — число ветвей D, уходящих к G_g, и z — общее число всех точек ветвления. Справедливость этой формулы сразу следует из сохранения знака равенства при совершении каждой из 5 основных операций построения D. Формула (1) дает возможность при всех этих предположениях строить все типы возможного расположения D относительно G.

Пусть, например, $r=1$, $K_{G-D}=2$; формула дает три возможности:

1) $K_{D+G_g}=2$, $\sum p_i = 0$, $p=0$ (тип D см. на черт. 1);

2) $K_{D+G_g}=1$, $\sum p_i = 0$, $p=2$ (тип D см. на черт. 2);

3) $K_{D+G_g}=1$, $\sum p_i = 1$, $p=1$ (два возможных типа D см. на черт. 3).

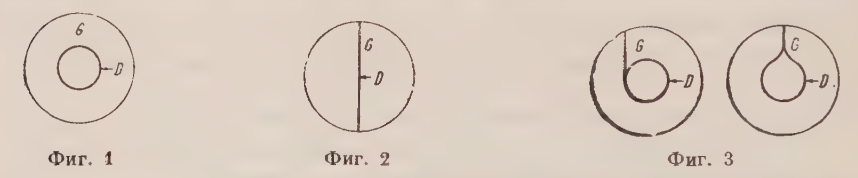
Оба последние типа D топологически эквивалентны, однако различны, если рассматривать только дифференцируемые отображения.

* Ясно, что при $i=1$ возможны только случаи 1° и 5°.

** На стереографической проекции.

В частности, в задаче Петровского, если требовать от G, G_1 и G_2 связности, а от f_1 и f_2 существования, единственности, непрерывности и различия граничных полных дифференциалов на D, то D может быть только вида, описанного в 1° и 5°.

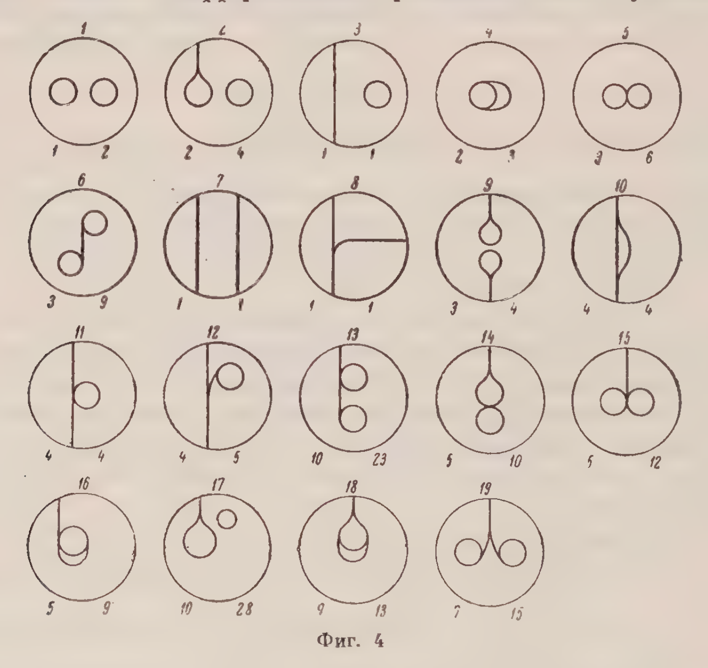
Случай $r=1$, $K_{G-D}=3$ значительно многообразнее. Мы приведем здесь (черт. 4) по одному представителю топологически различных ти-



Фиг. 1 Фиг. 2 Фиг. 3

пов D, которых насчитывается всего 19 (везде G изображается в виде внутренности большего круга).

Каждому из топологически различных типов соответствует, вообще говоря, несколько дифференциально различных типов. Тут возможен



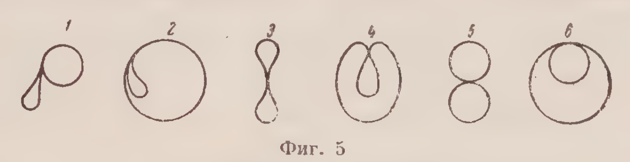
Фиг. 4

двоякий подход. Можно считать эквивалентными (внутренняя дифференциальная эквивалентность) такие D и D', между которыми можно установить гомеоморфизм, сохраняющий структуру точек ветвления; точнее, если две ветви D подходят в точку ветвления с одной и той же стороны, то две соответствующие ветви D' также подходят в соответствующую точку ветвления с одной и той же стороны, и наоборот. С дру-

гой стороны, можно считать эквивалентными (внешняя дифференциальная эквивалентность) такие D на G и D' на G', что между G и G' можно установить взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие (с функциональным определителем, нигде не равным нулю), при котором D переходит в D'*.

Например, 5-му топологически различному типу соответствует 6 внешне дифференциально различных типов (черт. 5). Типы 1 — 2, 3 — 4, 5 — 6 внутренне эквивалентны, так что внутренне дифференциально различных типов тут имеется только три.

Мы здесь не будем заниматься подробным рассмотрением понятия дифференциальной эквивалентности, связанного с совсем иным циклом



Фиг. 5

вопросов. Ограничившись наглядным представлением этого понятия, дадим на схеме топологически различных случаев разбиения круга на три части при каждом типе число внутренне и внешне дифференциально различных типов. Всего получается 80 внутренне дифференциально различных и 154 внешне дифференциально различных типов.

§ 4

Задача Петровского может быть обобщена следующим образом: Пусть область G представлена в виде суммы попарно не пересекающихся множеств

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n + D,$$

где $G_1, \dots, G_n$ — области, а

$$D = G \cap (G_{1g} \cap G_{2g} + G_{1g} \cap G_{3g} + \dots + G_{n-1g} \cap G_{ng});$$

тут в скобке стоит объединение всех попарных пересечений границ. Пусть на $G \cap \overline{G}_1, \dots, G \cap \overline{G}_n$ заданы соответственно непрерывные функции $f_1(B), \dots, f_n(B)$, совпадающие на D (т. е. образующие на G единую функцию $f(B)$) и имеющие в каждой точке D граничные полные дифференциалы, причем для каждой точки $A \in D$, если $G_{i_1 g}, \dots, \dots, G_{i_k g}$ — все содержащие ее границы, граничные полные дифференциалы $df_{i_1}(A), \dots, df_{i_k}(A)$ все различны. Ставится вопрос о строении D.

То, что строение может получиться иным, чем в § 3, показывает боковая поверхность правильной четырехгранной пирамиды; здесь G представляет собой квадрат, D — его диагонали, G_1, G_2, G_3 и G_4 — треугольники, на которые квадрат делится диагоналями.

* Возможно, что при этом придется считать D достаточно гладким.

Аналогично лемме 3 § 2 доказывается, что если A является предельной точкой для $G_{ig} \cap G_{jg}$, то $G_{ig} \cap G_{jg}$ имеет в A касательную l_A^{ij}. Отсюда следует, что D не имеет изолированных точек и обладает в каждой своей точке A одной или несколькими $\left(\text{не больше } \frac{n(n-1)}{2}\right)$ касательными l_A^{ij}; точнее, через A можно провести прямые l_A^{ij} так, что если взять любую систему углов с прямоугольными сторонами и общей вершиной A, содержащую все эти прямые (кроме точки A) строго внутри себя, то эта система содержит также все D в достаточной близости от A, и при этом ни одну из прямых нельзя выбросить без нарушения этого свойства.

Таким образом, в каждой точке $A \in G$ определено конечное число направлений* $\varphi(A)$. При дополнительном требовании непрерывности (на D) граничных полных дифференциалов многозначная функция $\varphi(A)$ становится непрерывной сверху**. Более того, можно утверждать следующее:

Свойство (φ_0): если последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ (все $A_i \in D$) сходится к $A \in D$ и некоторая последовательность значений $\varphi(A_1)$, $\varphi(A_2), \ldots, \varphi(A_i), \ldots$ сходится к направлению φ_0, то последовательность направлений $\overline{AA_1}$ $\overline{AA_2}, \ldots$ также сходится к направлению φ_0.

Действительно, без ограничения общности можно считать, что все $A_i \in G_{1g} \cap G_{2g}$ и все $\varphi(A_i)$ являются направлениями касательных к $G_{1g} \cap G_{2g}$ в A_i. Тогда ясно, что $A \in G_{1g} \cap G_{2g}$; но это множество имеет в A касательную с направлением φ_1; из непрерывности изменения граничного полного дифференциала следует, что $\varphi(A_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_1$. Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_0$; из $A_i \in G_{1g} \cap G_{2g}$ сразу следует свойство (φ_0).

Отсюда непосредственно следует такое свойство функции φ: если для некоторой точки $A \in D$ все значения $\varphi(A)$ суть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, то при приближении A' к A по D с направлением $\overline{AA'} \to \varphi_i$ все значения $\varphi(A')$ стремятся к φ_i.

Если известно, что граничные полные дифференциалы являются единственными, то выполнено следующее

Свойство (π): Если для $A \in D$ существует угол величины $< \pi$, содержащий D вблизи A внутри себя, то A является предельной точкой по крайней мере для трех компонент связности множества $G - D$.

Действительно, легко видеть даже большее: A в этом случае не может входить только в две из границ $G_{1g}, G_{2g}, \ldots, G_{ng}$. Пусть, например, A входит только в G_{1g} и G_{2g}; тогда $G_{1g} \cap G_{2g}$ имеет в A касательную l_A^{12}. Из условия следует, что $G_{1g} \cap G_{2g}$ вблизи A расположено

---

* Отметим, что на прямой два противоположных направления здесь не различаются.

** Многозначная функция $y = f(x)$ называется непрерывной сверху (см. ([12])), если из $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ и $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y'$ (где под $f(x_n)$ понимается какое-либо из значений f в x_n) следует, что y' является одним из значений $f(x')$.

только по одну сторону от своей нормали n_A. Отсюда одна из областей G_1 или G_2 имеет в A касательную l_A^{12}, что противоречит единственности граничных полных дифференциалов df_1 и df_2 в A.

Ясно, наконец, что в последнем случае D не имеет точек возврата, т. е. точек с единственной касательной, вблизи которых все D расположено по одну сторону от нормали.

Аналогично § 3 можно изучать заданные на G вне зависимости от функции f замкнутые в G множества D, имеющие в каждой своей точке конечное число касательных, направление которых является непрерывной сверху многозначной функцией точки D. Мы предположим также, что выполняется свойство (π) и рассмотрим строение D вблизи некоторой точки $A \in D$, предполагая, что некоторая окрестность точки A пересекается только с конечным числом* компонент связности множества $G - D$. Без ограничения общности будем считать, что $x_A = y_A = 0$.

ТЕОРЕМА 4. *При всех предположениях предыдущего абзаца D вблизи A состоит из конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых, а именно: $x = x_i(t)$, $y = y_i(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, причем $x_i(0) = y_i(0) = 0$, $x_i'(t)$ и $y_i'(t)$ существуют и непрерывны на всем отрезке $[0,1]$ и $|x_i'(t)| + |y_i'(t)| > 0$; любые две кривые имеют единственную общую точку, именно A. Касательные к этим кривым в A совпадают с касательными к D в A.*

Доказательство. Прежде всего, D не содержит изолированных точек. После поворота осей координат и подбора чисел ε и ε_1, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \varepsilon_1$, можно считать выполненным следующее: прямая $y = 0$ является касательной к D в A и область

$$H = E\left\{0 < x < \varepsilon_1, \left|\frac{y}{x}\right| < \varepsilon\right\}$$

пересекается только с конечным числом компонент связности $G - D$; при этом $D \cap H$ имеет A предельной точкой, а прямую $y = 0$ — единственной касательной в A; далее, для любой $\{x, y\} \in D \cap H$ выполняется $\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Требуется исследовать строение $D \cap H$ вблизи A.

Примем, что прямая $x = 0$ не является касательной к D в A. В противном случае, мы могли бы добиться этого подходящим аффинным преобразованием плоскости; ясно, что как все требования, наложенные на D, так и утверждение теоремы 4 сохраняют свою силу при совершении такого преобразования. Кроме этого, пусть φ_1 — некоторое невертикальное направление, не являющееся одним из направлений касательных к D в A. Из непрерывности изменения направлений касательных к D следует, что при достаточно малом ε_1 можно считать,

* В обобщенной задаче Петровского это выполняется, если каждое из G_i содержит вблизи A конечное число компонент связности.

что

$$E\left\{0<x<2\varepsilon_1,\ \left|\frac{y}{x}\right|<\varepsilon\right\}\subset G$$

и $D\cap E\ \left\{0<x<2\varepsilon_1,\ \left|\frac{y}{x}\right|<\varepsilon\right\}$ не имеет ни вертикальных касательных, ни касательных с направлением φ_1.

Множество $H-D\cap H$ содержит только конечное число компонент связности. Действительно, на отрезке $T=E\left\{x=\varepsilon_1, \left|\frac{y}{x}\right|\leqslant\frac{3\varepsilon}{4}\right\}$ может быть только конечное число точек D, иначе предельная точка обладала бы вертикальной касательной. Пусть эти точки делят T на конечное число (быть может, равное единице) частей; возьмем в каждой из них по точке: $A_1, A_2, \ldots, A_l$. Кроме того, возьмем в каждой из компонент связности $G-D$, имеющих общие точки с H, по точке: $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Тогда любую точку $A'\in H$ можно соединить по компоненте A' в $G-D$ с одной из B_i. Мы можем это сделать, либо оставаясь все время внутри H, либо хотя бы один раз перейдя его границу; но в последнем случае мы можем, очевидно, соединить A' по компоненте A' в $G-D$ с одной из A_j, все время (кроме последнего момента) оставаясь внутри H. Отсюда непосредственно следует утверждение, сделанное в начале этого абзаца.

Будем считать также, что ε_1 таково, что все множества $H_{\varepsilon_2}=$ $=E\left\{0<x<\varepsilon_2,\ \left|\frac{y}{x}\right|<\varepsilon\right\}$ $(0<\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_1)$ пересекаются с одним и тем же числом компонент связности $G-D$.

Пусть $A'\in D\cap H$ есть предельная точка для компоненты связности G_1 множества $H-D\cap H$. Мы докажем, что *для всякого* $\delta_1>0$ *найдется такое* $\delta_2>0$, *что любые две точки* B_1 *и* B_2 *области* G_1, *для которых* $r(B_1, A')<\delta_2$, $r(B_2, A')<\delta_2$, *можно соединить кривой по* $G_1\cap E\{r(B, A')<\delta_1\}$. Пусть для некоторого δ_1 это не выполнено. Построим последовательность вложенных друг в друга параллелограммов $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \ldots \Pi_i, \ldots$ с общим центром A', стороны которых имеют направления, вертикальные к φ_1, и стремятся к нулю при увеличении номера ($\Pi_1\subset G_1$). По предыдущим соображениям, на каждой из сторон каждого параллелограмма имеется только конечное число точек D. Таким образом, $H-D\cap H$ на сторонах каждого из Π_i заполняет несколько интервалов; возьмем в каждом из них по точке:

$$A_1^i,\ A_2^i,\ \ldots\ A_{k_i}^i\quad (i=1, 2, \ldots)$$

(считаем Π_1 настолько малым, что все $k_i>0$ и диагонали Π_1 меньше δ_1).

Очевидно, всякую точку G_1, лежащую внутри Π_i, можно соединить по G_1 с одной из A_j^i ломаной с конечным числом звеньев, не выходя за пределы Π_i. Отсюда сразу следует, что для каждого i найдутся два натуральных числа m_i и n_i $(1\leqslant m_i<n_i\leqslant k_i)$ таких, что точки $A_{m_i}^i$ и A_{n_i} нельзя соединить по G_1 в пределах Π_i.

Мы будем говорить, что пара точек $[A^j_p, A^j_q]$ следует за парой точек $[A^i_r, A^i_s]$ $(i < j)$, если A^j_p можно соединить с A^i_r, а A^j_q — с A^i_s (или, наоборот, A^j_p с A^i_s, а A^j_q — с A^i_r) по G_1 в пределах Π_i. Среди пар $[A^1_r, A^1_s]$, очевидно, существует такая, за которой следует ∞ пар вида $(A^i_{m_i}, A^i_{n_i}]$; пусть это будет $[A^1_{r_1}, A^1_{s_1}]$. Среди следующих за ней точек $[A^2_r, A^2_s]$ возьмем одну $[A^2_{r_2}, A^2_{s_2}]$ из обладающих тем же свойством и т. д. Получим последовательность следующих друг за другом пар

$$[A^1_{r_1}, A^1_{s_1}], [A^2_{r_2}, A^2_{s_2}], \ldots, [A^i_{r_i}, A^i_{s_i}], \ldots$$

таких, что никакие две точки $A^i_{r_i}$ и $A^i_{s_i}$ нельзя соединить по G_1, в пределах Π_1.

Если теперь соединить * каждую из точек $A^i_{r_i}$ с $A^{i+1}_{r_{i+1}}$ и $A^i_{s_i}$ с $A^{i+1}_{s_{i+1}}$ по $G_1 \cap \Pi_i$, а также $A^1_{r_1}$ с $A^1_{s_1}$ по G_1, то все соединяющие линии можно очевидным образом объединить в одну замкнутую непрерывную кривую $B(t)$:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$
$$x(0) = x(1) = x_{A'}, \quad y(0) = y(1) = y_{A'}.$$

Пусть

$$B(t_1) = A'_{r_1}, \quad B(t_2) = A'_{s_1}, \quad 0 < t_1 < t_2 < 1;$$

легко видеть, что можно построить замкнутую кривую без самопересечений $B_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $B_1(0) = B_1(1) = A'$, являющуюся подмножеством кривой $B(t)$; это следует из того, что кривые $B(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ и $B(t)$ $(t_2 \leqslant t \leqslant 1)$ имеют единственную общую точку A', а $B(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ не содержит A'. Полученная кривая $B_1(t)$ делит плоскость на две части. В ограниченной части G_2 имеются точки D, так как $B_1(\xi)$ и $B_1(1-\xi)$ при достаточно малом $\xi > 0$ нельзя соединить по $G_1 \cap \Pi_1$. $D \cap G_2$ не может быть расположено все на одной вертикальной прямой, так как $D \cap H$ не имеет ни изолированных точек, ни вертикальных касательных. Возьмем в $D \cap G_2$ крайнюю правую или крайнюю левую точку $\bar{A}$; такая найдется, так как $\overline{D \cap G_2 \cap G_{2g}}$ может содержать только точку A' (или быть пустым). Так как в $\bar{A}$ вертикальная прямая не является касательной, то все D вблизи $\bar{A}$ можно заключить в угол величины $< \pi$. По свойству (π) $\bar{A}$ является предельной точкой по крайней мере для трех компонент $G - D$. Если одна из них G_3 не имеет общих точек с G_1 (такая всегда найдется), то $G_3 \subset G_2$, так как $B_1(t) \in G_1$ при $t \neq 0$ и $t \neq 1$, а $B_1(0) = A' \in D$.

Но $\bar{A} \in \bar{G}_2 \supset \bar{G}_3$; таким образом, при достаточно малом ε_2 H_{ε_2} не пересекается с G_3, что противоречит определению ε_1. Это и доказывает утверждение, напечатанное курсивом.

Докажем теперь, что любая точка $H \cap D$, имеющая свыше одной касательной, является предельной по крайней мере для трех компонент связности $H - H \cap D$. Действительно, пусть $\tilde{A}$ — такая точка. Пусть

* Для этого, в случае надобности, изменим порядок следования точек в паре.

$l_1, l_2, \ldots, l_s$ — все касательные к D лучи, проходящие через $\widetilde{A}$ (касательный луч — это луч, который направлен по одной из касательных к D в $\widetilde{A}$, и притом такой, что в каждом углу, содержащем внутри себя этот луч, в любой близости от $\widetilde{A}$ найдутся точки D).

$s \geqslant 2$. Если $s=2$, то l_1 и l_2 не направлены по одной и той же прямой, и наше утверждение следует из свойства (π). Если $s \geqslant 3$, проведем биссектрисы $b_1, b_2, \ldots, b_s$ углов между соседними лучами. Пусть G_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) — компонента связности $H - H \cap D$, содержащая b_i вблизи $\widetilde{A}$. Наше утверждение будет следовать из того, что среди G_i нет совпадающих. Действительно, если бы было $G_i = G_j$ $(i \neq j)$, мы соединили бы по G_i точку $B_i \in b_i$ с точкой $B_j \in b_j$ (B_i и B_j близки от $\widetilde{A}$) кривой l. Тогда замкнутая кривая $\widetilde{A} - b_i - B_i - l - B_j - b_j - \widetilde{A}$ содержит внутри себя точки D; это приводится к противоречию аналогично предыдущему.

Далее, каждая точка возврата D является предельной также по крайней мере для трех компонент связности $H - H \cap D$, что непосредственно следует из свойства (π).

Докажем, наконец, что на H может быть только конечное число точек D, имеющих свыше одной касательной, а также точек возврата D. Действительно, в противном случае, по только что доказанному (и конечности числа компонент $H - H \cap D$) следовало бы, что мы могли найти две точки $A_1 \in H \cap D$ и $A_2 \in H \cap D$, $A_1 \neq A_2$, являющиеся предельными для одних и тех же компонент связности G_1, G_2 и G_3 области $H - H \cap D$. Пусть $A_{ij}^1, A_{ij}^2, \ldots, A_{ij}^k, \ldots$ — последовательность точек G_i, сходящаяся к A_j ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$). Из доказанного следует, что можно соединить A_{ij}^1 с A_{ij}^2, A_{ij}^2 с A_{ij}^3 и т. д. по G_i кривыми $l_{ij}^1, l_{ij}^2, \ldots$ так, что расстояние от l_{ij}^k до A_j стремится к 0 при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что все $l_{ij}^1, l_{ij}^2, \ldots$ можно объединить в одну непрерывную кривую с началом в A_{ij}^1 и концом в A_j. Если, далее, соединить A_{i1}^1 с A_{i2}^1 по G_i ($i = 1, 2, 3$) и избавиться от самопересечений, то мы получим в H три непрерывные кривые $l_i = E\{0 \leqslant t \leqslant 1,\ B = B_i(t)\}$ без самопересечений такие, что

$$B_i(0) = A_1, \quad B_i(1) = A_2, \quad E\{0 < t < 1, \quad B = B_i(t)\} \subset G_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Одна из этих кривых, очевидно, содержится между двумя другими. Пусть это будет l_2; тогда и G_2 содержится между l_1 и l_3, откуда выводим, что G_2 совпадает со своей компонентной связности в $G - D$. Но $A \in G_2$, что противоречит определению ε_1.

Итак, можно уменьшить ε_1 таким образом, что на H_{ε_1} не будет ни точек возврата D, ни точек D с двумя касательными. Добавим к $D \cap H$ полуинтервал $l = E\{-\varepsilon_1 < x \leqslant 0,\ y = 0\}$ и рассмотрим $D_1 = l + (D \cap H)$ на области $P = E\{|x| < \varepsilon_1,\ |y| < \varepsilon\varepsilon_1\}$. D_1 удовлетворяет на P условию теоремы 3 § 3. По этой теореме $D \cap H$ вблизи A состоит из конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых, касающихся оси абсцисс

в A и пересекающихся только в A. Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

Свойство (φ_0) является в этом случае следствием свойства (π) и конечности числа компонент связности $G - D$ вблизи A.

Если любое компактное подмножество G пересекается только с конечным числом компонент связности $G - D$ и выполнено свойство (π), то D имеет такую же структуру вблизи каждой своей точки. В этом случае D является объединением $D_1 + D_2 + \ldots$, где каждое D_i представляет собою кривую $x = x_i(t)$, $y = y_i(t)$ с непрерывными $x'(t)$ и $y'(t)$ и $|x'(t)| + |y'(t)| > 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 1$, или $0 \leqslant t < \infty$, или $-\infty < t < \infty)$, не имеющую кратных точек, кроме, быть может, совпадающих концов. При этом различные кривые D_i могут иметь в качестве общих точек только свои концы, и каждый конец каждой кривой совпадает по крайней мере с двумя другими концами этой системы кривых. Пересечение же D с любым компактным подмножеством G исчерпывается после конечного числа этих операций. Обратное справедливо, если только выполняется свойство (π).

§ 5

Подобное различение можно проводить и в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Пусть, например, имеется краевое соотношение между частными производными 1-го порядка, функции же задаются на некоторой области G. С точки зрения теории функций естественно искать решение уравнения со всюду на G_g существующим полным дифференциалом, коэффициенты которого удовлетворяют заданному соотношению. С обычной же точки зрения дифференциальных уравнений естественно требовать существования на G_g предельных значений непрерывных на G частных производных (непрерывная дифференцируемость «вплоть до границы»). Однако и тут могут быть два различных подхода. С одной стороны, можно требовать только, чтобы существующие пределы частных производных удовлетворяли заданному соотношению; при этом наличие предельных полных дифференциалов не обязательно. С другой стороны, можно требовать существования предельных полных дифференциалов, коэффициенты которых должны удовлетворять заданному соотношению. Ясно, что такие подходы не эквивалентны; это следует хотя бы из приведенных в начале статьи примеров.

Считаю своим приятным долгом отметить помощь и ряд ценных указаний, полученных мной от В. В. Степанова и И. Г. Петровского при написании статьи.

Поступило
7.I.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мышкис А., О существовании полного дифференциала на границе плоской области, Доклады Ак. Наук СССР, XVIII : 2 (1945), 87—90.
[2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М. — Л., 1937.
[3] Верченко И. и Колмогоров А., Продолжение исследований о точках разрыва функций двух переменных, Доклады Ак. Наук СССР, IV : 7 (1934), 361—364.
[4] Marchaud A., Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles, Liouville Journ. de Math. pures et appl. (9), 12 : 4 (1933), 415—443.
[5] Bouligand G., Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris (1932), 66.
[6] Lavrentieff M., Sur la représentation conforme, C. R. Paris, 184 (1927), 1407—1409.
[7] Brouwer L. E. I., Zur Analysis Situs, Math. Ann. 68 : 3 (1910), 422—434.
[8] Sierpinski W., Sur l'ensemble des points angulaires d'une courbe $y = f(x)$, Bull. intern. de Cracovie N 8A (1918), 850—855.
[9] Young G. C., A note on derivates and differential coefficients, Acta Math. 37 : 2 (1914), 141—154.
[10] Urysohn P., Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, Verh. der Kon. Ak. te Amsterdam. Is. XIII № 4 (1927), 9.
[11] Menger K., Kurventheorie, Teubner (1932), 96—97.
[12] Bouligand G., Géométrie infinitésimale directe et physique mathématique classique, Paris (1935), 12.

A. MYSHKIS. ON THE EXISTENCE OF THE COMPLETE DIFFERENTIAL ON THE BOUNDARY OF A PLANE DOMAIN

SUMMARY

§ 1. Let a function $f(B)$ be defined in the vicinity of a point A of the boundary G_g of an open (but not necessarily connected) plane set G. We shall say that $f(B)$ possesses the complete differential $df = adx + bdy$ at the point A if there exists $\lim\limits_{B\to A} f(B)$ and

$$f(B) - \lim_{B\to A} f(B) = a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + o(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|).$$

We shall say a plane set E has a tangent l_k at a point $K \in E'$ if

a) l_K is a straight line passing through K;

b) for any pair of angles with straight sides having the common vertex at K such that all points of l_K, except K, are inner points of the angles, the part of E belonging to a sufficiently small neighbourhood of K lies within the angles (the case $K \in E$ is admitted).

LEMMA 1. *If $f(B)$ has the complete differential at $A \in G_g$, then the differential is unique if and only if G has no tangent at A. If such a tangent l_A exists, then the tangent planes to $z = f(B)$ provided at least one such plane exists, form a cluster of planes, with the exception of the vertical plane, with the axis projecting onto l_A.*

In case f is continuously differentiable on G and $\lim\limits_{B\to A} f(B)$, $\lim\limits_{B\to A} f'_x(B)$, $\lim\limits_{B\to A} f'_y(B)$ exist, df does not necessarily exist at $A \in G_g$; this is shown by examples.

By $d_r(B_1B_2)$ $(B_1 \in G,\ B_2 \in G)$ we mean, according to Lavrentieff, the greatest lower bound of the lengths of rectifiable curves lying in G and joining B_1 with B_2 (we put $d_r(B_1B_2) = \infty$, if there is no curve of such kind). If $A \in G_g$, $B \in G$, then $d_r(BA) = \lim\limits_{B_1\to A,\, B_1\in G} \inf d_r(B_1B)$. By $r(AB)$ we mean the distance from A to B. A point $A \in G$ is said to be well accessible if $\frac{d_r(BA)}{r(BA)}$ $(B \in G)$ is bounded in a neighbourhood of A; otherwise A is said to be badly accessible.

THEOREM 1. *Let $f(B)$ be defined on G in a neighborhood of a well accessible point $A \in G_g$. Suppose $\lim\limits_{B\to A,\, B\in G} f(B)$ exists and all the derivated numbers D_xf (resp, D_yf) have the limit a (resp. b) at A. Then $a\,dx + b\,dy$ is the complete differential of f at A* (called the limit complete differential in this case). *Conversely, if $A \in G$ is a badly accessible point, then there is such an f on G that $\lim\limits_{B\to A,\, B\in G} f(B) = 0$, all Df are bounded on G and tend to zero as the point approaches A, but there is no complete differential of f at A.*

This theorem can be extended directly to any number of independent variables.

In the case where f is uniformly continuous in a neighborhood of A the condition that $a\,dx + b\,dy$ be the complete differential of f at A must be modified, as is shown by examples.

It may occur that there exist

$$\lim_{B\to A} f(B), \quad \lim_{B\to A} f'_x(B) = a, \quad \lim_{B\to A} f'_y(B) = b, \tag{1}$$

but $a\,dx + b\,dy$ is no complete differential of f, though the latter exists. This is shown by examples. We also give an example of a domain G with a badly accessible point $A \in G_g$ such that if the limits (1) and df exist, then necessarily $df = a\,dx + b\,dy$.

§ 2. The following problem of I. Petrowsky is considered: let an open G be represented as the sum of pairwise disjoint summands: $G = G_1 + G_2 + D$, where G_1, G_2 are open and $D = G \cap \bar{G}_{1g} = G \cap \bar{G}_{2g}$. Suppose two continuous functions f_1 and f_2 are defined on $G \cap \bar{G}_1$ and $G \cap \bar{G}_2$ respectively, coinciding on D and possessing continuous partial derivatives, each on its domain; let $|f'_{1x} - f'_{2x}| + |f'_{1y} - f'_{2y}| > 0$ on D. The problem is as follows: under what conditions D has a simple structure, for instance, is a curve $x = x(t)$, $y = y(t)$ with continuous $x'(t)$, $y'(t)$, $|x'| + |y'| > 0$?

Different results can be obtained under different restrictions imposed on differentiability of functions on D.

If we suppose only that the complete differentials of f_1 and f_2 exist, but have distinct limits, on D, then the structure of D may be very complicated, even if D has an equation $y = \varphi(x)$, where φ is continuous (examples 8 and 12).

LEMMA 3. *If f_1 and f_2 have distinct boundary differentials at $A \in D$, then D has a tangent at A.*

If these differentials are limit differential, then the direction of l_A depends continuously on A. Elementary singularities in this case are return points (of the type $y^3 = x^2$).

More complicated singularities may, nevertheless, occur.

If we require that the distinct limit complete differentials be unique, then no return point may occur, but rather complicated singularities may still take place. We show in § 3 that under the additional condition that G, G_1 and G_2 be connected, D has the above simple structure.

Consider the case, where in a neighborhood of A D can be represented by an equation $y = \varphi(x)$ with φ continuous.

§ 3. Here the structure of a set D is investigated belonging to an open plane set G. D is supposed to be dense in itself, closed in G and to have at each point A a tangent l_A the direction of which depends on A continuously. The following condition (n) is also imposed on D: in every neighborhood $U(A)$ of an arbitrary $A \in D$ there are points of D on both sides of the normal n_A to D.

THEOREM 2. *Suppose, for definiteness,* $A=(0,0)$, l_A *coincides with the x-axis. Then for sufficiently small* ε *the set* $D_\varepsilon = D \cap E\{|x|<\varepsilon, |y|<\varepsilon\}$ *is enclosed between the graphs of two continuously differentiable functions* $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, *defined on* $|x|<\varepsilon$. *Thereby*

$$y_2(x) \leqslant y_1(x), \quad |y_1(x)|<\varepsilon, \quad |y_2(x)|<\varepsilon,$$
$$y_1(0)=y_2(0)=y_1'(0)=y_2'(0)=0$$

and the graphs themselves belong to D. Through every point $A' \in D_\varepsilon$ *passes at least one curve* $y=\varphi(x, A')$ *defined for* $|x|<\varepsilon$, *which belongs wholly to* D_ε; *there are two such curves that enclose all the other; they all touch one another at* A' *and their tangents at* A' *tend to the x-axis as* A' *approaches A. Conversely, any closed (in G) set D having such structure at every-one of its points, satisfies all conditions of the beginning of this paragraph.*

This theorem enable us to make clear the structure of D at an arbitrary $A \in D$.

THEOREM 3. *Suppose that besides all the conditions of theorem 2 the condition (f) is imposed that a neighborhood of a point A intersects only with a finite number of connectivity components of* $G-D$. *Then, for sufficiently small* $\varepsilon<0$, D_ε *consists of a finite number of graphs of continuously differentiable functions* $y=\varphi_i(x)$ *on* $0 \leqslant x < \varepsilon$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ *and of a finite number of continuously differentiable functions* $y \neq \psi_j(x)$ *on* $-\varepsilon < x \leqslant 0$ $(j=1, 2, \ldots, l)$, $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$ *(in general,* $l \neq k$*). Any two graphs have strictly one point in common — the point A and*

$$\varphi_i(0)=\varphi_i'(0)=\psi_j(0)=\psi_j'(0)=0 \quad (i=1, \ldots, k;\ j=1, \ldots, l).$$

Conversely, any closed set possessing such structure at everyone of its points satisfies all the conditions formulated at the beginning of this paragraph and, moreover, the condition (f).

If $k+l>2$, then A is called branch-point of D, and the number $k+l$ is called index of the branch-point.

If we have moreover (condition (F)) that every compact subset of G intersect only with a finite number of connectivity components of $G-D$, then D also has such structure at everyone of its points. We give a clear method of construction of all sets of such kind.

If G is bounded, connected, r-connected and $G-D$ consists of a finite number K_{G-D} of connectivity components, then

$$K_{D+G_g} + \frac{1}{2}\sum p_i + \frac{1}{2}p = r-1+K_{G-D}+z,$$

where K_{D+G_g} is the number of connectivity components of $D+G_g$, $\sum p_i$ is the sum of indices of all branch-points of D, p is the number of branches approaching G_g and z is the number of branch-points. The discussion of all possible cases for $r=1$, $K_{G-D}=2$ and $r=1$, $K_{G-D}=3$ is carried through.

§ 4. Problem of I. Petrowsky is generalized to the case where G is decomposed into any finite number of open sets. We analyse the properties of D under various restrictions on differentiability of the functions on D.

As in § 3 we consider the closed (in G) subsets D of G that have at everyone of its points contingencies (see ([5])) consisting of finite numbers of rays whose directions are functions of points of D continuous above (see ([12]); thereby opposite directions on a stright line are identified). We also introduce the following property (π): if there is an angle of magnitude $< \pi$ at A which encloses D in a neighborhood of A, then A is limit point of at least three connectivity components of $G - D$.

THEOREM 4. *If under the conditions just formulated some neighborhood of* $A \in D$ *intersects with a finite number of connectivity components of* $G - D$, *then in the vicinity of* A D *has the following structure: suppose, for definiteness, that* $A = (0, 0)$; *then in a neighborhood of* A D *consits tof a finite number of continuously differentiable curves* $x = x_i(t)$, $y = y_i(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; *thereby* $x_i(0) = y_i(0) = 0$, $x_i'(t)$ *and* $y_i'(t)$ *exist and are continuous on the whole segment* $[0, 1]$ *and* $|x_i'(t)| + |y_i'(t)| > 0$; *any wo of these curves have a unique common point — the point* A.

We make clear the structure of D in the case where the above conditions are fulfilled at every point $A \in D$.

§ 5. An analogous classification of differential properties on the boundary can be introduced in formulation of the boundary conditions for partial differential equations.

Член редколлегии проф. *Б. И. Сегал*

Подписано к печати 14/IX 1946 г. А 05903
Объем 7 печ. л., уч.-изд. л 10,7. Тираж 2500 экз.
Цена 9 руб. Заказ 866

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров РСФСР
Москва, Трехпрудный, 9.

Содержание

Sommaire

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 19.

Adresse de la rédaction: B. Kaloujskaja, 19 Moscou

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 393—410 Série mathématique

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ И НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе даются точные неравенства для $\limsup n^r E_n(f)$ при $n \to \infty$, где $E_n(f)$ есть наилучшее приближение функции f периода 2π, имеющей производную порядка r, не превышающую данную константу.

Подобные неравенства даются также для приближений функций упомянутого класса интерполяционными тригонометрическими многочленами с равноотстоящими узлами интерполяции.

§ 1

Пусть $W^{(r)}$ обозначает класс функций f периода 2π, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и (почти всюду) производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$$

и пусть $E_n(f)$ есть наилучшее приближение функций f при помощи тригонометрического полинома порядка $n-1$.

Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн и J. Favard показали, что справедливо равенство [см. ([1]) и ([4])]

$$\sup_{f \in W^{(r)}} E_n(f) = \frac{A_r}{n^r}, \tag{1}$$

где

$$A_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{2}$$

Установлено также, что все функции в классе $W^{(r)}$, для которых при заданном n верхняя грань (1) достигается, выражаются формулой

$$c \pm f_{nr}(x+\alpha),$$

где α и c — произвольные постоянные и

$$\left.\begin{aligned} f_{nr}(x) &= \frac{4}{\pi n^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)nx}{(2\nu+1)^{r+1}} \quad \text{при } r \text{ четном},\\ f_{nr}(x) &= \frac{4}{\pi n^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1)nx}{(2\nu+1)^{r+1}} \quad \text{при } r \text{ нечетном}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для всякой же другой функции $f \in W^{(r)}$ наилучшее приближение $E_n(f)$ строго меньше правой части (1).

Если бы мы проследили за величиной $E_n(f_{mr})$ при фиксированном m и различных n, то обнаружили бы, что произведение $n^r E_n(f_{mr})$ при больших n становится значительно меньшим константы A_r. Так, например, $A_1 = \frac{\pi}{2}$, в то время как из результатов С. Н. Бернштейна [(2), (3)] следует, что

$$\lim_{n\to\infty} nE_n(f_{m1}) = 0{,}282$$

с точностью до 0,004.

Возникает вопрос*, существует ли в классе $W^{(r)}$ функция f, для которой верхний предел $nE_n(f)$ при $n \to \infty$ был бы как угодно близок к A_r или равен A_r? Утвердительный ответ на него дает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции f, принадлежащей к классу $W^{(r)}$, имеет место неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} n^r E_n(f) \leqslant A_r. \tag{4}$$

При этом в классе $W^{(r)}$ существует функция f, для которой левая часть (4) равна правой.

Самое неравенство (4) непосредственно следует из (1). Что касается второй части утверждения теоремы, то оно будет получено как следствие из теоремы, относящейся к приближениям дифференцируемых функций интерполяционными тригонометрическими полиномами с равноотстоящими узлами интерполяции.

Тригонометрический полином порядка $n-1$, совпадающий с функцией f в точках $x_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n-1}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ может быть записан в виде

$$\tilde{S}_n(f, x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{x-\pi < x_k \leqslant x+\pi} D_n(x - x_k^{(n)})\, f(x_k^{(n)}), \tag{5}$$

где

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{6}$$

Обозначим через

$$M_n(x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{x-\pi < x_k \leqq x+\pi} |D_n(x - x_k^{(n)})| \tag{7}$$

норму (константу Лебега) этого интерполяционного полинома (5), равную, как изввестно (см., например, (5), теорема III при $p = 0$),

$$M_n(x) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}\, x\right| \ln n + O(1). \tag{8}$$

---

* Этот вопрос был поставлен академиком С. Н. Бернштейном на его семинаре в МГУ.

В моей работе [см. ([6]) или ([7])] было доказано, что верхняя грань уклонений функций f от их интерполяционных тригонометрических полиномов вида (5) в точке x, распространенная на класс $W^{(r)}$, равна

$$\sup_{f\in W^{(r)}} |f(x)-\widetilde{S}_n(f, x)| = \frac{A_r M_n(x)}{n^r} + O(n^{-r}), \tag{9}$$

где A_r определяется формулой (2).

Введем в рассмотрение функцию

$$\lambda(x) = \limsup_{n\to\infty} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right|. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что для $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ $\lambda(x) > 0$; если же x несоизмеримо с 2π, то даже $\lambda(x) = 1$.

Основная теорема, доказываемая в этой работе, гласит:

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $f \in W^{(r)}$ имеет место неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^r}{\ln n} |f(x)-\widetilde{S}_n(f, x)| \leqslant \frac{2}{\pi} A_r \lambda(x). \tag{11}$$

При этом для любого x существует функция $f \in W^{(r)}$, для которой левая часть (11) *равна правой.*

Самое неравенство (11) вытекает непосредственно из (8) и (9). Что касается второй части утверждения этой теоремы, то его доказательству посвящен § 2.

Покажем пока, что вторая часть теоремы 1 является следствием второй части теоремы 2. В самом деле, если f—тригонометрический полином порядка $n-1$, то

$$\widetilde{S}_n(f, x) \equiv f(x),$$

откуда для любой функции f имеет место неравенство Лебега:

$$|f(x)-\widetilde{S}_n(f, x)| \leqslant (1+M_n(x)) E_n(f), \tag{12}$$

где $M_n(x)$ определяется по (7), из которого следует, в силу (8) и (10),

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^r}{\ln n} |f(x)-\widetilde{S}_n(f, x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \lambda(x) \limsup_{n\to\infty} n^r E_n(f). \tag{13}$$

Но для функции f, подчиняющейся второй части утверждения теоремы 2, левая часть неравенства (13) равна $\frac{2}{\pi}\lambda(x) A_r$, а значит, для этой функции

$$\limsup_{n\to\infty} n^r E_n(f) = A_r$$

(так как знак $>$ в силу первой части теоремы 1 невозможен), что и требовалось доказать.

В заключение заметим, что если бы $W^{(r)}$ обозначало класс периодических функций, имеющих непрерывную производную $f^{(r)}(t)$, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(t)| \leqslant 1,$$

то для этого класса продолжало бы сохраняться равенство (1), в то время как для любой функции f этого класса левые части неравенств (4) и (11) равнялись бы нулю; это следует из того обстоятельства, что для такой функции

$$E_n(f) = o(n^{-r}).$$

Если функция f имеет на сегменте $[a, b]$ или на действительной оси абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и, следовательно, почти всюду производную r-го порядка, то условимся ради краткости говорить, что функция f имеет на соответствующем сегменте (оси) производную $f^{(r)}$ порядка r, не добавляя, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна.

§ 2

Существенную роль в наших рассуждениях при доказательстве леммы 1 будет играть функция $f_{nr}(x)$, определяемая равенствами (3).

Если принять во внимание, что

$$f_{n0}(x) = \operatorname{sign} \sin nx,$$

то $f_{nr}(x)$ с точностью до знака получается в результате r-кратного интегрирования $\operatorname{sign}\sin nx$, если подбирать на каждом этапе интегрирования произвольную постоянную так, чтобы всякий раз получались функции, среднее значение которых на периоде 2π равнялось нулю.

Для удобства введем в рассмотрение функцию $\bar f_n(x)$ при помощи равенств

$$\left.\begin{aligned} \bar f_n(x) &= f_{nr}\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) && \text{при } r \text{ четном,} \\ \bar f_n(x) &= f_{nr}(x) && \text{при } r \text{ нечетном.} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Функция $\bar f_n(x)$ обладает следующими свойствами:

a) $\bar f_n(x)$ имеет на вещественной оси производную $\bar f_n^{(r)}(x)$ порядка r, попеременно принимающую на интервалах длины $\frac{\pi}{n}$ значения $+1$ и -1;

b) $\bar f_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (1-)^k \frac{A_r}{n^r}$, где A_r определяется из (2);

c) $|\bar f_n^{(m)}(x)| \leqslant \frac{A_{r-m}}{n^{r-m}} < \frac{A}{n^{r-m}} \quad (m = 0, 1, \ldots, r-1)$,

где $A > \max\{A_1, \ldots, A_{r-1}\}$.

Положим, далее,

$$\varphi_n(x) = \bar f_n\left(\frac{2n-1}{2n}\, x\right), \quad h = h_n = \frac{2\pi}{2n-1}. \qquad (15)$$

Тогда функция $\varphi_n(x)$ будет обладать следующими свойствами:

α) $\varphi_n(x)$ имеет на действительной оси производную порядка r, попеременно принимающую значения q и $-q$ на интервалах длины h, где $q = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^r < 1$;

β) $\varphi_n(kh) = (-1)^k \frac{A_r}{n^r}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$;

γ) $|\varphi^{(k)}(x)| < \frac{A}{n^{r-k}}$ $(k = 0, 1, \ldots, r-1)$.

ЛЕММА 1. *Существует константа* L, *зависящая только от* r, *обладающая следующим свойством:*

Каков бы ни был интервал $(a, a+\omega)$ *и для любой системы чисел*

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1},$$

существует многочлен $P(x)$, *для которого выполняются условия:*

$$P^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots r-1), \tag{16}$$

$$P^{(r)}(a) = P^{(r)}(a+\omega) = 0, \tag{17}$$

$$P^{(k)}(a+\omega) = \eta_{r-1-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{18}$$

$$|P^{(r)}(x)| \leqslant \sup_{0 \leq k < r} \frac{L|\eta_k|}{\omega^{k+1}} \text{ для } a \leqslant x \leqslant a+\omega. \tag{19}$$

Доказательство. Достаточно, очевидно, считать, что $a = 0$. Пусть

$$P^{(r)}(x) = \psi(x) \tag{20}$$

—производная порядка r от $P(x)$ и пусть выполняются равенства (16) при $a = 0$; тогда

$$P^{(r-k-1)}(x) = \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k \psi(t)\, dt \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1)$$

$$\eta_{r-1-k} = P^{(r-k-1)}(\omega) = \frac{1}{k!} \int_0^\omega (\omega - t)^k \psi(t)\, dt = \frac{\omega^{k+1}}{k!} \int_0^1 s^k \chi(s)\, ds,$$

где

$$\chi(s) = \psi[\omega(1-s)]. \tag{21}$$

Отсюда получаем систему интегральных уравнений

$$\delta_k = \frac{k!\,\eta_{r-1-k}}{\omega^{k+1}} \int s^k \chi(s)\, ds \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{22}$$

относительно функции $\chi(s)$. Эта система допускает единственное решение в виде многочлена

$$\chi(s) = s(1-s)(\alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{r-1} s^{r-1}), \tag{23}$$

так как определитель соответствующей системы линейных уравнений не равен нулю.

В этом обстоятельстве можно убедиться также при помощи следующих рассуждений.

Построим многочлены

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ki} x^i \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1),$$

образующие ортогональную и нормальную систему с весом

$$q(x)=x(1-x)$$

на интервале (0,1), и положим

$$\sigma_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ki}\delta_i=\int_0^1 P_k(s)\chi(s)\,ds \quad (k=0,1,\ldots,r-1).$$

Тогда многочлен

$$\chi(x)=\sum_{i=0}^{r-1}\sigma_i P_i(x)\,x(1-x),$$

имеющий вид (23), является решением (22), при любых числах δ_k.

Очевидно, коэффициенты α_k многочлена $\chi(s)$ линейно зависят от δ_k, откуда, в силу (22), следует существование константы L (зависящей только от r), для которой имеет место

$$|\chi(s)|\leqslant L\sup_k\frac{|\eta_k|}{\omega^{k+1}} \quad (0\leqslant s\leqslant 1),$$

что влечет неравенство (19) в силу (20) и (21). Равенства (17) следуют из (20), (21) и (23).

Этим лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Существует константа B, обладающая следующим свойством:*

Каково бы ни было $\varepsilon>0$ и для любого интервала (a,b) при любом $n>N$, где N достаточно велико, можно построить на (a,b) функцию

$$\psi_n(x)=\psi_n(x;a,b;\varepsilon),$$

удовлетворяющую условиям:

1) *$\psi_n(x)$ имеет на интервале (a,b) ограниченную производную $(r+1)$-го порядка.*

2) $\psi_n^{(k)}(a)=\psi_n^{(k)}(b)=0 \quad (k=0,1,\ldots,r)$.

3) $|\psi_n^{(k)}(x)|<\frac{B}{n^{r-k}} \qquad (k=0,1,\ldots,r)$.

4) $|\psi_n^{(r)}(x)|<1$.

5) *В некотором интервале $(a+\omega,\ b-\omega_1)$*

$$|\psi_n(x)-\varphi_n(x)|<\varepsilon,$$

где $0<\omega,\ \omega_1<\frac{B}{n}$, а $\varphi_n(x)$ — уже определенная равенством (15) функция.

Доказательство. Рассмотрим в интервале $(a+\omega,\ b-\omega_1)$, где ω и ω_1 будут определены впоследствии, функцию $\varphi_n(x)$ [см. (15)]. Ее производная $\varphi_n^{(r)}(x)$ порядка r (свойство α)) представляет собой функцию, принимающую попеременно на интервалах длины $h=\frac{2\pi}{2n-1}$ значение q и $-q$, где $0<q<1$.

Таким образом, если z_k $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$—точки разрыва $\varphi_n^{(r)}(x)$, то

$$\varphi_n^{(r)}(x)=(-1)^k \varepsilon q \quad (\varepsilon=\pm 1) \text{ для } z_k < x < z_{k+1}.$$

Окружим точки z_k интервалами $\Delta_k = \left(z_k - \frac{\pi}{2m},\ z+\frac{\pi}{2m}\right)$ и положим на Δ_k

$$\psi_n^{(r)}(x)=(-1)^k \varepsilon q \sin m(x-z_k),$$

а вне этих интервалов для $a+\omega \leqslant x \leqslant b-\omega_1$ пусть

$$\psi_n^{(r)}(x)=\varphi_n^{(r)}(x).$$

Таким образом, функция $\psi_n^{(r)}(x)$, определенная на $(a+\omega,\ b-\omega_1)$, по абсолютной величине не превышает единицы (свойство 4)), и имеет непрерывную производную (свойство 1)).

Пусть теперь $\psi_n^{(r-1)}, \psi_n^{(r-2)}, \ldots, \psi_n^{(0)}=\psi_n$—неопределенные интегралы, взятые последовательно от $\psi_n^{(r)}$ с теми же соответственно произвольными постоянными, с помощью которых интегрированием $\varphi_n^{(r)}$ могут быть получены производные $\varphi_n^{(r-1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}$ от φ_n и сама функция φ_n. Тогда, очевидно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно большом m будут выполняться одновременно неравенства

$$|\psi_n^{(k)}(x)-\varphi_n^{(k)}(x)| < \varepsilon \quad (k=0, 1, \ldots, r-1),$$

где $a+\omega < x < b-\omega_1$.

Кроме этого, пусть m настолько велико, что в интервале $(a+\omega_1,\ b-\omega_1)$ выполняются условие 5) и условие 3) при $B=A$. Последнее возможно в силу условия γ) для φ_n.

Таким образом, мы определили для любого n функцию $\psi_n(x)$, удовлетворяющую при произвольных ω и ω_1 в интервале $(a+\omega,\ b-\omega_1)$ условиям леммы.

Нам предстоит теперь определить ω и ω_1 и $\psi_n(x)$ в интервалах $(a,\ a+\omega)$, $(b-\omega_1,\ b)$.

Не определяя еще ω окончательно, будем, однако, считать число ω таким, что точка $a+\omega$ совпадает с одним из чисел $x_k^{(n)}=\frac{2k\pi}{2n-1}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. В силу этого обстоятельства на основании леммы 1 в интервале $(a,\ a+\omega)$ существует многочлен $P(x)$, обладающий свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &P^{(k)}(a)=0, \quad P^{(k)}(a+\omega)=\psi_n^{(k)}(a+\omega) \quad (k=0, 1, \ldots, r), \\ &|P^{(r)}(x)| \leqslant \sup_{0 \leqslant l \leqslant r} \frac{L\ |\psi_n^{(r-1-k)}(a+\omega)|}{\omega^{k+1}}, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

и, так как уже доказано, что

$$|\psi_n^{(k)}(a+\omega)| < \frac{A}{n^{r-k}} \quad (k=0, 1, \ldots, r-1),$$

то, если $\omega=\frac{c}{n}$, где $c > \max\{1,\ LA\}$, будем иметь

$$|P^{(r)}(x)| \leqslant \sup_{0 \leqslant k < r} \frac{LA}{c^{k+1}} < \frac{LA}{c} < 1.$$

Если теперь принять во внимание, что в интервале длины $h=\frac{2\pi}{2n-1}<\frac{7}{n}$ заведомо имеется точка вида $x_k^{(n)}$, то из наших рассуждений следует, что если положить

$$B>\max\{1,\ LA,\ A\}+7,$$

то всегда найдется интервал $(a, a+\omega)$ с $\omega<\frac{B}{n}$ и определенный на нем многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (24) и неравенству

$$|P^{(r)}(x)|\leqslant 1. \qquad (25)$$

Аналогично определяется интервал $(b-\omega_1,\ b)$ и определенный на нем многочлен $P_1(x)$, удовлетворяющий условиям (24) и (25), где надо заменить P, a и $a+\omega$, соответственно на P_1, b и $b-\omega_1$.

Если теперь положить $\psi_n(x)$ равным $P(x)$ на $(a, a+\omega)$ и $P_1(x)$ на $(b-\omega_1, b)$, то функция $\psi_n(x)$ будет удовлетворять условиям доказываемой леммы. Требуется лишь, чтобы n было настолько велико, чтобы

$$\frac{2B}{n}<b-a.$$

Этим лемма доказана. Переходим к доказательству второй части теоремы 2. Положим

$$\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|=\lambda_n(x) \qquad (26)$$

и зададим произвольное фиксированное значение $x\neq 0 \pmod{2\pi}$.

Возьмем подпоследовательность $\mathfrak{M}$ индексов m_i такую, чтобы

$$\lim_{m_i\to\infty}\lambda_{m_i}(x)=\lim_{n\to\infty}\sup\lambda_n(x)=\lambda(x)=\lambda\ \ (\neq 0), \qquad (27)$$

$$\lambda_{m_i}(x)\neq 0 \quad (i=1,\ 2,\ldots).$$

Тогда, очевидно, x не совпадет с точками

$$x_k^{(m_i)}=kh_{m_i},\quad h_m=\frac{2\pi}{2m-1},$$

каковы бы ни были m и $k=0,\ \pm 1,\ldots$

Заметим прежде всего, что функция

$$D_n(x-x_k^{(n)})=\frac{\sin\frac{2n-1}{2}(x-x_k^{(n)})}{2\sin\frac{x-x_k^{(n)}}{2}}=\frac{(-1)^k\sin\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x-x_k^{(n)}}{2}} \qquad (28)$$

меняет последовательно знаки при монотонном изменении k, когда точка $x_k^{(n)}$ находится в интервалах $x-\pi<x_k^{(n)}<x$ и $x<x_k^{(n)}<x+\pi$.

Далее, заметим, что [см. (7) и (8)]

$$I_n(a)=\frac{2}{2n-1}\sum_{|x-x_k^{(n)}|\leqslant a<\pi}|D_n(x-x_k^{(n)})|=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\ln n+O(1), \qquad (29)$$

откуда, приняв во внимание (27),

$$I_{m_k}(a) = \frac{2}{\pi}\lambda \ln m_k + r_k, \tag{30}$$

где

$$r_k = \nu_k \ln m_k + \mu_k, \quad \nu_k \to 0 \text{ при } k \to \infty, \quad |\mu_k| \leqslant c \tag{31}$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$\sigma(m_k) = \sqrt{|r_k| \ln m_k}; \tag{32}$$

тогда, очевидно,

$$\sigma(m_k) = o(\ln m_k), \quad r_k = o(\ln m_k) \text{ при } k \to \infty \tag{33}$$

и, следовательно, для $m_k > N$, где N — достаточно большое (зависящее от a) число

$$I_{m_k}(a) > \frac{2}{\pi}\lambda \ln m_k - \sigma(m_k). \tag{34}$$

Положим еще

$$\Phi_n(a, \mu) = \frac{2}{2n-1} \sum_{c \leqslant |x - x_k^{(n)}| \leqslant \pi} D_n(x - x_k^{(n)})\, \mu(x_k^{(n)}). \tag{35}$$

Тогда, если функция $\mu(t)$ имеет на сегментах $[x-\pi, x-a]$, $[x+a, x+\pi]$ ограниченную производную $(r+1)$-го порядка и если на концах этих сегментов $\mu^{(k)}(t) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$, то существует константа c такая, что

$$|\Phi_n(a, \mu)| < \frac{c \ln n}{n^{r+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

В самом деле, функция $\mu_*(t)$ периода 2π, равная

$$\mu_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x-t| \leqslant a, \\ \mu(t), & \text{если } a \leqslant |x-t| \leqslant \pi, \end{cases}$$

имеет, очевидно, ограниченную производную $(r+1)$-го порядка и наилучшее ее приближение $E_n(\mu_*)$ тригонометрическим полиномом $(n-1)$-го порядка имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$. Поэтому, в силу (5),

$$\Phi_n(a, \mu) = \Phi_n(0, \mu_*) = \tilde{S}_n(\mu_*, x) = \tilde{S}_n(\mu_*, x) - \mu_*(x)$$

и, применяя неравенство Лебега, в силу (7) и (8),

$$|\tilde{S}_n(\mu_*, x) - \mu_*(x)| < (1 + M_n(x))\, E_n(\mu_*) < \frac{c \ln n}{n^{r+1}}.$$

Из этого неравенства следует, что для $n > N$, где N — достаточно большое (зависящее от a) число,

$$|\Phi_n(a, \mu)| < n^{-r}. \tag{37}$$

Приступим теперь к построению функции $f(t) = f_*(t)$, удовлетворяющей условию теоремы 2.

Построение ее будет связано с определением рекуррентным образом убывающей к нулю последовательности чисел

$$\pi > a_0 > a_1 > \ldots$$

и возрастающей подпоследовательности индексов

$$n_0 < n_1 < \ldots,$$

принадлежащих к $\mathfrak{M}$.

Пусть $n_0 = 1$, a_0—произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < a_0 < \pi$, и на сегментах $[x-\pi, x-a_0]$, $[x+a_0, x+\pi]$ функция $f(t) \equiv 0$.

Допустим теперь, что числа

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_{i-1} \text{ и } n_0 < n_1 < \ldots < n_{i-1}$$

уже определены и вместе с ними определена на сегментах $[x-\pi, x-a_{i-1}]$ и $[x+a_{i-1}, x+\pi]$ функция $f(t)$, имеющая на них ограниченную производную порядка $r+1$ и удовлетворяющая на их концах условиям

$$f^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, r).$$

Подберем $n_i > n_{i-1}$ так, чтобы $n_i \in \mathfrak{M}$ и выполнялись одновременно условия:

$$I_{n_i}(a_{i-1}) > \frac{2}{\pi} \lambda \ln n_i - \sigma(n_i), \tag{38}$$

$$|\Phi_{n_i}(a_{i-1}, f)| < n_i^{-r}, \tag{39}$$

что возможно в силу (34) и (37).

Подберем, далее, $a_i < a_{i-1}$ так, чтобы среди точек t, принадлежащих к сегменту $|x-t| \leqslant a_i$, не было вовсе точек вида $x_k^{(n_i)}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, и определим на новых, возникших таким образом сегментах функцию $f(t)$ при помощи равенств

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{l} e_i \psi_{n_i}(t;\ x-a_{i-1},\ x-a_i;\ \varepsilon_{n_i}) = e_i \psi_{n_i}(t), \\ -e_i \psi_{n_i}(t;\ x+a_i,\ x+a_{i-1};\ \varepsilon_{n_i}) = -e_i \psi_{n_i}(t), \end{array} \right\} \tag{40}$$

где функции ψ_{n_i} удовлетворяют на соответствующих сегментах условиям леммы 2 при

$$\varepsilon = \varepsilon_{n_i}, \quad \varepsilon_{n_i} < n_i^{-(r+1)}, \tag{41}$$

а $e_i = \pm 1$, причем знак $\pm$ выбран так, чтобы на соответствующих сегментах функции $\varepsilon_i \varphi_{n_i}(t)$ и $-e_i \varphi_{n_i}(t)$ в точках $t = x_k^{(n_i)}$ имели знаки, совпающие с знаками $D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)})$, что всегда возможно в силу свойства γ) функции φ_n и упомянутого свойства $D_n(x - x_k^{(n)})$.

Таким образом,

$$\operatorname{sign} D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)}) = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sign}\{e_i \varphi_{n_i}(x_k^{(n_i)})\} & \text{при } x-a_{i-1} < x_k^{(n_i)} < x-a_i, \\ -\operatorname{sign}\{e_i \varphi_{n_i}(x_k^{(n_i)})\} & \text{при } x+a_i < x_k^{(n)} < x+a_{i-1}. \end{array} \right\} \tag{42}$$

Теперь уже функция f определена на сегментах $[x-\pi, x-a_i]$, $[x+a_i, x+\pi]$ и притом, в силу свойств ψ_{n_i}, перечисленных в лемме 3, она на этих сегментах имеет ограниченную производную порядка $r+1$, производную $f^{(r)}$ с $|f^{(r)}(t)| \leqslant 1$ и на концах сегментов выполняются равенства $f^{(k)}(t)=0$ $(k=0,1,\ldots, r)$.

Продолжая этот процесс по индукции и положив $f(x)=0$, мы определим функцию f на всем сегменте $[x-\pi,\ x+\pi]$ и продолжим ее затем на всю вещественную ось так, чтобы она была периодичной с периодом 2π.

Мы убедимся в том, что в точке x полученная функция вместе со своими производными до $(r-1)$-го порядка включительно непрерывна, откуда, принимая во внимание ограниченность $f^{(r)}(t)$, будет вытекать абсолютная непрерывность функции $f^{(k)}(t)$ $(k=0, 1,\ldots, r-1)$.

Пусть, например, $x+a_i \leqslant t \leqslant x+a_{i-1}$; тогда на основании (35) и свойства 3) функции ψ_n

$$|f^{(k)}(t)| = |\psi_{n_i}^{(k)}(t; x+a_i, x+a_{i-1};\ \varepsilon_{n_i})| \leqslant \frac{B}{n_i^{r-k}} \underset{t\to x}{\longrightarrow} 0 \tag{43}$$

$$(k=0,1,\ldots,r-1).$$

Отсюда следует, что $f(t)$ непрерывна справа при $t=x$, так как $f(x)=0$.

Пусть уже известно, что $f^{(k)}(t)$ $(k<r-1)$ непрерывна для $t=x$ и, следовательно, $f^{(k)}(x)=0$. Тогда, в силу того, что $f^{(k)}(t)$ имеет для $t>0$ всюду производную, будем иметь

$$\left|\frac{f^{(k)}(t)-f^{(k)}(x)}{t-x}\right| = f^{(k+1)}(x+\theta(t-x)) < \frac{B}{n_j} \underset{t\to x}{\longrightarrow} 0$$

$$(0<\theta<1, \quad n_j \geqslant n_i)$$

и, следовательно, $f^{(k+1)}(x)=0$, что вместе с (43) влечет непрерывность справа $f^{(k+1)}(t)$ при $t=x$. Аналогично рассуждаем для $t<x$.

Итак, определенная нами функция $f \in W^{(r)}$.

Заметим, что

$$f(x)=f(x\pm\pi)=f(x\pm a_i)=0 \quad (i=0,1,\ldots)$$

и оценим отклонение f от ее интерполяционного полинома $\tilde{S}_{n_i}(f)$ в точке $t=x$.

Имеем

$$\tilde{S}_{n_i}(f,x)-f(x)=\tilde{S}_{n_i}(f,\ x)=\frac{2}{2n_i-1}\sum_{|x-x_k^{(n_i)}|<\pi} D_{n_i}(x-x^{(n_i)})\, f(x_k^{(n_i)})=$$

$$=\frac{2}{2n_i-1}\left\{\sum_{a_{i-1}<|x-x_k^{(n_i)}|<\pi} + \sum_{x-a_{i-1}<x_k^{(n_i)}<x-a_i} + \sum_{x+a_i<x_k^{(n_i)}<x+a_{i-1}}\right\}=$$

$$=H+H_1+H_2. \tag{44}$$

Вследствие (30) и (34)

$$H = \Phi_{n_i}(a_{i-1}, f) = O(n_i^{-r}) = o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right). \tag{45}$$

Прежде чем приступить к оценке H_1, примем во внимание, что на сегменте $[x-a_{i-1}, x-a_i]$ функция f определена при помощи первого из равенств (35):

$$f(t) = e_i \psi_{n_i}(t)$$

и при этом на основании (42) и свойства β) функции φ_n

$$e_i \varphi_{n_i}(x_k^{(n_i)}) = \frac{A_r}{n_i^r} \operatorname{sign} D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)}). \tag{46}$$

Заметим еще, что возникающие на рассматриваемом сегменте $[a, b]$ $(a = x-a_{i-1},\ b = x-a_i)$ при определении (по лемме 3) функции ψ_{n_i} отрезки длины ω и ω_1 не превышают по величине $\frac{B}{n_i^r}$, откуда следует, что число точек $x_k^{(n_i)}$, которые могут уместиться на этих отрезках, не превышает некоторой константы g, не зависящей от n_i.

Имеем

$$H_1 = \frac{2}{2n_i - 1}\left\{ \sum_{x-a_{i-1} < x_k^{(n_i)} \leqslant x - a_{i-1} + \omega} D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)}) f(x_k^{(n_i)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{x-a_{i-1}+\omega < x_k^{(n_i)} < x - a_i - \omega_1} + \sum_{x-a_i-\omega_1 \leqslant x_k^{(n_i)} < x - a_i} \right\} = H_1^{(1)} + H_1^{(2)} + H_1^{(3)}. \tag{47}$$

Вследствие сделанных замечаний и того обстоятельства, что

$$\frac{2}{2n-1} D_n|(x - x_k^{(n_i)})| < c,$$

$$|f(t)| = |\psi_{n_i}(t)| < \frac{B}{n_i^r} \quad x - a_{i-1} < t < x - a_i,$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned} |H_1^{(1)}| &< \frac{gcB}{n^r} = o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right), \\ |H_1^{(3)}| &< o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Далее,

$$H_1^{(2)} = \frac{2}{2n_i - 1} \sum_{x-a_{i-1}+\omega < x_k^{(n_i)} < x - a_i - \omega_1} D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)}) e_i \varphi_{n_i}(x_k^{(n_i)}) +$$

$$+ \frac{2}{2n_i - 1} \sum_{x-a_{i-1}+\omega < x_k^{(n_i)} < x - a_i - \omega_1} D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)}) e_i \{\psi_{n_i}(x_k^{(n_i)}) - \varphi_{n_i}(x_k^{(n_i)})\} =$$

$$= \frac{A_r}{n^r} \frac{2}{2n_i - 1} \sum_{x-a_{i-1} < x_k^{(n_i)} \leqslant x} |D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)})| + o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right), \tag{49}$$

так как первая сумма с добавлением самое большее $2g$ слагаемых (в интервале $(x-a_i, x)$ точек $x_k^{(n_i)}$ нет) изменяется, вследствие неравенства

$$|\varphi_{n_i}(t)| < \frac{B}{n_i^r},$$

на $o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right)$, а вторая сумма не превышает, в силу (41), (8) и свойства 5) леммы 3:

$$\frac{2}{2n_i-1}\frac{1}{n_i^{r+1}}\sum_{|x-x_k^{(n_i)}|<\pi}|D_n(x-x_k^{(n_i)})| < \frac{c\ln n_i}{n_i^{r+1}} = o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right).$$

Аналогичную оценку получим для $H_1^{(3)}$;

$$H_1^{(3)} = \frac{A_r}{n_i^r}\frac{2}{2n_i-1}\sum_{x<x_k^{(n_i)}<x+a_{i-1}}|D_{n_i}(x-x_k^{(n_i)})| + o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right). \tag{50}$$

Отсюда из (39)—(44), (33), (28) и (29) следует

$$\tilde{S}_{n_i}(f,x) - f(x) = \frac{A_r}{n_i^r}\frac{2}{2n_i-1}\sum_{|x-x_k^{(n_i)}|<a_{i-1}}|D_{n_i}(x-x_k^{(n_i)})| + o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right) =$$

$$= \frac{A_r}{n_i^r}I_n(a_{i-1}) + o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right) > \frac{2A_r}{\pi}\lambda\frac{\ln n_i}{n_i^r} + o\left(\frac{\ln n_i}{n_i^r}\right), \tag{51}$$

что влечет неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{n}{\ln n}|\tilde{S}_n(f,x) - f(x)| \geqslant \frac{2A_r}{\pi}\lambda = \frac{2A_r}{\pi}\lambda(x), \tag{52}$$

в котором знак $>$, в силу уже установленной справедливости первой части теоремы 2, невозможен.

Этим теорема доказана.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР.

Поступило
27.XII.1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении функций посредством тригонометрических сумм, Доклады Ак. Наук СССР, 15 (1937), 107—112.

[2] Bernstein S., Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés, Acta Mathem., 37 : 1 (1913), 1—57.

[3] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x-c|^p$, Доклады Ак. Наук СССР, 18 (1938), 379—384.

[4] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. de sciences math. (1937), 209—224.

[5] Никольский С. М., О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 509—520.

[6] Никольский С. М., Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами, Доклады Ак. Наук СССР, XXXI, № 3 (1941), 210—214.

[7] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, XV (1945), 1—76.

S. NIKOLSKY. ON INTERPOLATION AND BEST APPROXIMATION OF DIFFERENTIABLE PERIODIC FUNCTIONS BY TRIGONOMETRICAL POLYNOMIALS

SUMMARY

§ 1. Let $W^{(r)}$ denote the class of functions f of period 2π that possess the absolutely continuous $(r-1)$-th derivative and the r-th derivative (almost everywhere) satisfying the inequality

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant 1.$$

Let, further, $E_n(f)$ denote the best approximation of the function f by trigonometrical polynomials of order $n-1$.

J. Favard, N. Akhiezer and M. Krein have shown [see ([1]) and ([4])] that

$$\sup_{f\in W^{(r)}} E_n(f) = \frac{A_r}{n^r}, \tag{1}$$

where

$$A_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{2}$$

It is also established that the functions in the class $W^{(r)}$ for which the upper bound (1) is attained for a fixed n are expressed by the formula $c \pm f_{nr}(x+\alpha)$, where c and α are arbitrary constants and

$$f_{nr}(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n^r} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)nx}{(2\nu+1)^{r+1}} & \text{for even } r, \\ \dfrac{4}{\pi n^r} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1)nx}{(2\nu+1)^{r+1}} & \text{for odd } r. \end{cases} \tag{3}$$

One can see that for fixed m $n^r E_n(f_{mr})$ becomes considerably less than A_r as $n \to \infty$. For instance, $A_1 = \frac{\pi}{2}$, while, according to the results of S. Bernstein [(2), (3)], $\lim_{n\to\infty} nE_n(f_{m1}) \simeq 0.282\dots$. The question arises whether there is a function f in $W^{(r)}$ for which $\limsup_{n\to\infty} n^r E_n(f)$ approaches A_r arbitrarily close. The following theorem answers the question in the affirmative.

THEOREM 1. *For every function $f \in W^{(r)}$ the inequality takes place:*

$$\limsup_{n\to\infty} n^r E_n(f) \leqslant A_r. \tag{4}$$

There is a function f in $W^{(r)}$ for which the left side of (4) *equals the right one.*

The inequality (4) itself follows from (1). As to the second assertion of the theorem, it is a corollary of a theorem on approximation of differentiable functions by polynomials with equidistant interpolations knots.

Consider the trigonometrical polynomial of order $n-1$

$$\tilde{S}_n(f,x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{x-\pi < x_k \leqslant x+\pi} D_n(x - x_k^{(n)}) f(x_k^{(n)}), \tag{5}$$

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \tag{6}$$

which coincides with $f(x)$ at the points $x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$ $(k = 0, \pm 1, \dots)$ and put

$$\lambda(x) = \limsup_{n\to\infty} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right|. \tag{10}$$

THEOREM 2. *For every function $f \in W^{(r)}$ the following inequality holds:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^r}{\ln n} | f(x) - \tilde{S}_n(f, x) | \leqslant \frac{2}{\pi} A_r \lambda(x). \tag{11}$$

Thereby for every x there is a function in $W^{(r)}$ for which the left side of (11) *equals the right one.*

The inequality (11) follows from the relation which I have proved earlier [see (6) or (7)]:

$$\sup_{f\in W^{(r)}} | f(x) - \tilde{S}_n(f, x) | = \frac{A_r M_n(x)}{n^r} + O(n^{-r}), \tag{9}$$

$$M_n(x) = \frac{2}{\pi} \ln n \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| + O(1). \tag{8}$$

The fact that for a certain $f \in W^{(r)}$ the second part of theorem 2 holds, together with the inequality

$$|f(x) - \tilde{S}_n(f, x)| \leqslant (1 + M_n(x)) E_n(f), \tag{12}$$

imply that also the second part of theorem 1 holds for the same function f.

§ 2. It is the function $f_{nr}(x)$ defined by (3) that plays an essential rôle in constructing the function $f \in W^{(r)}$ for which the second assertion of theorem 2 holds.

Keeping in mind that the r-th derivative of $f_{nr}(x)$ is sign sin nx, we obtain from the equalities

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{nr}\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) & \text{for even } r, \\ f_n\ (x) & \text{for odd } r, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \bar{f}_n\left(\frac{2n-1}{2n} x\right), \quad h = h_n = \frac{2\pi}{2n-1} \tag{15}$$

that the function $\varphi_n(x)$ possess the following properties:

α) on the real axis $\varphi_n(x)$ has the r-th derivative which alternately takes the values q and $-q$ on the intervals of length h (here $q < 1$);

β) $\varphi_n(kh) = (-1)^k \frac{A_r}{n^r} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$;

γ) $|\varphi_n^{(k)}(x)| < \frac{A}{n^{r-k}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, r-1)$.

LEMMA 1. *There exists a constant* λ *depending on* r *only, which has the following property: whatever be an interval* $(a, a+\omega)$ *and a system of numbers* $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$, *there is a polynomial* $P(x)$ *such that*

$$P^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{16}$$

$$P^{(r)}(a) = P^{(r)}(a + \omega) = 0, \tag{17}$$

$$P^{(k)}(a + \omega) = \eta_{r-1-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{18}$$

$$|P^{(r)}(x)| \leqslant \sup_{0 \leqslant k < r} \frac{L|\eta_k|}{\omega^{k+1}} \quad \textit{for} \quad a \leqslant x \leqslant a + \omega. \tag{19}$$

LEMMA 2. *There exists a constant* B *with the following property: whatever be* $\varepsilon > 0$ *and an interval* (a, b), *for every* $n > N$, *where* N *is sufficiently large, a function*

$$\psi_n(x) = \psi_n(x;\ a, b;\ \varepsilon),$$

can be constructed on (a, b) *such that*

1) $\psi_n(x)$ *has the* $(r+1)$*-th derivative bounded on* (a, b);

2) $\psi_n^{(k)}(a) = \psi_n^{(k)}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, r)$;

3) $|\psi_n^{(k)}(x)| < \frac{B}{n^{r-k}}$ $\qquad (k=0, 1, \ldots, r-1)$;

4) $|\psi_n^{(r)}(x)| < 1$;

5) *on an interval* $(a+\omega, b-\omega_1)$

$$|\psi_n(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon,$$

where $0 < \omega,\ \omega_1 < \frac{B}{n}$ *and* $\varphi_n(x)$ *is defined by* (15).

Let us now introduce the notations (26) * and let $\mathfrak{M}$ be the sequence of indices m_i for which (27) holds at $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

The kernel $D_n(x - x_k^{(n)})$ changes its sign as k varies monotonically. when $x_k^{(n)}$ lies in the intervals $x - \pi < x_k^{(n)} < x$ and $x < x_k^{(n)} < x + \pi$. The relation (29), and hence (30) and (31), hold. Introducing the notation (32), we obtain (33) and (34); the latter takes place for $m_k > N$, where $N = N(a)$ is sufficiently large. If $\mu(t)$ has the bounded $(r+1)$-th derivative on the segment $[x-\pi, x-a]$ and $[x+a, x+\pi]$ and $\mu^{(k)}(t) = 0$ $(k=0, 1, \ldots, r)$ at the endpoints of these segments, then, if the notations (35), for a constant c (36) and (37) take place, the latter holds for $n > N_1$, where N is sufficiently large.

The construction of the function f for which the second assertion of theorem 2 is valid is connected with a descending numerical sequence $\pi > a_0 > a_1 > \ldots$ converging to zero, as well as with an ascending sequence of indices $n_0 < n_1 < \ldots$ belonging to $\mathfrak{M}$.

Suppose $n_0 = 1$, $0 < a_0 < \pi$ and $f(t) \equiv 0$ on the segments $[x-\pi, x-a_0]$, $[x+a_0, x+\pi]$; suppose further that the numbers $a_0 > a_1 > \ldots > a_{i-1}$, $n_0 < n_1 < \ldots < n_{i-1}$ are already defined, together with the function $f(t)$ on the segments $[x-\pi, x-a_{i-1}]$, $[x+a_{i-1}, x+\pi]$ possessing the bounded $(r+1)$-th derivative and satisfying the conditions $f^{(k)}(t) = 0$ $(k=0, 1, \ldots, r)$ at the endpoint of the segments.

Choose $n_i > n_{i-1}$ so as to have $n_i \in \mathfrak{M}$ and the conditions (38) and (39) fulfilled, which is possible in virtue of (34) and (37).

We now take $a_i < a_{i-1}$ under the condition that the segment $|x-t| \leqslant a_i$ contains no point of the form $t = x_k^{(n_i)}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$ and defines the function $f(t)$ on the new segments by means of the equalities (40) with the functions ψ_{n_i} satisfying the conditions of lemma 2 on the corresponding segments for $\varepsilon = \varepsilon_{n_i}$, $\varepsilon_{n_i} < n_i^{-(r+1)}$; thereby $e_i = \pm 1$ and the sign is to be chosen in such a way that the functions $e_i\varphi_{n_i}(t)$ and $-e_i\varphi_{n_i}(t)$ be of the same sign as $D_{n_i}(x - x_k^{(n_i)})$ at the points $t = x_k^{(n_i)}$; this is possible in view of the property γ) of the function φ_n and the property of $D_n(x - x_k^{(n)})$ mentioned above. Thus (42) is valid.

In this way the function f is defined on the segments $[x-\pi, x-a_i]$, $[x+a_i, x+\pi]$ and, by the properties of ψ_{n_i} listed in lemma 3, f possesses the $(r+1)$-th derivative on these segments, its r-th derivative satis-

* Here and henceforth we refer to the formulae in the Russian text

fies the inequality $|f^{(r)}(t)| \leqslant 1$ and $f^{(k)}(t) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$ at the endpoints of the segments.

Continuing the process by induction and putting $f(x) = 0$, we define f on the whole segment $[x - \pi, x + \pi]$ and then on the whole real axis periodically with the period 2π.

The function $f \in W^{(r)}$ so constructed has the property stated in the second part of theorem 2 which is proved by means of equalities (44) — (52).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
...ая математическая 10 (1946), 411—428 Série mathématique

Н. И. АХИЕЗЕР

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Среди многих замечательных свойств, принадлежащих целым трансцендентным функциям экспоненциального типа, особый интерес представляют некоторые неравенства, установленные С. Н. Бернштейном и играющие важную роль в различных вопросах теории наилучшего приближения функций. Эти неравенства обобщались и передоказывались многими авторами.

Из различных подходов к относящимся сюда вопросам особого внимания заслуживают, во-первых, тот, который связан с принципом максимума и теоремами Фрагмен-Линделефа, и, во-вторых, тот, который опирается на преобразование Фурье.

В настоящей статье оба эти метода используются при довольно общих предположениях.

Целой трансцендентной функцией экспоненциального типа с показателем σ называют целую функцию $f(z)$, для которой

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln |f(z)|}{|z|} = \sigma.$$

Среди многих замечательных свойств, принадлежащих этим функциям, особый интерес представляют некоторые неравенства, установленные С. Н. Бернштейном и играющие важную роль в различных вопросах теории наилучшего приближения функций. Эти неравенства обобщались и передоказывались многими авторами. Наиболее существенное обобщение принадлежит самому С. Н. Бернштейну и изложено подробно в известных монографиях 1926 г. ([1]) и 1937 г. ([2]).

Из различных подходов к относящимся сюда вопросам особого внимания заслуживают, во-первых, тот, который связан с принципом максимума и теоремами Фрагмен-Линделефа, и, во-вторых, тот, который опирается на преобразование Фурье.

В настоящей статье оба эти метода используются при довольно общих предположениях.

Доказательство теоремы 1 о нулях является обобщением принадлежащего Дюффину и Шефферу ([3]) доказательства аналогичного более простого предложения.

Теорема 2 является обобщением нескольких теорем С. Н. Бернштейна [(2), стр. 138—139, 166, 168, 171, 186, 198].

Что касается преобразования Фурье, то при некоторых ограничительных предположениях относительно данной целой функции его для аналогичной цели применил Боас (4). В настоящей статье эти ограничения не делаются. Преобразование Фурье используется для вывода «интерполяционных» формул, из которых одна известна давно, и которые представляют интерес независимо от их приложения для доказательства неравенств.

1. Обозначим через E_σ $(\sigma \geqslant 0)$ совокупность всех целых функций $\omega(z)$ экспоненциального типа с показателем σ, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $\omega(z) = s(z) + it(z)$, где $s(z)$, $t(z)$—вещественные функции, не имеющие общих нулей;

2) при $Iz \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| \geqslant 1,$$

а следовательно, при $Iz \leqslant 0$—неравенство

$$\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| \leqslant 1,$$

где $\overline{\omega}(z) = s(z) - it(z)$;

3) при любом $\varepsilon > 0$ существует такая константа $m = m(\varepsilon)$, что

$$\frac{1}{|\omega(iy)|} \leqslant me^{-(\sigma-\varepsilon)y} \quad (y \geqslant 0),$$

$$\frac{1}{|\overline{\omega}(iy)|} \leqslant me^{(\sigma-\varepsilon)y} \quad (y \leqslant 0).$$

Простейшим представителем класса E_σ является функция $e^{-i\sigma z}$.

В силу свойства 1) функция $\omega(z)$ не имеет вещественных нулей, а в силу свойства 2) все нули функции $\overline{\omega}(z)$ должны лежать в полуплоскости $Iz > 0$ и, следовательно, нули функции $\omega(z)$ должны лежать в полуплоскости $Iz < 0$.

Мы обозначим нули функции $\omega(z)$ через $\alpha_k - i\beta_k$, причем случай, когда $\omega(z)$ вообще не имеет нулей (и поэтому отличается от $e^{-i\sigma z}$ лишь постоянным множителем), также не исключается.

Из условия 2), как известно [см. (5), стр. 235—236], вытекает, что

$$\sum_k \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} < \infty \tag{1}$$

и

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)} = e^{-i(az+b)} \prod_k \frac{1 - \frac{z}{\alpha_k - i\beta_k}}{1 - \frac{z}{\alpha_k + i\beta_k}} \tag{2}$$

где $a \geqslant 0$, $b \gtrless 0$.

Сама же функция $\omega(z)$ допускает представление

$$\omega(z) = \omega(0)\, e^{-i\left(\frac{a}{2}+ic\right)z} \prod_k \left(1 - \frac{z}{\alpha_k - i\beta_k}\right) e^{\frac{\alpha_k z}{\alpha_k^2+\beta_k^2}}, \qquad (3)$$

где c—вещественная константа.

Далее, из условия 2) вытекает, что при $Iz \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$I\frac{s(z)}{t(z)} \geqslant 0,$$

а при $\leqslant 0$—неравенство

$$I\frac{s(z)}{t(z)} \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что функции $s(z)$, $t(z)$ имеют только простые, вещественные и притом перемежающиеся нули *.

Приведем некоторые примеры функций, принадлежащих E_σ:

a) Классу E_σ принадлежит функция

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikhz} \quad \left(h = \frac{\sigma}{n}\right),$$

если константы c_k таковы, что все нули этой функции лежат в области $Iz < 0$ и $c_n \neq 0$.

b) Классу E_σ принадлежит функция

$$e^{-i\sigma z}\omega_0(z),$$

где $\omega_0(z)$—произвольная функция нулевого рода, все нули которой лежат в области $Iz < 0$.

c) Классу E_σ принадлежит всякая функция экспоненциального типа с показателем σ, удовлетворяющая условиям 1), 2), и для которой произведение

$$\omega(z)\,\overline{\omega}(z)$$

есть четная функция [ср. ([2]), стр. 185] от z.

Действительно, при выполнении последнего условия нули функции $\omega(z)$ попарно симметричны относительно мнимой оси и, кроме того, константа c в представлении (3) равна нулю. Поэтому

$$\omega(z) = \omega(0)\, e^{-i\frac{a}{2}z} \prod_k \left(1 - \frac{z}{\alpha_k - i\beta_k}\right)\left(1 + \frac{z}{\alpha_k + i\beta_k}\right),$$

если надлежащим образом изменить нумерацию нулей. Отсюда легко следует, что

---

* Если исключить случай, когда одна из функций $s(z)$, $t(z)$ тождественно равна нулю, а следовательно, другая есть вещественная константа, отличная от нуля.

$$|\omega(z)| \leqslant |\omega(ir)| \quad (r = |z|, \ Iz > 0),$$

а также, что вдоль положительной половины мнимой оси $|\omega(z)|$ регулярно растет; это влечет равенство $a = 2\sigma$ и выполнение первого из условий 3); второе условие проверяется аналогично.

2. ЛЕММА*. *Пусть $f(z)$—целая функция экспоненциального типа с показателем* $\leqslant \tau$. *Если*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\omega(z) \in E_\sigma$, *причем* $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$, *то при* $Iz \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$|f(z)| \leqslant |\omega(z) e^{-i(\tau-\sigma)z}|,$$

а при $Iz \leqslant 0$*—неравенство*

$$|f(z)| \leqslant |\overline{\omega}(z) e^{-i(\tau-\sigma)z}|.$$

Доказательство. Полагая для сокращения письма $p = \tau - \sigma$, зададимся произвольным положительным числом ε и рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{\omega(z+i\varepsilon)\, e^{-i(p+\varepsilon)z}}.$$

Эта функция регулярна в области $Iz \geqslant 0$, а на вещественной оси удовлетворяет неравенству

$$|g_\varepsilon(x)| = \frac{|f(x)|}{|\omega(x+i\varepsilon)|} \leqslant \frac{|f(x)|}{|\omega(x)|} \leqslant 1, \qquad (4)$$

так как в силу (3)

$$|\omega(x+i\varepsilon)| \geqslant e^{\frac{a}{2}\varepsilon} |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Далее, поскольку существуют такие константы m_1, m_2, что

$$|f(iy)| \leqslant m_1 e^{\left(\tau+\frac{\varepsilon}{2}\right)y}, \quad \frac{1}{|\omega(iy)|} \leqslant m_2 e^{-\left(\sigma-\frac{\varepsilon}{2}\right)y} \quad (y \geqslant 0),$$

то

$$\sup_{y \geqslant 0} |g_\varepsilon(iy)| < \infty. \qquad (5)$$

Воспользуемся теперь тем, что все нули функции $\omega(z+i\varepsilon)$ лежат ниже прямой $y = \varepsilon$. На основании известной теоремы (см., например, ([7]), стр. 281) теории целых функций отсюда вытекает, что при любом $\delta > 0$ существует такая константа M, что

$$\frac{1}{|\omega(z+i\varepsilon)|} \leqslant M e^{\frac{\delta}{2}|z|^2} \quad (Iz \geqslant 0).$$

Следовательно, существует такая константа M_1, что при $Iz \geqslant 0$

$$|g_\varepsilon(z)| \leqslant M_1 e^{\delta|z|^2}. \qquad (6)$$

---

* Частные случаи см. ([2]), стр. 74—75, 160—161, 163, 165. См. также ([6]), т. II, стр. 44—45.

На основании известной теоремы (см., например, ([6]), том 1, стр. 178) теории функций, относящейся к кругу идей Фрагмена-Линделефа, из неравенств (4), (5), (6), следует, что при $Iz \geqslant 0$

$$|g_\varepsilon(z)| \leqslant M_2,$$

где M_2—некоторая константа, за которую, как легко видеть, можно принять 1. Поэтому при $Iz \geqslant 0$

$$|g_\varepsilon(z)| \leqslant 1,$$

откуда, благодаря произвольности числа $\varepsilon > 0$, вытекает, что

$$|g_0(z)| \leqslant 1,$$

т. е. подлежащее доказательству неравенство

$$|f(z)| \leqslant |\omega(z) e^{-ipz}| \qquad (Iz \geqslant 0).$$

Аналогично доказывается соответствующее неравенство для нижней полуплоскости.

3. Имея некоторую функцию $\omega(z) \in E_\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$ и некоторые вещественные числа $\tau \geqslant \sigma$, λ, рассмотрим функцию

$$\Omega(z; \tau, \lambda) = \frac{1}{2}\{\omega(z) e^{-i(\tau-\sigma)z + i\lambda} + \overline{\omega}(z) e^{i(\tau-\sigma)z - i\lambda}\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если $\omega(z) \in E_\sigma (\sigma \geqslant 0)$, а $f(z)$—вещественная целая функция экспоненциального типа с показателем $\leqslant \tau$, где $\tau \geqslant \sigma$, которая удовлетворяет неравенству*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

то разность

$$\Omega(z; \tau, \lambda) - f(z)$$

либо равна тождественно нулю, либо имеет только вещественные нули, и эти нули простые, за возможным исключением тех из них, в которых $f(x) = \pm |\omega(x)|$.

Доказательство [см. ([3])]. Возьмем функцию

$$f_\varepsilon(z) = \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon z}(1-\varepsilon) f(z),$$

где $0 < \varepsilon < 1$; она удовлетворяет неравенству

$$|f_\varepsilon(x)| \leqslant (1-\varepsilon)|\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{7}$$

На прямой $y = N > 0$, в силу доказанной выше леммы,

$$|f_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon N} |\omega(z)| e^{(p+\varepsilon)N} \quad (p = \tau - \sigma).$$

С другой стороны,

$$|\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|\omega(z)| e^{(p+\varepsilon)N} - \frac{1}{2}|\overline{\omega}(z)| e^{-(p+\varepsilon)N}$$

Поэтому для всех достаточно больших N на прямых $y = N$ имеет место неравенство

$$|f_\varepsilon(z)| < |\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda)|, \tag{8}$$

и это же неравенство имеет место на прямых $y = -N$.

Возьмем какое-нибудь положительное и меньшее единицы число δ и построим прямую $y = y_\delta$, на которой

$$|e^{2i(p+\varepsilon)z-2i\lambda}| = 1-\delta.$$

Далее, для каждого $x\,(-\infty < x < \infty)$ определим наименьшее y, при котором

$$\left|\frac{\overline{\omega}(x+iy)}{\omega(x+iy)}e^{2i(p+\varepsilon)(x+iy)-2i\lambda}\right| = 1-\delta.$$

Геометрическим местом точек (x, y), таким образом определенных, будет некоторая кривая L_δ, лежащая, очевидно, в полосе, ограниченной вещественной осью и прямой $y = y_\delta$. Внутри области G_δ, ограниченной вещественной осью и кривой L_δ, функция $\overline{\omega}(z)$ нулей не имеет.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\arg\left\{\frac{\overline{\omega}(x)}{\omega(x)}e^{2i(p+\varepsilon)x-2i\lambda}\right\} = (p+\varepsilon)x - \lambda + \frac{1}{2}\arg\left\{\frac{\overline{\omega}(x)}{\omega(x)}\right\}.$$

Учитывая представление (2), находим, что

$$\Phi'_\varepsilon(x) = p + \varepsilon + \sum_k \frac{\beta_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2} + \alpha,$$

где $\alpha \geqslant 0$. Отсюда видно, что функция $\Phi_\varepsilon(x)$ монотонно стремится к $+\infty$, когда $x \to +\infty$, и монотонно стремится к $-\infty$, когда $x \to -\infty$.

Обозначим через $x_n\,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ту точку, в которой функция $\Phi_\varepsilon(x)$ принимает значение $n\pi$, и проведем через точку x_n дугу γ_n, лежащую внутри области G_δ, на которой

$$\frac{1}{2}\arg\left\{\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}e^{2i(p+\varepsilon)z-2i\lambda}\right\} = n\pi.$$

Точку пересечения дуги γ_n с кривой L_δ обозначим через $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$.

Нетрудно видеть, что при $n \to \pm\infty$ расстояние от начала координат до дуги γ_n стремится к бесконечности.

В самом деле, обозначим через $G_\delta(M)$ ту часть области G_δ, для которой $-M \leqslant x \leqslant M$. При переходе от одной точки области $G_\delta(M)$ к другой точке этой области аргумент функции

$$\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}e^{2i(p+\varepsilon)z-2i\lambda} \tag{9}$$

претерпевает изменение, абсолютная величина которого не превосходит $2c\pi$, где c зависит только от M.

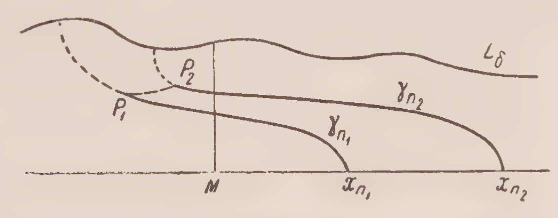
Допуская, что в области $G_\delta(M)$ лежат части дуг γ_n со сколь угодно большими значениями $|n|$, возьмем две такие дуги γ_{n_1}, γ_{n_2}, для которых $|n_2 - n_1| > 1 + c$, и на дугах γ_{n_1}, γ_{n_2} возьмем точки P_1, P_2, лежащие в области $G_\delta(M)$. Рассмотрим контур $P_1x_{n_1}x_{n_2}P_2P_1$. Изменение аргумента функции (9) при обходе этого контура будет больше 2π, что абсурдно, так как рассматриваемая регулярная функция в области G_δ не имеет нулей. Наше утверждение доказано.

Так как на дуге γ_k

$$\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{2}\,\omega(z)\, e^{-i(p+2\varepsilon)+i\lambda}(1+\rho),$$

где $1-\delta \leqslant \rho \leqslant 1$, то на γ_k

$$|\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda)| \geqslant |\omega(z)|\, e^{-(p+\varepsilon)v}\left(1-\frac{\delta}{2}\right) > \frac{\delta}{2}\,|\omega(z)|\, e^{-(p+\varepsilon)v}.$$



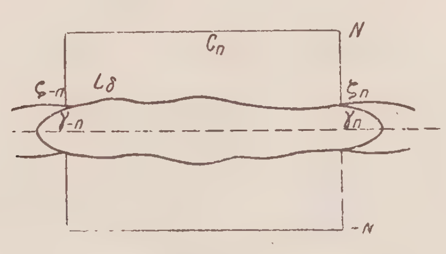
Черт. 1.

Возьмем n настолько большим, чтобы на дугах γ_n, γ_{-n} выполнялось неравенство

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon|z|} < \frac{\delta}{2}.$$

Тогда на дугах γ_n, γ_{-n} будет иметь место неравенство (8). Это же неравенство будет выполняться на полупрямых

$$x = \xi_n \quad (y \geqslant \eta_n), \quad x = \xi_{-n} \quad (y \geqslant \eta_{-n}).$$



Черт. 2.

На основании этих рассмотрений, повторенных и для нижней полуплоскости, мы получаем контуры C_n, во всех точках которых выполняется неравенство (8).

С помощью теоремы Руше мы заключаем, что функции

$$\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda) - f(z) \tag{10}$$

и

$$\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda)$$

имеют одинаковое число нулей внутри контура C_n, а так как N можно взять сколь угодно большим, то и во всей полосе, которая получится при $N \to \infty$.

Примем теперь во внимание неравенство (7), а также равенства

$$\Omega(x_n; \tau+\varepsilon, \lambda) = (-1)^n |\omega(x_n)| \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Из них вытекает, что разность (10) имеет по одному нулю в каждом интервале (x_n, x_{n+1}). А так как в каждом таком интервале функция $\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda)$ имеет точно один нуль, причем этим исчерпываются все нули функции $\Omega(z; \tau+\varepsilon, \lambda)$, то разность (10) имеет только вещественные и притом простые нули.

Будем приближать ε к нулю и примем, что

$$f(z) \not\equiv \Omega(z; \tau, \lambda).$$

По теореме Гурвица разность

$$\Omega(z; \tau, \lambda) - f(z) \tag{10 bis}$$

имеет только вещественные нули, и первое утверждение теоремы доказано.

Переходим к доказательству второго утверждения.

Если ε стремится к нулю, то значение функции $\Phi_\varepsilon(x)$ убывает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$. Поэтому точки x_n, лежащие справа от начала координат, будут удаляться вправо, а точки, лежащие слева от начала координат, будут удаляться влево. Предельное положение точки x_n обозначим через $\mathring{x}_n$. Этих точек может быть уже всего конечное число.

Если $\mathring{x}_k$ — конечная точка, то

$$\Omega(\mathring{x}_k; \tau, \lambda) = (-1)^k |\omega(\mathring{x}_k)|$$

и

$$\operatorname{sign}\{\Omega(\mathring{x}_k; \tau, \lambda) - f(\mathring{x}_k)\} = (-1)^k,$$

в предположении, что

$$f(\mathring{x}_k) \neq (-1)^k |\omega(\mathring{x}_k)|. \tag{11}$$

Пусть мы имеем две конечные точки $\mathring{x}_n$, $\mathring{x}_{n+1}$, лежащие, скажем, справа от начала координат, причем в обеих выполняется неравенство (11). Интервал $(\mathring{x}_n, \mathring{x}_{n+1})$ является частью интервала (x_n, x_{n+2}), в котором разность (10) имеет точно два нуля. Поэтому в интервале $(\mathring{x}_n, \mathring{x}_{n+1})$ разность (10 bis) имеет не более двух нулей. Но на концах интервала $(\mathring{x}_n, \mathring{x}_{n+1})$ разность (10 bis) имеет противоположные знаки; следовательно, в этом интервале она имеет один простой нуль.

Допустим теперь, что

$$f(\mathring{x}_n) = (-1)^n |\omega(\mathring{x}_n)|.$$

В этом случае

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}_{x=\mathring{x}_n} = 0,$$

а так как

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\Omega(x; \tau, \lambda)}{|\omega(x)|}\right\}_{x=\mathring{x}_n} = 0,$$

то точка $\mathring{x}_n$ будет кратным нулем разности (10 bis).

Возьмем интервал $(x_{n-1}^{\circ}, x_{n+1}^{\circ})$. Он является частью интервала $(x_{n-1}', x_{n+2}^{\circ})$, в котором разность (10) имеет три нуля. Следовательно, в интервале $(x_{n-1}^{\circ}, x_{n+1}^{\circ})$ разность (10 bis) имеет не более трех нулей. Поэтому на концах интервала $(x_{n-1}^{\circ}, x_{n+1}^{\circ})$ будет выполнено условие (11), откуда следует, что разность (10 bis) в этом интервале имеет четное число нулей, т. е. один двойной нуль x_n°.

Остается рассмотреть случай, когда справа от точки x_n° нет ни одной точки этого рода. Взяв произвольное $X > x_n^{\circ}$, получим интервал (x_n°, X), являющийся частью интервала (x_n, x_{n+1}) для всех достаточно малых ε. Поэтому справа от точки x_n° разность (10 bis) не может иметь более одного простого нуля. Этот нуль наверно отсутствует, если

$$f(x_n^{\circ}) = (-1)^n |\omega(x_n^{\circ})|.$$

В этом случае x_n° есть двойной нуль разности (10 bis), и других нулей разность (10 bis) в интервале $[x_{n-1}^{\circ}, \infty)$ не имеет.

Следствие [см. ([3])]. *Пусть выполняются условия теоремы 1. В таком случае для любого z*

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2} \{|\omega(z)| e^{py} + |\overline{\omega}(z)| e^{-py}\} \quad (p = \tau - \sigma),$$

причем знак равенства может достигаться только на вещественной оси, если $f(z)$ не совпадает с функцией $\Omega(z; \tau, \lambda)$ при каком-нибудь значении параметра λ.

Доказательство. Пусть $Iz_0 \neq 0$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$ и

$$|f(z_0)| \geqslant \frac{1}{2} \{|\omega(z_0)| e^{py_0} + |\overline{\omega}(z_0)| e^{-py_0}\}.$$

Следовательно, при любом вещественном λ

$$|f(z_0)| \geqslant |\Omega(z_0; \tau, \lambda)|.$$

Примем для определенности, что $y_0 > 0$. В таком случае

$$\Omega(z_0; \tau, \lambda) = \frac{1}{2} \{Re^{-i\theta + i\psi} + re^{i\theta + i\psi}\},$$

где $R > r \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что при изменении λ от 0 до 2π аргумент величины $\Omega(z_0; \tau, \lambda)$ претерпевает изменение, численно равное 2π. Значит существует такое λ_0, что

$$\arg \Omega(z_0; \tau, \lambda_0) = \arg f(z_0).$$

Возьмем теперь такое ϑ $(0 < \vartheta \leqslant 1)$, чтобы

$$|\vartheta f(z_0)| = |\Omega(z_0; \tau, \lambda_0)|.$$

В таком случае для функции $f_1(z) = \vartheta f(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, разность

$$\Omega(z; \tau, \lambda_0) - f_1(z)$$

имеет невещественный нуль z_0, что возможно лишь при $\vartheta = 1$ и

$$f(z) \equiv \Omega(z; \tau, \lambda_0).$$

4. С помощью теоремы 1 и известного приема С. Н. Бернштейна легко доказать некоторые неравенства, которые в несколько менее общей форме были установлены С. Н. Бернштейном, а затем многократно обобщались и передоказывались другими авторами.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\omega(z) \in E_\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$, *а* $f(z)$—*вещественная целая функция экспоненциального типа с показателем* $\leqslant \tau$, *где* $\tau \geqslant \sigma$, *удовлетворяющая неравенству*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

В таком случае

$$|f'(x)| \leqslant |\{\omega(x) e^{-i(\tau-\sigma)x}\}'| \quad (-\infty < x < \infty) \tag{12}$$

и

$$\left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}\right| \leqslant \Phi'(x)\sqrt{1-\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}^2} \quad (-\infty < x < \infty), \tag{13}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\arg\left\{\frac{\bar{\omega}(x)}{\omega(x)} e^{2i(\tau-\sigma)x}\right\}.$$

При этом знак равенства как в соотношении (12), *так и в соотношении* (13), *хотя бы в одной точке возможен только тогда, когда при некотором* λ

$$f(z) \equiv \Omega(z; \tau, \lambda).$$

Доказательство. Возьмем произвольную вещественную точку x_0 и, полагая

$$\omega(x) e^{-ipx} = \theta(x) \quad (p = \tau - \sigma),$$

рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} A\theta(x_0) + B\bar{\theta}(x_0) &= 2f(x_0), \\ A\theta'(x_0) + B\bar{\theta}'(x_0) &= 2f'(x_0), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

определитель которой

$$\begin{vmatrix} \theta(x_0) & \bar{\theta}(x_0) \\ \theta'(x_0) & \bar{\theta}'(x_0) \end{vmatrix} = 2i\Phi'(x_0)|\omega(x_0)|^2$$

не равен нулю.

Следовательно, система (14) разрешима и легко видеть, что $B = \bar{A}$, так что можно положить

$$A = Le^{i\lambda}, \quad B = Le^{-i\lambda} \quad (L > 0).$$

Поэтому равенства (14) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= L\Omega(x_0; \tau, \lambda), \\ f'(x_0) &= L\Omega_x(x_0; \tau, \lambda). \end{aligned}\right\} \tag{14 bis}$$

Допустим, что $L \geqslant 1$. Тогда функция

$$f_1(z) = \frac{1}{L} f(z)$$

удовлетворяет неравенству

$$|f_1(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

а вместе с тем разность

$$\Omega(z; \tau, \lambda) - f_1(z)$$

имеет в силу (14 bis) двойной нуль x_0. Это абсурдно, если $L > 1$ и возможно лишь при

$$f(z) \equiv \Omega(z; \tau, \lambda), \tag{15}$$

если $L = 1$.

Таким образом, мы доказали, что $L \leqslant 1$ и что знак равенства имеет место лишь в случае (15). Тем самым доказано утверждение теоремы, относящееся к неравенству (12).

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно проверить, что функция

$$y = y(x) = \frac{\Omega(x; \tau, \lambda)}{|\omega(x)|}$$

удовлетворяет уравнению

$$y'^2 + \{\Phi'(x)\}^2 y^2 = \{\Phi'(x)\}^2. \tag{16}$$

Действительно, в силу (14 bis) мы получим тогда, что

$$\frac{1}{L^2}\left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}\right|^2_{x=x_0} + \frac{1}{L^2}\{\Phi'(x_0)\}^2\left\{\frac{f(x_0)}{|\omega(x_0)|}\right\}^2 = \{\Phi'(x_0)\}^2,$$

а отсюда и вытекает (13), так как $L \leqslant 1$.

Уравнение же (16) следует из того, что

$$y = \frac{1}{2}\left(U + \frac{1}{U}\right),$$

где

$$U = \sqrt{\frac{\omega(x)}{\bar{\omega}(x)}}\, e^{ipx - i\lambda},$$

и значит

$$y' = \frac{1}{2}\left(U - \frac{1}{U}\right)\frac{U'}{U} = \frac{1}{2}\left(U - \frac{1}{U}\right) i\Phi'.$$

Замечание. Неравенство (12) справедливо и тогда, когда предположение о вещественности функции $f(z)$ отброшено. Что же касается неравенства (13), то в общем случае его надлежит заменить на

$$\left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}\right| \leqslant \Phi'(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Следствие. *Если $\omega_0(z)$ есть функция нулевого рода, все нули которой лежат в области $Iz < 0$, а $f(z)$—целая функция экспоненциального типа с показателем τ, удовлетворяющая неравенству*

$$|f(x)| \leqslant |\omega_0(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

то при любом натуральном k

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant |\{\omega_0(x)\, e^{-i\tau x}\}^{(k)}| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Эта теорема принадлежит С. Н. Бернштейну [см. ([2]), стр. 199].

5. Важнейшим частным случаем теоремы 2 является тот, когда $\omega(z)$ есть константа. В этом случае целая функция $f(z)$ (экспоненциального типа с показателем $\leqslant \tau$) ограничена на вещественной оси. Класс этих функций мы обозначим через B_τ.

Если $f(z) \in B_\tau$ $(\tau \geqslant 0)$, то, в силу теоремы 2,

$$|f'(x)| \leqslant \tau M \quad (-\infty < x < \infty;\ M = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|). \tag{17}$$

Важным орудием при исследовании свойств класса B_τ является преобразование Фурье. В применении к некоторым подклассам класса B_τ преобразование Фурье, особенно после работ Винера ([8]), применялось неоднократно. Сравнительно недавно многие относящиеся сюда вопросы рассмотрел М. Г. Крейн ([9]).

Мы займемся теперь применением преобразования Фурье для обобщения неравенства (17).

Обозначим через W^2 совокупность всех измеримых функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, для которых

$$\frac{f(x)}{1+|x|} \in L^2(-\infty, \infty).$$

Пусть $f(x) \in W^2$ и пусть константы A, α таковы, что

$$\frac{f(x)-A}{x-\alpha} \in L^2(-\infty, \infty)$$

(при невещественном α это условие выполняется для любой константы A).

Обозначим через $\varphi(x)$ преобразование Фурье-Планшереля функции

$$\frac{f(x)-A}{x-\alpha},$$

так что

$$f(x) = A + (x-\alpha) \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b e^{itx}\varphi(t)\,dt,$$

и назовем определенную с точностью до произвольной аддитивной константы B функцию

$$\tilde{f}(x) = B + (x-\alpha) \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b e^{itx}\varphi(t)\, i \operatorname{sign} t\, dt$$

функцией, сопряженной с $f(x)$. Это определение имеет смысл, так как построенная функция $\tilde{f}(x)$ не меняется при переходе от пары A, α к другой допустимой паре A', α'.

Заметим далее, что $\tilde{f}(x) \in W^2$, а также что из $g(x) = \tilde{f}(x)$ следует равенство $f(x) = -\tilde{g}(x)$.

Введенное нами понятие о сопряженной функции является обобщением соответствующего понятия из теории рядов и интегралов Фурье, так как

1) если $f(x)$—периодическая функция из $L^2(0, 2\pi)$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{b_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx);$$

2) если $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ и

$$f(x) = \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \int_0^T \{A(u) \cos ux + B(u) \sin ux\}\, du,$$

то

$$\tilde{f}(x) = B_0 + \underset{T\to\infty}{\text{l. i. m.}} \int_0^T \{B(u) \cos ux - A(u) \sin ux\}\, du.$$

Допустим теперь, что $f(z) \in B_\tau$. В таком случае $f(x) \in W^2$, а в качестве пары A, α мы можем принять $f(0)$, 0. Так как

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

есть целая функция экспоненциального типа с показателем $\leqslant \tau$, принадлежащая $L^2(-\infty, \infty)$, то по известной теореме Палей-Винера ([8])

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} \varphi(t)\, dt,$$

где $\varphi(t) \in L^2$. Следовательно,

$$f(x) = f(0) + x \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} \varphi(t)\, dt,$$

функция $\tilde{f}(x)$ существует и равна

$$\tilde{f}(x) = B + x \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} \varphi(t)\, i \operatorname{sign} t\, dt.$$

Представляя обе эти функции в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{i} \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{itx}\, dt,$$

$$\tilde{f}(x) = B + \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial i} \{\operatorname{sign} t \cdot e^{jtx}\}\, dt,$$

получаем

$$f'(x)=\int\limits_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\{te^{itx}\}\,dt,$$

$$\tilde{f}'(x)=\int\limits_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\{i\,|t|\,e^{itx}\}\,dt,$$

откуда при любом вещественном α

$$\sin\alpha\,f'(x)+\cos\alpha\,\tilde{f}'(x)=\int\limits_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\{e^{itx}\,[t\sin\alpha+i\,|t|\cos\alpha]\}\,dt$$

Возьмем непрерывную функцию с периодом 2τ

$$U(t)=\frac{1}{i}\,e^{\frac{i\alpha t}{\tau}}\,(t\sin\alpha+i\,|t|\cos\alpha)$$

и разложим в ряд Фурье:

$$U(t)=\tau\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,\frac{2\sin^2\frac{\alpha-k\pi}{2}}{(\alpha-k\pi)^2}\,e^{\frac{ik\pi t}{\tau}}$$

В силу этого разложения

$$\sin\alpha\,f'(x)+\cos\alpha\,\tilde{f}'(x)=$$

$$=\tau\int\limits_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)\,i\,\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,\frac{2\sin^2\frac{\alpha-k\pi}{2}}{(\alpha-k\pi)}\,e^{it\left(x+\frac{k\pi-\alpha}{\tau}\right)}\right\}dt=$$

$$=\tau\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{2\sin^2\frac{\alpha-k\pi}{2}}{(\alpha-k\pi)^2}\left\{f\left(x+\frac{k\pi-\alpha}{\tau}\right)-f(0)\right\}.$$

Легко проверить, что коэффициент при $f(0)$ равен нулю.

Таким образом, мы получили следующую «интерполяционную» формулу:

$$\sin\alpha\,f'(x)+\cos\alpha\,\tilde{f}'(x)=\tau\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{2\sin^2\frac{\alpha-k\pi}{2}}{(\alpha-k\pi)^2}\,f\left(x+\frac{k\pi-\alpha}{\tau}\right).\qquad(18)$$

Аналогично выводится хорошо известная (см., например, ([6]), т. 1, стр. 143) формула*:

$$\sin\alpha\,f'(x)-\tau\cos\alpha\,f(x)=\tau\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{\sin^2\alpha}{(\alpha-k\pi)^2}\,f\left(x+\frac{k\pi-\alpha}{\tau}\right).\qquad(19)$$

* Общий метод построения всех подобных формул в связи с так называемой теорией множителей разработал М. Г. Крейн ([9]).

Из формул (18), (19) вытекает, что

$$|\sin\alpha f'(x)+\cos\alpha \tilde{f}'(x)|\leqslant \tau M \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin^2\frac{\alpha-k\pi}{2}}{(\alpha-k\pi)^2}=M\tau, \qquad (20)$$

$$|\sin\alpha f'(x)-\tau\cos\alpha f(x)|\leqslant \tau M \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\alpha}{(\alpha-k\pi)^2}=M\tau, \qquad (21)$$

где

$$M=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|.$$

Чтобы имел место знак равенства в формуле (20) или (21) хотя бы в одной точке x_0, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$f\left(x_0+\frac{k\pi-\alpha}{\tau}\right)=(-1)^{k-1}e^{i\delta}M \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

где δ — вещественная константа.

При выполнении этого условия для любых z, β, удовлетворяющих соотношению

$$z-\frac{\beta}{\tau}=x_0-\frac{\alpha}{\tau},$$

будет иметь место равенство

$$\sin\beta f'(z)-\tau\cos\beta f(z)=e^{i\delta}M\tau,$$

т. е. $f(z)$ должна быть интегралом уравнения

$$\sin(\tau z+\lambda)f'(z)-\tau\cos(\tau z+\lambda)f(z)=e^{i\delta}M\tau,$$

где λ — вещественная константа.

Отсюда

$$f(z)=-Me^{i\delta}\cos(\tau z+\lambda)+C\sin(\tau z+\lambda),$$

где C — произвольная постоянная, которая подчинена единственному ограничению, состоящему в том, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|=M.$$

В силу этого ограничения

$$f(z)=Ae^{i\tau z}+Be^{-i\tau z},$$

где $|A|+|B|=M$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если $f(z)\in B_\tau$, то при любом вещественном α и любом вещественном x*

$$|\sin\alpha f'(x)+\cos\alpha\tilde{f}'(x)|\leqslant\tau\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|,$$

$$|\sin\alpha f'(x)-\tau\cos\alpha f(x)|\leqslant\tau\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|,$$

причем знак равенства хотя бы в одной точке возможен только при

$$f(z)\equiv Ae^{i\tau z}+Be^{-i\tau z}.$$

Харьковский математический институт

Поступило 23.IV.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bernstein S., Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926.

[2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение, Москва, 1937.

[3] Duffin and Schaeffer, Some properties of functions of expon. type, Bull. Amer. Math. Soc., 1938.

[4] Boas R., Some theorems on Fourier transforms and conjugate trigonometric integrals, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 40, 1936.

[5] Крейн М. Г., Об одном специальном классе целых и мероморфных функций, Сборник: Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938.

[6] Полиа-Сеге, Задачи и теоремы из анализа, Москва, 1937.

[7] Vivanti-Gutzmer, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Leipzig, 1906.

[8] Paley-Wiener, Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.

[9] Крейн М. Г., О представлении функций интегралами Фурье-Стилтьеса, Уч. зап. Куйбыш. пед. инст., 1943.

N. AKHIEZER. ON SOME PROPERTIES OF INTEGRAL TRANSCENDENT FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE

SUMMARY

1. Denote by $E_\sigma\,(\sigma \geqslant 0)$ the totality of all integral functions $\omega(z)$ of exponential type with the exponent σ * which satisfy the following conditions:

1) $\omega(z) = s(z) + it(z)$, where the real functions $s(z)$ and $t(z)$ have no common zeros,

2) for $Iz \geqslant 0$

$$\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| \geqslant 1,$$

and, consequently, for $Iz \leqslant 0$

$$\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| \leqslant 1,$$

where $\overline{\omega}(z) = s(z) - it(z)$.

3) for every $\varepsilon > 0$ there exists a constant $m = m(\varepsilon)$, such that

$$\frac{1}{|\omega(iy)|} \leqslant me^{-(\sigma-\varepsilon)y} \qquad (y \geqslant 0),$$

$$\frac{1}{|\overline{\omega}(iy)|} \leqslant me^{(\sigma-\varepsilon)y} \qquad (y \leqslant 0).$$

LEMMA. *Let $f(z)$ be an integral function of exponential type with the exponent $\leqslant \tau$. If*

---

* this means that $\overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}} \dfrac{\ln|\omega(z)|}{|z|} = \sigma.$

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

where $\omega(z) \in E_\sigma$ *and* $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$, *then for* $Iz \geqslant 0$

$$|f(z)| \leqslant |\omega(z)\, e^{-i(\tau-\sigma)z}|,$$

and for $Iz \leqslant 0$

$$|f(z)| \leqslant |\overline{\omega}(z)\, e^{i(\tau-\sigma)z}|.$$

Having a function $\omega(z) \in E_\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$ and real numbers $\tau \geqslant \sigma$, λ consider the function

$$\Omega(z;\ \tau,\ \lambda) = \frac{1}{2}\{\omega(z)\, e^{-i(\tau-\sigma)z+i\lambda} + \overline{\omega}(z)\, e^{i(\tau-\sigma)z-i\lambda}\}.$$

THEOREM 1. *If* $\omega(z) \in E_\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$ *and* $f(z)$ *is a real integral function of exponential type with the exponent* $\leqslant \tau$ *satisfying the inequality*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

then the difference

$$\Omega(z;\ \tau,\ \lambda) - f(z)$$

either is zero identically or has only real zeros that are all simple except, possibly, those ones at which

$$f(x) = \pm\, \omega(x).$$

This theorem is a generalization of a simpler theorem due to Duffin and Schaeffer ([3]).

By theorem 1 and a well known method of S. Bernstein (see, for instance, ([2])) one can prove some inequalities which have been established by S. Bernstein in a somewhat less general form.

THEOREM 2. (Generalization of S. Bernstein's inequality). *Let* $\omega(z) \in E_\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$ *and let* $f(z)$ *be a real integral function of exponential type with the exponent* $\leqslant \tau$, *where* $\tau \geqslant \sigma$, *which satisfies the inequality*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Then

$$|f'(x)| \leqslant |\{\omega(x)\, e^{-i(\tau-\sigma)x}\}'| \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1}$$

and

$$\left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}\right| \leqslant \Phi'(x)\sqrt{1-\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}^2} \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

where

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\arg\left\{\frac{\overline{\omega}(x)}{\omega(x)}\, e^{2i(\tau-\sigma)x}\right\}.$$

The sign $=$ *both in* (1) *and* (2) *at least at one point is possible only in case*

$$f(z) \equiv \Omega(z;\ \tau,\ \lambda)$$

for a certain λ.

R e m a r k. The inequality (1) is valid for non-real $f(z)$ as well. As to the inequality (2), in the general case it may be replaced by

$$\left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{|\omega(x)|}\right\}\right| \leqslant \Phi'(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

2. In the case where $\omega(z)$ is constant and, consequently, we deal with integral functions $f(z)$ of exponential type with an exponent $\leqslant \tau$ that are bounded on the real axis (the set of such functions will be denoted by B_τ) Theorem 2 implies S. Bernstein's inequality in its initial form

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f'(x)| \leqslant \tau \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|.$$

This inequality can be easily obtained from the «interpolation» formula

$$\sin \alpha f'(x) - \tau \cos \alpha f(x) = \tau \sin^2 \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(\alpha - k\pi)^2} f\left(x + \frac{k\pi - \alpha}{\tau}\right),$$

where α is any real number.

There exist other formulae of such kind that imply some other inequality.

A general method of constructing such formulae is due to M. Krein ([6]).

In the present paper the following formula is obtained

$$\sin \alpha f'(x) + \cos \alpha \tilde{f}'(x) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha - k\pi}{2}}{(\alpha - k\pi)^2} f\left(x + \frac{k\pi - \alpha}{\tau}\right); \qquad (3)$$

here $\tilde{f}(x)$ is the function conjugate to $f(x)$ (thereby $f(x) \in B_\sigma$). The conjugate function is defined as follows: suppose $g(x)$ is measurable and

$$\frac{g(x)}{1+|x|} \in L^2(-\infty, \infty);$$

let A, a be such constants that

$$\frac{g(x) - A}{x - a} \in L^2(-\infty, \infty);$$

then

$$\tilde{g}(x) = B + \frac{x-a}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b e^{itx} i \operatorname{sign} t \cdot \varphi(t)\, dt,$$

where

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b e^{-itx} \frac{g(x) - A}{x - a}\, dx$$

and B is an arbitrary constant.

This definition has sense, since $\tilde{g}(x)$ rests invariant under replacing A, a by another admissible pair A', a'.

From (3) follows

THEOREM 3. *If* $f(z) \in B_\tau$, *then for any real* α

$$|\sin \alpha f'(x) + \cos \alpha \tilde{f}'(x)| \leqslant \tau \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|,$$

where the sign $=$ *at least at one point is possible only if*

$$f(z) \equiv Ae^{i\tau z} + Be^{-i\tau z}.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 429—460 Série mathématique

И. И. ИБРАГИМОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ОСОБУЮ ТОЧКУ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе находится асимптотическое значение наилучшего приближения функции вида $(a-x)^s\,[\ln(a-x)]^m$ $(a \geqslant 1)$ на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n при различных предположениях относительно природы положительных чисел s и m.

Исследуется наилучшее приближение функции $|x|^s\,[\ln|x|]^m$, имеющей особую точку при $x=0$ в предположении, что $s>0$ — любое число, а $m>0$ — любое целое число.

Наконец, рассматриваются наилучшие приближения нечетных функций вида $x\,|x|^s$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочлена степени n.

С. Н. Бернштейн*(1) указал метод нахождения асимптотического значения наилучшего приближения посредством многочлена степени n функции $f(x)=(a-x)^s$ на отрезке $(-1, +1)$, где $a>1$. Им же рассмотрен (2) случай, когда $a=1$.

De la Vallée Poussin (3), несколько изменив метод С. Н. Бернштейна, применил его к вычислению асимптотического значения наилучшего приближения функции

$$f(\cos\theta)=(\operatorname{ch} a-\cos\theta)^s\,[\ln(\operatorname{ch} a-\cos\theta)]^m$$

при помощи тригонометрического многочлена, где s — любое вещественное положительное число, m — любое целое положительное число.

Метод С. Н. Бернштейна применяется мною к нахождению асимптотического значения наилучшего приближения функции вида

$$f(x)=(a-x)^s\,[\ln(a-x)]^m \quad (a>1) \tag{1}$$

на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n, где s и m — любые положительные числа.

---

* Выражаю глубокую благодарность С. Н. Бернштейну за то, что он привлек меня к тематике теории наилучшего приближения функций и оказывал большое внимание моей работе, способствуя ее успеху своими ценными указаниями.

Выражаю также искреннюю благодарность С. М. Никольскому, ценными замечаниями которого я пользовался при окончательном оформлении настоящей работы.

Случаи целого и нецелого m существенно различны, так как при целом m ближайшей от отрезка $(-1, +1)$ особой точкой функции $f(x)$ является точка $x=a$, в то время как ближайшей особой точкой этой функции в случае нецелого m является $x=a-1$. При этом особенность в точке $x=a-1$ (при нецелом m) носит характер чисто алгебраический.

Вследствие этого обстоятельства исследования в этих двух случаях, которым посвящен § 1, носят существенно различный характер.

В § 2 рассматривается случай $a=1$, т. е. когда функция $f(x)$ имеет вещественную особенность на правом конце отрезка $(-1, +1)$ при целом m.

Рассмотрение наилучшего приближения функции $(1-x)^s$, где s — любое данное нецелое положительное число, привело С. Н. Бернштейна ([4]) к исследованию наилучшего приближения четной функции $|x|^p$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочлена степени n.

Аналогично рассмотрение наилучшего приближения функции вида $(1-x)^s [\ln(1-x)]^m$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочлена степени n привело нас к исследованию наилучшего приближения функции

$$\varphi(x) = |x|^s [\ln|x|]^m,$$

имеющей особую точку при $x=0$, в предположении, что s есть любое положительное число, а m — любое целое число. Этому посвящен § 3.

В § 4 рассматриваются наилучшие приближения нечетных функций вида

$$\psi(x) = x|x|^s. \tag{3}$$

При этом исследуются отдельно случаи целого (нечетного) и нецелого $s>0$.

В ряде наших исследований мы пользуемся следующим обстоятельством. Если многочлен $P_n(x)$ степени n и заданная регулярная функция $F(x)$ совпадают в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ отрезка $(-1, +1)$, где многочлен $R(x)$ степени $n+1$ обращается в нуль, то имеет место формула

$$F(x) - P_n(x) = \frac{R(x)}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)\,dz}{(z-x)\,R(z)}, \tag{4}$$

где C — любой контур, окружающий эти точки, внутри которого функция $F(z)$ регулярна.

В некоторых случаях (см. § 4) многочлен $R(x)$ обращается в нуль только в n различных точках, и многочлен $P_n(x)$, приближающий $f(x)$, уже не является интерполяционным многочленом в обычном смысле этого слова.

Для функции $f(x)$, определяемой формулой (1), многочлен $R(x)$ берется в следующем виде:

$$R(x) = (x-a)\cos(n\theta+\delta) =$$
$$= \frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1+\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]+$$
$$+(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1-\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]\}, \qquad (5)$$

контур интегрирования C деформируется в окружность бесконечно большого радиуса с бесконечно малым отверстием на положительной оси, из концов которого вдоль вещественной оси идут к точке a две бесконечно близкие прямые CD и C_1D_1, замыкаемые окружностью γ, бесконечно малого радиуса с центром в точке a, т. е.

$$C = \Gamma_1 + \gamma_1 + CD + C_1D_1.$$

Наконец, для всех функций, определяемых равенствами (2) и (3), многочлен $R(x)$ берется в виде

$$R(x) = xT_n(x) = x\cos n \arccos x, \qquad (6)$$

а за контур интегрирования C принимается окружность Γ бесконечно большого радиуса с бесконечно малым отверстием на мнимой оси, из концов которого вдоль мнимой оси идут две бесконечно близкие прямые AB и A_1B_1 к точке O, замыкаемые окружностью γ бесконечно малого радиуса с центром в начале координат, т. е.

$$C = \Gamma + \gamma + AB + A_1B_1.$$

§ 1. О наилучшем приближении функции $(a-x)^s[\ln(a-x)]^m$

Рассмотрим наилучшее приближение функции

$$f(x) = (a-x)^s[\ln(a-x)]^m. \qquad (1)$$

Заметим, что точка $x=a$ является единственной особой точкой этой функции, если $m>0$ есть любое целое число. Но функция $f(x)$, кроме $x=a$, имеет еще одну особую точку $x=a-1$ в случае, когда $m>0$ — не целое положительное число.

Прежде всего, полагая m целым числом, мы будем различать два случая: когда s — любое нецелое положительное число и когда s — любое целое положительное число; затем мы будем рассматривать случай, когда $m>0$ — любое нецелое число.

I. Допустим, что s есть любое данное нецелое положительное число и $m>0$ — любое целое число.

В таком случае, применяя формулу (4) к функции $(a-x)^s[\ln(a-x)]^m$ и замечая, что интегралы по обеим окружностям Γ_1 и γ_1 равны нулю, получаем

$$\Phi(x) = (a-x)^s[\ln(a-x)]^m - P_n(x) =$$
$$= -\frac{R(x)}{2\pi i}\int_a^\infty \frac{(z-a)^s\{e^{\pi si}[\ln(z-a)+\pi i]^m - e^{-i\pi s}[\ln(z-a)-i\pi]^m\}\,dz}{(z-x)R(z)}, \qquad (7)$$

причем многочлен $R(x)$ определяется равенством (5). Очевидно, тогда

$$\Phi(x)=\frac{\sin \pi s}{\pi} R(x)\cdot I_{m,s}+\sum_{k=1}^{m} B_k R(x) I_{m-k,s}, \tag{8}$$

где B_k — некоторые постоянные коэффициенты и

$$I_{m,s}=\int_a^\infty \frac{(z-a)^s[\ln(z-a)]^m dz}{(z-x)R(z)}.$$

Займемся теперь вычислением асимптотического значения интеграла $I_{m,s}$. Из равенства (5) видно, что при $|z|\geqslant a$ имеет место асимптотическое равенство

$$R(z)\sim\frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1})^n[az-1+\sqrt{(a^2-1)(z^2-1)}],$$

поэтому интеграл $I_{m,s}$ представляется в следующей форме:

$$I_{m,s}\sim 2\int_a^\infty \frac{(z-a)^s[\ln(z-a)]^m dz}{(z-x)[az-1+\sqrt{(a^2-1)(z^2-1)}](z+\sqrt{z^2-1})^n}$$

равномерно относительно x.

Для вычисления асимптотического значения этого интеграла мы воспользуемся следующей леммой С. Н. Бернштейна [(2), стр. 92]:

Пусть $F(u)$ и $\varphi(u)$ — функции, определенные для $a\leqslant u\leqslant\infty$, причем функция $F(u)=F_n(u,x)$, вообще говоря, зависит от n и x $(-1\leqslant x\leqslant 1)$. Имеет место асимптотическое равенство

$$\int_a^\infty F(z)\varphi^n(z)\,dz\sim\frac{\varphi^n(a)}{n}\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F\left(a+\frac{u}{n}\right)du \tag{9}$$

равномерно относительно x, если выполняются следующие условия:

1) существует значение h и положительная константа C такие, что

$$\int_0^\infty |F_n(z,x)\varphi^h(z)|\,dz\leqslant C$$

равномерно относительно x и n.

2) Существует некоторый определенный, произвольно малый интервал $(a,a+\alpha)$, где $\varphi(z)$ и ее производные первых двух порядков ограничены и, кроме того, $\varphi(z)>0$, $\varphi'(z)<0$.

3) Вне промежутка $(a,a+\alpha)$ $|\varphi(z)|<\varphi(a+\alpha)$.

4) Существует значение $\rho<\frac{1}{2}$ такое, что

$$\left|\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F_n\left(a+\frac{u}{n}\right)du\right|>e^{-n^\rho}$$

при $n>N$, где N достаточно велико.

Применим теперь формулу (9) к вычислению интеграла $I_{m,s}$.

Полагая

$$\varphi(z)=\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}},$$

$$F(z)=\frac{(z-a)^s\,[\ln(z-a)]^m}{(z-x)\,[az-1+\sqrt{(a^2-1)(z^2-1)}]},$$

легко видеть, что первые три условия леммы, при $a>1$ осуществлены; покажем, что выполняется также четвертое условие леммы.

Для этой цели заметим, что имеет место асимптотическое равенство

$$I=\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F\left(a+\frac{u}{n}\right)du\sim$$

$$\sim\frac{1}{2n^s(a-x)(a^2-1)}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}}u^s(\ln u-\ln n)^m\,du$$

равномерно относительно x.

Полагая

$$I_1=\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}}u^s(\ln u-\ln n)^m\,du=$$

$$=\sum_{k=0}^m b_k(-1)^m(\ln n)^{m-k}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}}u^s(\ln u)^k\,du,$$

где $b_0=1,\ b_1,\ b_2,\dots,b_m$ — некоторые постоянные коэффициенты, замечаем, что все слагаемые, стоящие под знаком сумм в правой части этого равенства, по сравнению с первым слагаемым ($k=0$) являются бесконечно малыми, по крайней мере порядка $\frac{1}{\ln n}$. Поэтому имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$I_1\sim(-1)^m(\ln n)^m\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}}u^s\,du=$$

$$=(-1)^m(\ln n)^m\,\Gamma(s+1)(a^2-1)^{\frac{s+1}{2}}. \qquad (10)$$

Таким образом, вследствие (10) имеет место асимптотическое равенство

$$I\sim\frac{(-1)^m(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}\,\Gamma(s+1)(\ln n)^m}{2(a-x)n^s}$$

равномерно относительно x, из которого, в частности, следует, что условие 4) леммы С. Н. Бернштейна для интеграла $I_{m,s}$ выполняется

Следовательно, к интегралу $I_{m,s}$ эта лемма применима и

$$I_{m,s}=\frac{(-1)^m(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}\,\Gamma(s+1)(\ln n)^m}{(a-x)\,n^{s+1}(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \qquad (11)$$

Нетрудно заметить, что все интегралы $I_{m-k,s}$ $(k=1, 2, 3, \ldots, m)$, входящие в сумму правой части равенства (8), по сравнению с $I_{m,s}$ являются бесконечно малыми, по крайней мере порядка $\frac{1}{\ln n}$. Поэтому равенство (8) принимает следующий вид:

$$\Phi(x) \sim \frac{(-1)^m \sin \pi s\, (a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}\, \Gamma(s+1)\, (\ln n)^m}{\pi n^{s+1} (a+\sqrt{a^2-1})^n} \cos(n\theta+\delta)$$

равномерно относительно x. Отсюда, приняв во внимание, что функция $\cos(n\theta+\delta)$ достигает своего модуль-максимума с переменным знаком в $n+2$ точках, приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА I. *Если s — любое нецелое положительное число и $m>0$ — любое целое число, то наилучшее приближение функции*

$$f(x) = (a-x)^s [\ln(a-x)]^m \quad (a>1)$$

на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n выражается асимптотическим равенством

$$E_n[(a-x)^s \ln^m (a-x)] \sim \frac{\sin \pi s\, (a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}\, (\ln n)^m\, \Gamma(s+1)}{\pi n^{s+1} (a+\sqrt{a^2-1})^n}. \tag{12}$$

Примечание. Полагая в (12) чисто формально $m=0$, получим известную формулу С. Н. Бернштейна [(2), стр. 95]:

$$E_n[(a-x)^s] \sim \frac{\sin \pi s \cdot (a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}\, \Gamma(s+1)}{\pi n^{s+1} (a+\sqrt{a^2-1})^n} \quad (a>1) \tag{12'}$$

и, таким образом,

$$E_n[(a-x)^s \ln^m (a-x)] \sim (\ln n)^m E_n[(a-x)^s] \quad (a>1).$$

Следовательно, при целом положительном m появление множителя $\ln^m(a-x)$ при функции $(a-x)^s$ влечет за собой увеличение (асимптотически) наилучшего приближения этой функции в $(\ln n)^m$ раз.

II. Пусть $s=p$ и m — любые целые положительные числа. В этом случае функция $(a-x)^p$ регулярна во всей плоскости и из формулы (4) получим

$$F(x) = (a-x)^p [\ln(a-x)]^m - P_n(x) =$$

$$= \frac{R(x)}{2\pi i} \int_a^\infty \frac{(z-a)^p \left\{ [\ln(z-a)+i\pi]^m - [\ln(z-a)-i\pi]^m \right\} dz}{(z-x) R(z)}, \tag{13}$$

где многочлен $R(x)$ определяется равенством (5).

Равенство (13) приводится к виду

$$F(x) = mR(x) I_{m-1,p} + \sum_{k=2}^{\infty} A_k R(x) I_{m-k,p}, \tag{14}$$

где A_k $(k=2, 3, \ldots, m)$—некоторые постоянные коэффициенты и

$$I_{m-k,p}=\int_a^\infty \frac{(z-a)^p\,[\ln(z-a)]^{m-k}\,dz}{(z-x)\,R(z)} \quad (k=1, 2, 3, \ldots, m).$$

В силу (11) нетрудно заметить, что все интегралы $I_{m-l,p}$ $(k=2, 3, \ldots, m)$, входящие в сумму правой части (14), по сравнению с $I_{m-1,p}$ являются бесконечно малыми, по крайней мере порядка $\frac{1}{\ln n}$. Поэтому равенство (14) принимает следующий вид:

$$F(x)\sim\frac{(-1)^p\,(a^2-1)^{\frac{p-1}{2}}\,\Gamma(p+1)\,m\,(\ln n)^{m-1}}{n^{p+1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}\cos(n\theta+\delta)$$

равномерно относительно x. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА II. *Если p и m—целые положительные числа и $a>1$, то наилучшее приближение функции $(a-x)^p\ln^m(a-x)$ на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n выражается асимптотическим равенством*

$$E_n\,[(a-x)^p\ln^m(a-x)]\sim\frac{(a^2-1)^{\frac{p-1}{2}}\,\Gamma(p+1)\,m\,(\ln n)^{m-1}}{n^{p+1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n} \tag{15}$$

Примечание. В частности, полагая в (15) чисто формально $p=m=1$, получаем следующую формулу С. Н. Бернштейна [(2), стр. 91]:

$$E_n\,[(a-x)\ln(a-x)]\sim\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n \quad (a>1).$$

III. Если m—любое нецелое положительное число, то функция $(a-x)^s\,[\ln(a-x)]^m$ имеет две особые точки: a и $a-1$. Для того чтобы точка $a-1$ находилась вне отрезка $(-1, +1)$, положим, что $a>2$. В этом случае, чтобы применить формулы (4), нужно положить, что контур интегрирования

$$C=\Gamma_1 ABED+\gamma_1+D_1E_1B_1A_1$$

берется в виде окружности Γ_1 бесконечно большого радиуса ρ с бесконечно малым отверстием на положительной оси, из концов которого вдоль вещественной оси идут к точке $a-1$ две бесконечно близкие прямые $ABED$ и $A_1B_1E_1D_1$, замыкаемые окружностью γ_1 бесконечно малого радиуса δ с центром в точке $a-1$; при этом точки D и D_1, E и E_1, B и B_1, A и A_1 имеют попарно равные абсциссы—соответственно $a-1$, a, $a+1$, ρ.

Заменим в выражении $R(x)$ a на $a-1$ и учтем, что в формуле (4) интегралы по обеим окружностям Γ_1 и γ_1 стремятся к нулю при $\rho\to\infty$ и $\delta\to 0$; тогда формула (4) принимает следующий вид:

$$\Phi(x) = (a-x)^s [\ln(a-x)]^m - P_n(x) =$$

$$= \frac{R(x)}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{(ED,\, D_1E_1)} \frac{(a-z)^s \ln^m (a-z)}{(z-x)\, R(z)}\, dz + \int\limits_{(BE,\, E_1B_1)} + \int\limits_{(AB,\, B_1A_1)} \right\}. \quad (16)$$

Заметим, прежде всего, что внутри области G, ограниченной контуром C, имеет место неравенство

$$-\pi < \arg(z-a) < \pi.$$

Кроме того, полагая $w = \ln(a-z)$, найдем

$$w = \ln|a-z| + i \arg(a-z).$$

Рассмотрим отдельно случаи:

a) Пусть z' — произвольная точка отрезка D_1E_1 и z'' — произвольная точка отрезка DE. В таком случае нетрудно заметить, что при $\delta \to 0$ и $\rho \to \infty$ $\arg(a-z') \to 0$, оставаясь отрицательным, и $\arg(a-z'') \to 0$, оставаясь положительным. Очевидно, если z изменяется на отрезке $(a-1, a)$, то $w = \ln(a-z)$ изменяется на всей отрицательной вещественной оси. Следовательно,

$$\arg w' = \arg \ln(a-z') \to -\pi \quad \text{и} \quad \arg w'' = \arg \ln(a-z'') \to \pi$$

при $\delta \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{(ED,\, D_1E_1)} = \lim_{\delta \to 0} \left[\int\limits_{ED} + \int\limits_{D_1E_1} \right] =$$

$$= \int\limits_{a-1}^{a} \frac{(a-z)^s\, |\ln(a-z)|^m \{e^{-i\pi m} - e^{i\pi m}\}}{(z-x)\, R(z)}\, dz =$$

$$= -2i \sin \pi m \int\limits_{a-1}^{a} \frac{(a-z)^s\, |\ln(a-z)|^m\, dz}{(z-x)\, R(z)}. \quad (17)$$

b) Пусть z' и z'' — соответственно произвольные точки E_1B_1 и BE. Тогда, очевидно, $\arg(a-z') \to -\pi$ и $\arg(a-z'') \to \pi$ при $\delta \to 0$.

Заметим, что если z меняется на отрезке $(a, a+1)$, то $\ln|a-z$ остается отрицательным и из равенства

$$w = \ln|a-z| + i \arg(a-z)$$

следует, что при $\delta \to 0$

$$\arg w' = \arg \ln(a-z') \to \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\ln|a-z|} - \pi,$$

$$\arg w'' = \arg \ln(a-z'') \to \pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\ln|a-z|}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{(ED,\, D_1E_1)} = \lim_{\delta \to 0} \left[\int\limits_{ED} + \int\limits_{D_1E_1} \right] =$$

$$= -2i \int\limits_{a}^{a+1} \frac{(z-a)^s [\ln^2(z-a) + \pi^2]^{\frac{m}{2}} \sin\left[m \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\ln|z-a|} + \pi(s+m) \right]}{(z-x)\, R(z)}\, dz. \quad (18)$$

c) Пусть теперь z' и z'' являются, соответственно, точками отрезков B_1A_1 и AB. В этом случае при $\delta \to 0$

$$(a-z')^s \to (z-a)^s e^{-\pi s i} \quad \text{и} \quad (a-z'')^s \to (z-a)^s e^{\pi s i}.$$

Поэтому

$$\arg w' = \arg \ln (a-z') \to -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{\ln (z-a)},$$

$$\arg w'' = \arg \ln (a-z'') \to \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\ln (z-a)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{(AB,\, B_1A_1)} =$$

$$= -2i \int\limits_{a+1}^{\infty} \frac{(z-a)^s[\ln^2(z-a)+\pi^2]^{\frac{m}{2}} \sin\left[m \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\ln(z-a)} + \pi s\right] dz}{(z-x)\, R(z)}. \quad (19)$$

Итак, вследствие (17), (18) и (19) формула (16) принимает следующий вид:

$$\Phi(x) = -\frac{R(x)}{\pi}\left\{\sin \pi m \int\limits_{a-1}^{a} \frac{(a-z)^s\, |\ln(a-z)|^m\, dz}{(z-x)\, R(z)} +\right.$$

$$+ \int\limits_{a}^{a+1} \frac{(z-a)^s[\ln^2(z-a)+\pi^2]^{\frac{m}{2}} \sin\left[m \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\ln(z-a)} + \pi(s+m)\right] dz}{(z-x)\, R(z)} +$$

$$\left.+ \int\limits_{a+1}^{\infty} \frac{(z-a)^s[\ln^2(z-a)+\pi^2]^{\frac{m}{2}} \sin\left[m \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\ln(z-a)} + \pi s\right] dz}{(z-x)\, R(z)}\right\}. \quad (20)$$

Обозначим через $I^{(1)}_{s,m}$, $I^{(2)}_{s,m}$ и $I^{(3)}_{s,m}$ соответственно интегралы, входящие в правую часть (20), и займемся вычислением интеграла $I^{(1)}_{s,m}$. Для этой цели заметим, что

$$R(z) \sim \frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1})^n\left\{(a-1)z-1+\sqrt{[(a-1)^2-1](z^2-1)}\right\}$$

равномерно относительно z, удовлетворяющих неравенству $z > a-1 > 1$. Поэтому, полагая $\ln(a-z) = -t$, находим для $I^{(1)}_{s,m}$ асимптотическое равенство

$$I^{(1)}_{s,m} \sim \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-(s+1)t}\, t^m\, dt}{(a-e^{-t}-x)\, S(t)} = I^*_{s,m},$$

$$S(t) = [a-e^{-t}+\sqrt{(a-e^{-t})^2-1}]^n\,[(a-1)(a-e^{-t})-1+$$
$$+\sqrt{[(a-1)^2-1][(a-e^{-t})^2-1}]]$$

равномерно относительно x.

Далее, полагая

$$\varphi(t)=\frac{1}{a-e^{-t}+\sqrt{(a-e^{-t})^2-1}},$$

$$F(t)=\frac{e^{-(s+1)t}\,t^m}{(a-e^{-t}-x)\{(a-1)(a-e^{-t})-1+\sqrt{[(a-1)^2-1][(a-e^{-t})^2-1]}\}},$$

легко видеть, что для последнего интеграла $I^*_{s,m}$ первые три условия леммы Бернштейна выполняются; покажем, что выполняется также четвертое условие леммы. Заметим, что имеет место асимптотическое равенство

$$I^*_{s,m}=\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}}F\left(\frac{u}{n}\right)du\sim$$

$$\sim\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\sqrt{(a-1)^2-1}}}\cdot\frac{\left|\frac{u}{n}\right|^m\cdot e^{-\frac{(s+1)u}{n}}du}{2(a-1-x)[(a-1)^2-1]}\sim\frac{[(a-1)^2-1]^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(m+1)}{2(a-1-x)n^m}$$

равномерно относительно x, из которого, в частности, следует, что четвертое условие леммы Бернштейна для интеграла $I^*_{s,m}$ выполняется. Следовательно, к интегралу $I^*_{s,m}$ эта лемма применима, и в силу (9) имеет место асимптотическое равенство

$$I^{(1)}_{s,m}\sim I^*_{s,m}\sim\frac{[(a-1)^2-1]^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(m+1)}{2(a-1-x)n^{m+1}(a-1+\sqrt{(a-1)^2-1})^n}. \tag{21}$$

Аналогичным рассуждением нетрудно показать, что

$$I^{(2)}_{s,m}\sim O\left[\frac{1}{n^{m+1}(a+\sqrt{(a^2-1)^n}}\right], \tag{22}$$

$$I^{(3)}_{s,m}\sim O\left[\frac{1}{n^{m+1}\,[a+1+\sqrt{(a+1)-1}]^n}\right]. \tag{23}$$

Итак, из (21), (22) и (23) следует, что $I^{(2)}_{s,m}$ и $I^{(3)}_{s,m}$ по сравнению с $I^{(1)}_{s,m}$ являются бесконечно малыми величинами. Следовательно, в силу (21), из формулы (20) вытекает следующее асимптотическое равенство:

$$\Phi(x)=(a-x)^s[\ln(a-x)]^m-P_n(x)\sim$$

$$\sim\frac{\sin\pi m\,[(a-1)^2-1]^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(m+1)}{\pi(a-1+\sqrt{(a-1)^2+1})^n n^{m+1}}\cos(n\theta+\delta).$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА III. *Если $s>0$ и m — любое нецелое положительное число, то наилучшее приближение функции $(a-x)^s[\ln(a-x)]^m$ $(a>2)$ на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n выражается асимптотическим равенством*

$$E_n[(a-x)^s \ln^m(a-x)] \sim \frac{\sin \pi m\ [(a-1)^2-]^{\frac{m-1}{2}}\ \Gamma(m+1)}{\pi(a-1+\sqrt{(a-1)^2-1})^n\ n^{m+1}}.$$

Таким образом, асимптотическое выражение наилучшего приближения при нецелом m не зависит от s.

IV. Рассмотрим случай, когда $a=2$. Полагая $u=1-x$, получим

$$(2-x)^s=(1+u)^s=1+uh(u), \tag{24}$$

где $h(u)$—регулярная функция на отрезке $0<u\leqslant 2$. Кроме этого,

$$\ln(2-x)=\ln(1+u)=u+u^2\varphi(u)$$

или

$$[\ln(2-x)]^m=u^m((1+u\psi(u)), \tag{25}$$

причем $\psi(u)$—также регулярная функция на отрезке $0<u\leqslant 2$.

Из равенств (24) и (25) находим

$$(2-x)^s[\ln(2-x)]^m=u^m+u^{m+1}g(u)=(1-x)^m+(1-x)^{m+1}g(1-x), \tag{26}$$

где $g(1-x)$—регулярная функция на отрезке $(-1, +1)$. Полагая $(1-x)=2y^2$, из равенства (26) получим

$$E_n\{(2-x)^s[\ln(2-x)]^m\}=E_{2n}\{(1+2y^2)^s[\ln(1+2y^2)]^m\}=$$
$$=E_{2n}\{2^m|y|^{2m}+2^{m+1}|y|^{2(m+1)}g(2y^2)\}.$$

Отсюда следует неравенство

$$2^mE_{2n}\{|y|^{2m}\}-2^{m+1}E_{2n}[\varphi(y)]\leqslant E_n\{(2-x)^s[\ln(2-x)]^m\}\leqslant$$
$$\leqslant 2^mE_{2n}[|y|^{2m}]+2^{m+1}E_{2n}[\varphi(y)], \tag{27}$$

где

$$\varphi(y)=|y|^{2(m+1)}g(2y^2).$$

Очевидно, $\varphi(y)$ есть функция, имеющая производную любого порядка для $y\neq 0$ и непрерывную производную порядка q при $y=0$ ($q=2m+1$ при целом m и $q=[2m]+1$ при нецелом m).

Следовательно, функция $\varphi(y)$ имеет непрерывную производную порядка $q\geqslant[2m]+1$ на всем сегменте $(-1, +1)$ и поэтому имеет место

$$E_{2n}[\varphi(y)]\sim\frac{\varepsilon_n}{n^{2m}}, \tag{28}$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Итак, в силу (28), из неравенства (27) следует асимптотическое равенство

$$E_n\{(2-x)^s[\ln(2-x)]^m\}\sim 2^mE_{2n}[|y|^{2m}]. \tag{29}$$

С. Н. Бернштейн (4), исходя из формулы

$$|x|^s-Q_n(x)=\frac{4\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi n^s}\cos n\arcsin x\int\limits_0^\infty\frac{u^{s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{n^2x^2}\right)}+\frac{\varepsilon_n}{n^s}, \tag{A}$$

доказал следующую теорему:

Если s — любое нецелое положительное число, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^s E_n |x|^s = \mu(s)$$

и при достаточно большом s имеет место асимптотическое равенство

$$\mu(s) \sim \left|\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi}\right| \Gamma(s); \tag{B}$$

кроме этого, при $s > 2$ справедливо двойное неравенство

$$\left(1-\frac{1}{s-1}\right)\left|\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi}\right| \Gamma(s) < \mu(s) < \left|\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi}\right| \Gamma(s).$$

В силу этой теоремы из асимптотического равенства (29) следует

ТЕОРЕМА IV. *Если $m > 0$ — любое нецелое число, то наилучшее приближение функции $(2-x)^s [\ln(2-x)]^m$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочлена степени n имеет порядок $\frac{1}{n^{2m}}$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m} E_n \left\{(2-x)^s [\ln(2-x)]^m\right\} = 2^{-m} \mu(2m),$$

где $\mu(s)$ — константа Бернштейна.

V. Если $m > 0$ — любое нецелое число и $1 < a < 2$, то функция $(a-x)^s |\ln(a-x)|^m$ снова имеет две особые точки: a и $a-1$, причем одна из них $(a-1)$ находится на отрезке $(-1, +1)$.

Положим $u = a-1-x$; тогда

$$|\ln(a-x)|^m = |\ln(1+u)|^m = |a + a^2\varphi(u)|^m = |u|^m |1+u\varphi(u)|^m, \tag{30}$$

$$(a-x)^s = (1+u)^s = 1 + uh(u), \tag{31}$$

где $\varphi(u)$ и $h(u)$ — регулярные для $a-2 \leqslant u \leqslant a$ функции.

Очевидно, при всех положительных значениях u $\frac{\ln(1+u)}{u} > 0$ и поэтому $1+u\varphi(u) > 0$.

Если же $a-2 \leqslant u \leqslant 0$, то

$$\frac{\ln(1+u)}{u} < \frac{\ln(1+a-2)}{a-2} = \frac{\ln(a-1)}{a-2} > 0$$

и $1+u\varphi(u) > 0$.

Таким образом, из равенства (30) следует, что

$$|\ln(1+u)|^m = |u|^m (1+u\varphi(u))^m \tag{30'}$$

при $a-2 \leqslant u \leqslant a$.

Итак, из равенств (30) и (31) находим

$$f(x) = (a-x)^s |\ln(a-x)|^m = (1+u)^s |\ln(1+u)|^m = |u|^m (1+ug(u)) =$$
$$= |a-1-x|^m + (a-1-x)|a-1-x|^m g(a-1-x),$$

где $g(u)$ — регулярная в $a-2 \leqslant u \leqslant a$ функция.

Отсюда следует неравенство

$$E_n |a-1-x|^m - E_n[\psi(x)] \leqslant E_n[f(x)] \leqslant E_n |a-1-x|^m + E_n[\psi(x)], \tag{32}$$

где

$$\psi(x) = (a-1-x)|a-1-x|^m g(a-1-x).$$

Функция $\psi(x)$ имеет непрерывную производную порядка $q \geqslant m$ ($q = m$ при целом m, и $q = [m] + 1$ при нецелом m) на всем сегменте $(-1, +1)$ и, следовательно,

$$E_n[\psi(x)] \sim \frac{\varepsilon_n}{n^m}, \tag{33}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, в силу (33) из неравенства (32) следует асимптотическое равенство

$$E_n[(a-x)^s |\ln(a-x)|^m] \sim E_n[|a-1-x|^m]. \tag{34}$$

По известной теореме С. Н. Бернштейна ([5]), если $p > 0$ — любое нецелое положительное число, то при любом c $(-1 < c < 1)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_n |x-c|^p = (1-c^2)^{\frac{p}{2}} \lim_{n\to\infty} n^p E_n |x|^p = (1-c^2)^{\frac{p}{2}} \mu(p).$$

В силу этой теоремы из асимтотического равенства (34) следует

ТЕОРЕМА V. *Если $m > 0$ — любое нецелое число и $1 < a < 2$, то имеет место равенство*

$$\lim n^m E_n[(a-x)^s |\ln(a-x)|^m] = [1-(a-1)^2]^{\frac{m}{2}} \lim_{n\to\infty} n^m E_n |x|^m =$$
$$= [1-(a-1)^2]^{\frac{m}{2}} \mu(m).$$

Примечание. Сравнивая результаты пп. III, IV и V, приходим к следующему заключению. Если $m > 0$ есть любое нецелое число, то порядок наилучшего приближения функции $(a-x)^s |\ln(a-x)|^m$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочлена степени n при $a > 2$ равен $n^{-(m+1)} (a-1+\sqrt{(a-1)^2-1})^{-n}$, при $a = 2$ равен n^{-2m} и при $1 < a < 2$ равен n^{-m}. Кроме того, $E_n[(a-x)^s |\ln(a-x)|^m]$ не зависит от s, если $m > 0$ — любое нецелое число.

§ 2. О наилучшем приближении функции $(1-x)^s \ln^m(1-x)$

Полагая $m > 0$ целым числом, будем исследовать наилучшее приближение функций вида

$$f(x) = (1-x)^s \ln^m(1-x),$$

имеющих особенность в точке $x = 1$.

В этом случае из равенства (5) нетрудно заметить, что

$$\lim_{a=1} R(x) = (1-x) T_n(x) = (1-x) \cos n \arccos x,$$

а $P_n(x)$ есть интерполяционный многочлен Лагранжа, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках $x = 1$ и $x_k = \cos \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{n}$, причем $f(1) = P_n(1) = 0$.

В данном случае мы не можем рассчитывать, что $P_n(x)$ является многочленом, наименее уклоняющимся от $f(x)$, так как разность

$$F_1(x) = (1-x)^s \ln^m (1-x) - P_n(x)$$

будет иметь не более $(n+1)$ абсолютных экстремумов с чередующимися знаками, обращаясь в нуль при $x=1$; тем не менее мы устанавливаем верхнюю и нижнюю границу наилучшего приближения данной функции с помощью многочлена степени n.

В дальнейшем мы будем различать два случая: когда s—любое нецелое положительное число и когда s—любое целое положительное число.

I. Допустим, что s—любое нецелое положительное число. В этом случае, заставляя $a > 1$ стремиться к 1, из формулы (7) получаем:

$$\Phi_1(x) = (1-x)^s \ln^m (1-x) - P_n(x) =$$

$$= -\frac{(1-x) T_n(x)}{2\pi i} \int\limits_1^\infty \frac{(z-1)^{s-1} \{ e^{\pi s i} [\ln(z-1) + \pi i]^m - e^{-\pi s i} [\ln(z-1) - i\pi]^m \} \, dz}{(z-x) T_n(z)}, \quad (35)$$

или

$$\Phi_1(x) = -\frac{(1-x) T_n(x)}{\pi} \sin \pi s \int\limits_1^\infty \frac{(z-1)^{s-1} \ln^m (z-1) \, dz}{(z-x) T_n(z)} +$$

$$+ (1-x) T_n(x) \sum_{k=1}^{m} b_k \int\limits_1^\infty \frac{(z-1)^{s-1} \ln^{m-k}(z-1) \, dz}{(z-x) T_n(z)}, \quad (35')$$

где b_k—некоторые постоянные числа.

Полагая $z + \sqrt{z^2 - 1} = \sigma$ и замечая, что

$$z = \frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right), \quad dz = \frac{(\sigma-1)(\sigma+1)\, d\sigma}{2\sigma^2}, \quad z - 1 = \frac{(\sigma-1)^2}{2\sigma},$$

находим

$$I^*_{m,s} = (1-x) \int\limits_1^\infty \frac{(z-1)^{s-1} \ln^m (z-1) \, dz}{(z-x) T_n(z)} =$$

$$= \frac{1-x}{2^{s-2}} \int\limits_1^\infty \frac{(\sigma-1)^{2s-1} (\sigma+1) \left[\ln \frac{(\sigma-1)^2}{2\sigma} \right]^m d\sigma}{\sigma^{s} (\sigma^2 - 2\sigma x + 1)(\sigma^n + \sigma^{-n})}.$$

Далее, пользуясь подстановкой $\sigma = 1 + \frac{u}{n}$, приходим к асимптотическому равенству

$$I^*_{m,s} \sim \frac{2^{2-s}(1-x)}{n^{2s}} \int\limits_0^\infty \frac{u^{2s-1} \left(\ln \frac{u^2}{2n^2} \right)^m du}{(e^u + e^{-u}) \left[(1-x) + \frac{u^2}{2n^2} \right]} \sim$$

$$\sim \frac{(-1)^m 2^{2-s+m} (\ln n)^m}{n^{2s}} T_n(x) \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left[1+\frac{u^2}{2(1-x)n^2}\right]} \qquad (36)$$

равномерно относительно x.

В силу (36) нетрудно заметить, что все слагаемые, стоящие в правой части (35), по сравнению с первым слагаемым являются бесконечно малыми, по крайней мере порядка $\frac{1}{\ln n}$; поэтому формула (35′) может быть представлена в следующем виде:

$$\Phi_1(x) \sim -\frac{(1-x)T_n(x)\sin \pi s}{\pi} \int_1^\infty \frac{(z-1)^{s-1}\ln^m(z-1)\,dz}{(z-x)T_n(z)} \sim$$

$$\sim \frac{(-1)^{m+1} 2^{2-s+m} \sin \pi s (\ln n)^m}{\pi \cdot n^{2s}} \cdot T_n(x) \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left[1+\frac{u^2}{2(1-x)n^2}\right]}; \qquad (35'')$$

отсюда приходим к равенству

$$\Phi_1(x) = \frac{(-1)^{m+1} 2^{m-s+2} \sin \pi s (\ln n)^m}{\pi \cdot n^{2s}} \cdot T_n(x) \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{2(1-x)n^2}\right)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_n (\ln n)^m}{n^{2s}}, \qquad (37)$$

где $\varepsilon_n \to 0$ равномерно при $n \to \infty$.

Следовательно, если $n^2(1-x) = b \to \infty$, то

$$\Phi_1(x) = \frac{(-1)^{m+1} 2^{m-s+2} \sin \pi s (\ln n)^m}{\pi \cdot n^{2s}} \cdot T_n(x) \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{e^u+e^{-u}} + \frac{\varepsilon_n (\ln n)^m}{n^{2s}}. \qquad (38)$$

С. Н. Бернштейн, рассматривая функции $(1-x)^s$ [см. (2), гл. II, § 6], установил, что если $n^2(1-x) = b \to \infty$, то

$$F(x) = (1-x)^s - P_n(x) = \frac{2^{2-s}\sin \pi s}{\pi n^{2s}} \cdot T_n(x) \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{e^u+e^{-u}} + \frac{\varepsilon}{n^{2s}}, \qquad (39)$$

и, вообще, при всяком $b \geqslant 0$

$$F(x) = \frac{2^{2-s}\sin \pi s}{\pi n^{2s}} \cdot T_n(x) \int_0^\infty \frac{bu^{2s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(b+\frac{u^2}{2}\right)} + \frac{\varepsilon_n'}{u^{2s}}, \qquad (40)$$

где $\varepsilon_n \to 0$ равномерно при $n \to \infty$; кроме этого, имеет место неравенство

$$C_s > n^{2s} E_n[(1-x)^s] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2s} \cdot \frac{C_s}{2\sqrt{2}},$$

где

$$C_s = \frac{2^{2-s}\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{e^u+e^{-u}},$$

Исследовав главный член правой части (39), С. Н. Бернштейн показал еще ([4]) существование предела

$$\lim_{n\to\infty} n^{2s} E_n (1-x)^s.$$

Отсюда, сравнивая формулы (37) и (38) с формулами (39) и (40), приходим к следующему заключению:

ТЕОРЕМА VI. *Если s — любое нецелое положительное число и $m>0$ — любое целое число, то для наилучшего приближения функции $(1-x)^s \ln^m (1-x)$ имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n [(1-x)^s \ln^m (1-x)] \sim 2^m (\ln n)^m E_n [(1-x)^s];$$

более точно выполняется неравенство

$$C_s > \frac{n^{2s}}{(\ln n)^m} \cdot E_n [(1-x)^s \ln^m (1-x)] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2s} \cdot \frac{C_s}{2\sqrt{2}}, \tag{41}$$

где

$$C_s = \frac{2^{m-s+2} \sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\, du}{e^u + e^{-u}}.$$

II. Пусть теперь $s=p$ — целое положительное число. В таком случае формула (35) примет следующий вид:

$$\Phi_2(x) = -\frac{(1-x)T_n(x)}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{(z-1)^{p-1} \{[\ln (z-1)+i\pi]^m - [\ln(z-1)-i\pi]^m\}\, dz}{(z-x)\, T_n(z)} =$$

$$= -\frac{(1-x)T_n(x)}{2\pi i}\left[2\pi i m \int_1^\infty \frac{(z-1)^{p-1} \ln^{m-1}(z-1)\, dz}{(z-1)\, T_n(z)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^m b_k \int_1^\infty \frac{(z-1)^{p-1} \ln^{m-k}(z-1)\, dz}{(z-x)\, T_n(z)}\right]. \tag{42}$$

Далее, аналогично тому, как доказывалось асимптотическое равенство (35″), мы показываем, что все слагаемые, стоящие в правой части (42), по сравнению с первым слагаемым являются бесконечно малыми величинами, по крайней мере порядка $\frac{1}{\ln n}$. Следовательно, имея в виду асимптотическое равенство (36) для разности $\Phi_2(x)$, мы найдем

$$\Phi_2(x) = \frac{(-1)^{m+1} m \cdot 2^{1-p+m} (\ln n)^{m-1}}{n^{2p}} T_n(x) \int_0^\infty \frac{u^{2p-1}\, du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{2(1-x)n^2}\right)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_n (\ln n)^{m-1}}{n^{2p}} \tag{43}$$

и для $n^2(1-x) = b \to \infty$

$$\Phi_2(x) = \frac{(-1)^{m+1}\, m \cdot 2^{1-p+m} (\ln n)^{m-1}}{n^{2p}} T_n(x) \int\limits_0^\infty \frac{u^{2p-1}\,du}{e^u+e^{-u}} + \frac{\varepsilon_n (\ln n)^{m-1}}{n^{2p}}, \quad (44)$$

где $\varepsilon_n \to 0$ равномерно при $n \to \infty$.

Аналогично предыдущему случаю, из равенств (43) и (44) будет следовать*

ТЕОРЕМА VII. *Если p и m—целые положительные числа, то наилучшее приближение функции $(1-x)^p \ln^m(1-x)$ удовлетворяет при достаточно больших n неравенству*

$$C_p > \frac{n^{2p}}{(\ln n)^{m-1}} E_n[(1-x)^p \ln^m(1-x)] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2p} \cdot \frac{C_p}{2\sqrt{2}}, \quad (45)$$

где

$$C_p = m \cdot 2^{m-s+1} \int\limits_0^\infty \frac{u^{2p-1}\,du}{e^u+e^{-u}}.$$

Следствие. В случае $p=m=1$ неравенство (45) примет вид

$$C_1 > n^2 E_n[(1-x)\ln(1-x)] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^2 \frac{C_1}{2\sqrt{2}}, \quad (45')$$

где

$$C_1 = 2\int\limits_0^\infty \frac{u\,du}{e^u+e^{-u}}.$$

Неравенство (45) подтверждает недоказанное утверждение С. Н. Бернштейна о том, что порядок убывания $E_n[1-x)\ \ln(1-x)]$ при $n \to \infty$ равен $\frac{1}{n^2}$ [(2), стр. 91].

§ 3. О наилучшем приближении функции $|x|^s \ln^m |x|$

Займемся теперь определением порядка наилучшего приближения четной функции

$$f(x) = |x|^s \ln^m |x|$$

на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочлена $P_N(x)$ заданной степени N. Ввиду четности функции $f(x)$ мы предполагаем, что многочлен $P_N(x)$ содержит только четные степени x и его степень $N=2n$.

I. Прежде всего допустим, что s—любое нецелое положительное число, и $m>0$—любое целое число. Заметим, что аналогично тому, как выводилась формула (35″), мы можем установить, что

$$\varphi(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{s}{2}} \ln^m\left(\frac{1-x}{2}\right) - Q_n(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} \sin\frac{\pi s}{2} \cdot 2^{2-s+m} (\ln n)^m}{\pi \cdot n^s} \cdot T_n(x) \int\limits_0^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left[1+\frac{u^2}{2n^2(1-x)}\right]} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_n (\ln n)}{n^s}. \quad (46)$$

* Результаты пп. I, II § 1 и пп. I, II § 2 опубликованы в моей заметке (*).

Положим

$$\frac{1-x}{2}=y^2$$

и заметим, что если x изменяется на отрезке $(-1,+1)$, то y будет изменяться на том же отрезке. Тогда формула (46) примет следующий вид:

$$\varphi_1(y)=|y|^s\ln^m|y|-P_N(y)=\frac{(-1)^{m+1}4\sin\frac{\pi s}{2}(\ln N)^m}{\pi\cdot N^s}\cdot$$

$$\cdot T_n(1-2y^2)\int\limits_0^\infty\frac{u^{s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left[1+\frac{u^2}{4n^2y^2}\right]}+\frac{\varepsilon_N(\ln N)^m}{N^s}, \qquad (47)$$

где $N=2n$, $P_N(y)=\frac{1}{2^m}Q_n(1-2y^2)$.

Замечая, что $T_n(1-2y^2)=(-1)^nT_N(y)$, преобразуем (47) к виду

$$\varphi_1(y)=\frac{4(-1)^{m+n+1}\sin\frac{\pi s}{2}(\ln N)^m}{\pi\cdot N^s}\cdot$$

$$\cdot T_N(y)\int\limits_0^\infty\frac{u^{s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{N^2y^2}\right)}+\frac{\varepsilon_N(\ln N)^m}{N^s}. \qquad (48)$$

Следовательно, если $N^2y^2=b\to\infty$, то, имея в виду, что

$$T_N(y)=(-1)^n\cos 2n\arcsin y,$$

находим

$$\varphi_1(y)=\frac{4(-1)^{m+n+1}\sin\frac{\pi s}{2}(\ln N)^m}{\pi\cdot N^s}\cos N\arcsin y\int\limits_0^\infty\frac{u^{s-1}\,du}{e^u+e^{-u}}+\frac{\varepsilon_N(\ln N)^m}{N^s}, \qquad (49)$$

и, вообще, при всяком $b>0$

$$\varphi_1(y)=\frac{4(-1)^{m+1}\sin\frac{\pi s}{2}(\ln N)^m}{\pi\cdot N^s}\cos N\arcsin y\int\limits_0^\infty\frac{bu^{s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})(b+u^2)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\varepsilon_N(\ln N)^m}{N^s}, \qquad (49')$$

где $\varepsilon_N\to 0$ равномерно при $n\to\infty$.

Таким образом, во всех точках $\zeta_k=\sin\frac{k\pi}{N}$, где $b_k=N^2\zeta_k^2\to\infty$, достигается асимптотически абсолютный экстремум с противоположными знаками:

$$\frac{(\ln N)^m}{N^s}C_s=\frac{4(-1)^{m+1}\sin\frac{\pi s}{2}(\ln N)^m}{\pi\cdot N^s}\int\limits_0^\infty\frac{u^{s-1}\,du}{e^u+e^{-u}}=$$

$$= \frac{4(-1)^{m+1} \sin \frac{\pi s}{2} (\ln N)^m}{\pi \cdot N^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(s)}{(2k+1)^s}. \tag{50}$$

Очевидно, что интеграл в формуле (49), убывающий вместе с b, меньше, чем в формуле (50), поэтому во всяком случае погрешность приближения посредством многочленов не больше, чем $\frac{(\ln N)^m}{N^s} C_s$.

С другой стороны, применяя обобщенную теорему De la Vallée Poussin'а, нетрудно убедиться, что при достаточно большом N справедливо неравенство

$$E'_N[|y|^s \ln^m |y|] > \frac{4 \sin \frac{\pi s}{2} (\ln N)^m}{\pi N^s} T_N\left(\sin \frac{\pi}{4N}\right) \int_0^\infty \frac{u^{s-1} du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{b_0}\right)},$$

где $b_0 = N^2 \sin^2 \frac{\pi}{4N} \to \frac{\pi^2}{16}$ и $E'_N[f]$ означает наилучшее приближение $f(x)$ посредством многочлена степени N, обращающегося в нуль при $y=0$.

В самом деле, так как

$$T_N\left(\sin \frac{\pi}{4N}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_N\left(\sin \frac{k\pi}{N}\right) = (-1)^k \ (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n),$$

то во всех этих $N+1$ точках разность $\varphi_1(y)$ получает значения с противоположными знаками, причем наименьшее по абсолютному значению соответствует точке $\sin \frac{\pi}{4N}$. Принимая во внимание, что [(2), стр. 61, формула (68)]

$$\frac{1}{2} E'_N[f(x); (-1, +1)] < E_N[f(x); (-1, +1)] \leqslant E'_N[f(x); (-1, +1)],$$

где $f(0)=0$, при всяком $s>0$ и $m>0$ имеем

$$C_s > \frac{N^s}{(\ln N)^m} E_N[|y|^s \ln^m |y|] > \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi s}{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{s-1} du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{16u^2}{\pi^2}\right)} >$$

$$> \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^s \cdot \frac{C_s}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, оказывается справедливой

ТЕОРЕМА VIII. *Если $s>0$ — любое нецелое число и $m>0$ — любое целое число, то порядок убывания наилучшего приближения $E_N[|y|^s \ln^m |y|]$ равен $\frac{(\ln N)^m}{N^s}$. Более точно выполняются неравенства*

$$C_s > \frac{N^s}{(\ln N)^m} \cdot E_N[|y|^s \ln^m |y|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^s \cdot \frac{C_s}{2\sqrt{2}},$$

где

$$C_s = \frac{4\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{e^u+e^{-u}}.$$

II. Допустим, что $s=p$—целое положительное число. Определим порядок наилучшего приближения функции $|x|^p \ln^m |x|$, различая при этом два случая:

a) $p=2q$—четное целое положительное число (q—целое положительное число). Тогда, аналогично тому, как выводилась формула (43), получим

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^q \ln^m\left(\frac{1-x}{2}\right) - Q_n(x) \sim$$

$$\sim \frac{(-1)^{m+1}\, m 2^{1-q+m} (\ln n)^{m-1}}{n^{2q}\cdot 2^q} T_n(x)\int\limits_0^\infty \frac{u^{2q-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{2(1-x)n^2}\right)} + \frac{\varepsilon_n (\ln n)^{m-1}}{n^{2q}}. \tag{51}$$

Отсюда, полагая $1-x=2y^2$, находим

$$\psi(y) = \varphi_1(1-2y^2) = |y|^{2q}\ln^m |y| - P_N(y) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+n+1}\, 2m (\ln N)^{m-1}}{N^{2q}} T_N(y) \int\limits_0^\infty \frac{u^{2q-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{N^2y^2}\right)} + \frac{\varepsilon_N (\ln N)^{m-1}}{N^{2q}}, \tag{52}$$

где $\varepsilon_N \to 0$ равномерно при $N\to\infty$.

Для $N^2y^2 = b \to \infty$ получаем, что

$$\psi(y) = \frac{(-1)^{m+n+1}\, 2m (\ln N)^{m-1}}{N^{2q}} T_N(y)\int\limits_0^\infty \frac{u^{2q-1}\,du}{e^u+e^{-u}} + \frac{\varepsilon_N (\ln N)^{m-1}}{N^{2q}}, \tag{52'}$$

причем

$$P_N(y) = \frac{1}{2^m} Q_n(1-2y^2)$$

есть многочлен степени $N=2n$.

Повторяя рассуждения п. I этого же параграфа, из равенств (52) и (52') приходим к неравенству

$$C_p > \frac{N^{2q}}{(\ln N)^{m-1}} E_N\left[|y|^{2q}\ln^m |y|\right] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2q}\cdot\frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

где

$$C_p = 2\int\limits_0^\infty \frac{u^{2q-1}\,du}{e^u+e^{-u}}.$$

b) $s=p$—нечетное целое положительное число: $p=2q+1$. В таком случае, полагая

$$\frac{s}{2} = \frac{2q+1}{2}, \quad 1-x=2y^2,$$

из формулы (46) находим, что

$$\Phi(y) = |y|^{2q+1} (\ln |y|)^m - P_N(y) =$$
$$= \frac{4(-1)^{n+m+q} (\ln N)^m}{\pi N^{2q+1}} T_N(y) \int_0^\infty \frac{u^{2q}\, du}{(e^u + e^{-u}) \left(1 + \frac{u^2}{N^2 y^2}\right)} + \frac{\varepsilon_N (\ln N)^m}{N^{2q+1}}, \quad (53)$$

где $\varepsilon_N \to 0$ равномерно при $n \to \infty$.

Отсюда для $N^2 y^2 = b \to \infty$ имеем

$$\Phi(y) = \frac{4(-1)^{m+n+q} (\ln N)^m}{\pi N^{2q+1}} T_N(y) \int_0^\infty \frac{u^{2q}\, du}{e^u + e^{-u}} + \frac{\varepsilon_N (\ln N)^m}{N^{2q+1}}. \quad (53')$$

Из формул (53) и (53′), подобно предыдущим, получается неравенство

$$C_q > \frac{N^{2q+1}}{(\ln N)^m} E_N [|y|^{2q+1} \ln^m |y|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2q+1} \cdot \frac{C_q}{2\sqrt{2}},$$

где

$$C_q = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{2q}\, du}{e^u + e^{-u}}.$$

Таким образом, оказывается справедливой

ТЕОРЕМА IX. *Если p — целое четное положительное число и $m > 0$ — любое целое число, то порядок наилучшего приближения $E_n[|x|^p \ln^m |x|]$ при $n \to \infty$ равен $\frac{(\ln n)^{m-1}}{n^p}$ и справедливо неравенство*

$$C_p > \frac{n^p}{(\ln n)^{m-1}} E_n [|x|^p \ln^m |x|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p \cdot \frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

где $C_p = 2m \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\, du}{e^u + e^{-u}}$, *а если p — нечетное целое положительное число и $m > 0$ — любое целое число, то порядок наилучшего приближения $E_n[|x|^p \ln^m |x|]$ при $n \to \infty$ равен $\frac{(\ln n)^m}{n^p}$ и справедливо неравенство*

$$C_p > \frac{n^p}{(\ln n)^m} E^n [|x|^p \ln^m |x|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p \cdot \frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

где $C_p = \frac{\;}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{p-1} du}{e^u + e^{-u}}$.

Следствие. *Порядок наилучшего приближения $E_n[|x| \ln |x|]$ при $n \to \infty$ равен $\frac{\ln n}{n}$, а порядок наилучшего приближения $E_n[x^3 \ln |x|]$ при $n \to \infty$ равен $\frac{1}{n^2}$.*

III. Мы доказали, что если s — любое нецелое положительное число и $m > 0$ — любое целое число, то имеет место формула

$$|x|^s \ln^m |x| - P_n(x) =$$

$$= \frac{4\sin\frac{\pi s}{2}(\ln n)^m}{\pi n^s} \cos n \arcsin x \int_0^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{n^2x^2}\right)} + \frac{\varepsilon_n (\ln n)^m}{n^s}.$$

Очевидно, правая часть этой формулы отличается от правой части формулы С. Н. Бернштейна (А) множителем $(\ln n)^m$. Поэтому для $|x|^s \ln^m |x|$ можно сформулировать теорему С. Н. Бернштейна так:

ТЕОРЕМА VIII δ. *Если s—любое нецелое положительное число и $m>0$—любое целое число, то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{(\ln n)^m} E_n[|x|^s \ln^m |x|] = \mu(s),$$

где $\mu(s)$—константа Бернштейна.

Легко заметить, что теорема VIII δ и последнее асимптотическое равенство остаются в силе, когда $s=p>0$ есть целое нечетное число.

Далее, сравнивая формулу (52) с формулой С. Н. Бернштейна (А), мы можем сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА IX δ. *Если $p>0$—целое четное число и $m>0$—любое целое число, то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(\ln n)^{m-1}} E_n[|x|^p \ln^m |x|] = \nu_1(p).$$

Кроме того, при достаточно большом p имеет место асимптотическое равенство $\nu_1(p) \sim \frac{m}{2}\Gamma(p)$ и при $p>2$—неравенство

$$\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{m}{2}\Gamma(p) < \nu_1(p) < \frac{m}{2}\Gamma(p).$$

Примечание. В случае $p=2$ и $m=1$ из теоремы IX δ следует существование предела

$$\lim_{n\to\infty} n^2 E_n[x^2 \ln|x|] = \nu_1(2) < \frac{1}{2}\Gamma(2) = 1,$$

поэтому существует следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 E_n[(1-x)\ln(1-x)] = 2\lim_{n\to\infty} n^2 E_n\left[\frac{1-x}{2}\ln\frac{1-x}{2}\right] =$$
$$= 4\lim_{n\to\infty} n^2 E_n[x^2 \ln|x|] = 4\nu_1(2) < 4.$$

IV. При исследовании наилучшего приближения функций вида

$$f(x) = x^p \ln|x|,$$

где p—целое положительное число, мы ограничимся случаем, когда p—нечетное целое положительное число $(p=2q+1)$, так как в случае четного p $(p=2q)$ имеет место равенство

$$E_n[x^{2q}\ln|x|] = E_n[|x|^{2q}\ln|x|],$$

уже рассмотренное в п. II этого параграфа.

Переходя к исследованию наилучшего приближения нечетной функции $x^{2q+1}\ln|x|$ на отрезке $(-1,+1)$ посредством многочлена заданной степени N, положим

$$\psi(x)=\frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^{2q+1}\ln z\,dz}{(z-x)R(z)},$$

где $C=\Gamma+\gamma+AB+A_1B_1$ и многочлен $R(z)$ определяется равенством (6).

Пусть $N=2n+1$ — целое нечетное число. Легко видеть, что функцию $\psi(x)$ можно представить в виде

$$\psi(x)=x^{2q+1}\ln x-P_N^*(x)=(-1)^{q+1}\frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{-2\pi i t^{2q+1}\,dt}{(ti-x)R(it)}=$$

$$=(-1)^{n+q}2xT_N(x)\int\limits_0^\infty \frac{t^{2q}(it+x)\,dt}{(t^2+x^2)\left[(t+\sqrt{t^2+1})^N+(t-\sqrt{t^2+1})^N\right]},$$

так как интегралы по окружности Γ и γ в пределе равны нулю. Приравнивая действительные части обеих сторон последнего равенства, получаем

$$\mathrm{Re}\,\psi(x)=x^{2q+1}\ln|x|-P_n(x)=$$

$$(-1)^q 2x^2\sin N\arcsin x\int\limits_0^\infty \frac{t^{2q}dt}{(t^2+x^2)\left[(t+\sqrt{t^2+1})^N+(t-\sqrt{t^2+1})^N\right]}, \quad (54)$$

так как для нечетного $N=2n+1$ имеет место равенство

$$T_N(x)=\cos N\arccos x=\cos\left[\frac{\pi}{2}+(n\pi-(2n+1)(\arcsin x\right]=$$
$$=-\sin\left[n\pi-(2n+1)\arcsin x\right]=(-1)^n\sin N\arcsin x.$$

Полагая $t+\sqrt{t^2+1}=\sigma$, а затем $\sigma=1+\frac{u}{n}$, мы приведем формулу (54) к виду

$$\mathrm{Re}\,\psi(x)=(-1)^q\frac{2\sin N\arcsin x}{n^{2q+1}}\int\limits_0^\infty \frac{u^{2q}du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{N^2x^2}\right)}+\frac{\varepsilon_N}{N^{2q+1}}. \quad (55)$$

Отсюда, при условии, что $x\neq 0$, получаем

$$\mathrm{Re}\,\psi(x)=(-1)^q\cdot\frac{2\sin N\arcsin x}{N^{2q+1}}\int\limits_0^\infty \frac{u^{2q}du}{e^u-e^{-u}}+\frac{\varepsilon_N}{N^{2q+1}}. \quad (56)$$

Повторяя рассуждения п. 1, из формул (55) и (56) приходим к следующему заключению:

ТЕОРЕМА X. *Если p — целое нечетное положительное число, то порядок убывания наилучшего приближения $E_n[x^p\ln|x|]$ при $n\to\infty$ равен* $\frac{1}{n^p}$; *кроме того, значение $E_n[x^p\ln|x|]$ удовлетворяет неравенству*

$$C_p>n^pE_n[x^p\ln|x|]>\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p\cdot\frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

где

$$C_p = 2\int\limits_0^\infty \frac{u^{p-1}du}{e^u - e^{-u}} = 2\Gamma(p)\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^p}.$$

§ 4. О наилучшем приближении функции $x|x|^s$

1. Пусть s — любое нецелое положительное число. Займемся исследованием наилучшего приближения функции

$$f(x) = x|x|^s$$

на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочлена данной степени n. Прежде всего заметим, что функция $x|x|^s$ является действительной частью комплексной функции

$$u(x) = x^{1+s}\left[1 + i\,\frac{1-\cos\pi s}{\sin\pi s}\right]$$

при всех действительных значениях x, находящихся внутри выбранного выше контура $C = \Gamma + \gamma + AB + A_1B_1$.

В самом деле,

$$\operatorname{Re} u(x) = \operatorname{Re} x^{1+s}\left[1 + \frac{i(1-\cos\pi s)}{\sin\pi s}\right] = x|x|^s$$

при $x > 0$ и

$$\operatorname{Re} u(x) = \operatorname{Re} x^{1+s}\left[1 + \frac{i(1-\cos\pi s)}{\sin\pi s}\right] =$$

$$= \operatorname{Re} x|x|^s(\cos\pi s - i\sin\pi s)\left[1 + \frac{i(1-\cos\pi s)}{\sin\pi s}\right] = x|x|^s$$

при $x < 0$, так как $-1 = e^{-\pi i}$ внутри контура C.

Итак, имеет место равенство

$$f(x) = x|x|^s = \operatorname{Re} u(x) = \operatorname{Re} x^{s+1}\left[1 + \frac{i(1-\cos\pi s)}{\sin\pi s}\right]$$

при всех действительных значениях x, находящихся внутри контура C.

Пусть $n = 2m + 1$ — целое нечетное число, и

$$R(x) = xT_n(x) = x\cos n\arccos x.$$

Положим

$$\Phi(x) = \frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^{s+1}\left[1 + \frac{i(1-\cos\pi s)}{\sin\pi s}\right]dz}{(z-x)R(z)} =$$

$$= \frac{R(x)}{2\pi}\left[1 + \frac{i(1-\cos\pi s)}{\sin\pi s}\right]\left[e^{\frac{3\pi si}{2}} - e^{\frac{\pi si}{2}}\right]\int\limits_0^\infty \frac{t^s dt}{(it-x)T_n(it)}.$$

Последнее равенство вытекает из того обстоятельства, что интегралы по окружностям Γ и γ в пределе равны нулю. Нетрудно видеть, что функцию $\Phi(x)$ можно представить в виде

$$\Phi(x) = u(x) - P_n^*(x),$$

где $P_n^*(x)$ — многочлен степени не выше n с комплексными коэффициентами.

Далее, легко видеть, что

$$\left[1+\frac{i(1-\cos\pi s)}{\sin\pi s}\right]\left[e^{-\frac{3\pi si}{2}}-e^{\frac{\pi si}{2}}\right]=-4i\sin\frac{\pi s}{2}$$

и что в силу нечетности n $(n=2m+1)$ имеет место равенство

$$T_n(it)=\frac{(-1)^m i}{2}\left[(t+\sqrt{t^2+1})^n+(t-\sqrt{t^2+1})^n\right].$$

Таким образом,

$$\Phi(x)=\frac{4(-1)^m\sin\frac{\pi s}{2}R(x)}{\pi}\int_0^\infty\frac{t^s(it+x)\,dt}{(t^2+x^2)\left[(t+\sqrt{t^2+1})^n+(t-\sqrt{t^2+1})^n\right]}. \qquad (57)$$

Отсюда, приняв во внимание, что

$$\operatorname{Re}\Phi(x)=x|x|^s-P_n(x),$$

где $P_n(x)$—действительная часть многочлена $P_n^*(x)$, будем иметь

$$\varphi(x)=x|x|^s-P_n(x)=$$

$$=\frac{4(-1)^m\sin\frac{\pi s}{2}R(x)}{\pi}\int_0^\infty\frac{t^s dt}{(t^2+x^2)\left[(t+\sqrt{t^2+1})^n+(t-\sqrt{t^2+1})^n\right]};$$

полагая $t+\sqrt{t^2+1}=\sigma$, а затем $\sigma=1+\frac{u}{n}$, из последней формулы получим

$$\varphi(x)=\frac{4(-1)^m\sin\frac{\pi s}{2}T_n(x)}{\pi n^{s+1}}\int_0^\infty\frac{u^s du}{(e^u-e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{n^2x^2}\right)}+\frac{\varepsilon_n}{n^{s+1}},$$

где $\varepsilon_n\to 0$ равномерно при $n\to\infty$.

Таким образом, при фиксированном $x\neq 0$

$$\varphi(x)=\frac{4(-1)^m\sin\frac{\pi s}{2}T_n(x)}{\pi n^{s+1}}\int_0^\infty\frac{u^s du}{e^u-e^{-u}}+\frac{\varepsilon_n'}{n^{s+1}}, \qquad (58)$$

и вообще, при всяком $b>0$, где $b=n^2x^2\to\infty$,

$$\varphi(x)=\frac{4(-1)^m\sin\frac{\pi s}{2}T_n(x)}{\pi n^{s+1}}\int_0^\infty\frac{bu^s du}{(e^u-e^{-u})(b+u^2)}+\frac{\varepsilon_n}{n^{s+1}}, \qquad (59)$$

Повторяя рассуждение, изложенное в п. I § 3, из равенств (58) и (59) получаем неравенство

$$C_s>n^{s+1}E_n[x|x|^s]>\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{s+1}\frac{C_s}{2\sqrt{2}}, \qquad (60)$$

где

$$C_s=\frac{4\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi}\int_0^\infty\frac{u^s du}{e^u-e^{-u}}.$$

Таким образом оказывается справедливой

ТЕОРЕМА XI. *Если s — любое нецелое положительное число, то для наилучшего приближения $E_n[x\,|x|^s]$ имеют место неравенства* (60).

II. Если $s=p=2q+1$ — нечетное целое положительное число, то рассмотренный выше множитель $\left[1+i\frac{1-\cos\pi s}{\sin\pi s}\right]$ обращается в бесконечность, и поэтому предыдущие рассуждения не применимы.

Заметим, что x^p при замене x на $-x$ меняет знак и поэтому нам нужно искать функцию, равную 1 при $x>0$ и равную -1 при $x<0$ для всех действительных значений x, лежащих внутри контура $C=\Gamma+\gamma+AB+A_1B_1$.

Для этой цели мы используем то очевидное обстоятельство, что вещественная часть функции* $v(x)=1-\frac{2i}{\pi}\ln x$, заданной в области, ограниченной контуром C, равна 1 при $x>0$ и равна -1 при $x<0$.

Отсюда будет следовать, что функция $|x|^p$ является действительной частью функции

$$u(x)=x^p\left(1-\frac{2i}{\pi}\ln x\right)$$

на отрезке $(-1, +1)$, так что

$$x\,|x|^p=x^{p+1}\mathrm{Re}\left(1-\frac{2i}{\pi}\ln x\right)=\mathrm{Re}\,xu(x). \tag{61}$$

Поэтому, переходя к исследованию наилучшего приближения функции $x\,|x|^p$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочлена данной степени n, предположим, что $n=2m+1$ есть целое нечетное число и

$$R(x)=xT_n(x)=x\cos n\arccos x,$$

$$u_1(x)=x^{p+1}\left(1-\frac{2i}{\pi}\ln x\right).$$

Положим

$$\Phi(x)=\frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(1-\frac{2i}{\pi}\ln z\right)z^{p+1}\,dz}{(z-x)R(z)}=$$

$$=-\frac{(-1)^q R(x)}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{z^p\left\{\left[1-\frac{2i}{\pi}\left(\ln z+\frac{\pi i}{2}\right)\right]-\left[1-\frac{2i}{\pi}\left(\ln z-\frac{3\pi i}{2}\right)\right]\right\}dz}{(iz-x)T_n(iz)}$$

Последнее равенство следует из того, что интегралы по обеим окружностям Γ и γ в пределе равны нулю. Очевидно, функцию $\Phi(x)$ можно представить в виде

$$\Phi(x)=u_1(x)-P_n^*(x),$$

где $P_n^*(x)$ — многочлен степени не выше n с комплексными коэффициентами.

---

* Для функции $\ln x$ в области, ограниченной контуром $C=\Gamma+\gamma+AB+A_1B_1$, берется значение, определяемое условием $\ln 1=0$.

$$\Phi(x)=u_1(x)-P_n^*(x)=$$

$$=\frac{4(-1)^{m+q}R(x)}{\pi}\int_0^\infty\frac{t^p(it+x)\,dt}{(t^2+x^2)\left[(t+\sqrt{t^2+1})^n+(t-\sqrt{t^2-1})^n\right]}. \qquad (62)$$

Наконец, имея в виду равенство (61) и приравняв действительные части обеих сторон равенства (62), получаем

$$x\,|x|^p-P_n(x)=\frac{4(-1)^{m+q}xR(x)}{\pi}\int_0^\infty\frac{t^p\,dt}{(t^2+x^2)\left[(t+\sqrt{t^2+1})^n+(t-\sqrt{t^2-1})^n\right]};$$

полагая $t+\sqrt{t^2+1}=\sigma$ и затем $\sigma=1+\frac{u}{n}$, преобразуем последнюю формулу к виду

$$x\,|x|^p-P_n(x)=\frac{4(-1)^q\sin n\arcsin x}{\pi n^{p+1}}\int_0^\infty\frac{u^p\,du}{(e^u-e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{n^2x^2}\right)}+\frac{\varepsilon_n}{n^{p+1}}.$$

Отсюда при $n^2x^2=b\to\infty$ находим

$$x\,|x|^p-P_n(x)=\frac{4(-1)^q\sin n\arcsin x}{\pi n^{p+1}}\int_0^\infty\frac{u^p\,du}{e^u-e^{-u}}+\frac{\varepsilon_n}{n^{p+1}}, \qquad (63)$$

и вообще, при всяком $b>0$, где $b=n^2x^2$ (x—фиксировано), имеем

$$x\,|x|^p-P_n(x)=\frac{4(-1)^q\sin n\arcsin x}{\pi n^{p+1}}\int_0^\infty\frac{bu^p\,du}{(e^u-e^{-u})(b+u^2)}+\frac{\varepsilon_n}{n^{p+1}}, \qquad (64)$$

где $\varepsilon_n\to 0$ равномерно при $n\to\infty$ и p—нечетное целое положительное число.

Таким образом, во всех точках $x_k=\sin\frac{k\pi}{n}$, где $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ асимптотически достигаются абсолютные экстремумы (с чередующимися знаками), равные

$$\frac{C_p}{n^{p+1}}=\frac{4}{\pi n^{p+1}}\int_0^\infty\frac{u^p\,du}{e^u-e^{-u}}=\frac{4\Gamma(p+1)}{\pi n^{p+1}}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(2k+1)^{p+1}}.$$

Пользуясь рассуждением п. 1 § 3, из равенств (63) и (64) приходим к следующему заключению:

ТЕОРЕМА XII. *Если p—нечетное целое положительное число, то для наилучшего приближения нечетной функции $x\,|x|^p$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочлена степени n справедливо двойное неравенство*

$$C_p>n^{p+1}E_n[x\,|x|^p]>\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{p+1}\frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

где

$$C_p = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{u^p du}{e^u - e^{-u}}.$$

Азербайджанский государственный
университет
г. Баку

Поступило
4. III. 1946

ЛИТЕРАТУРА

Бернштейн С. Н., Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, 1913.
[2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Москва, (1937), 1—203.
De la Valée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, (1919), 1—150.
[4] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 2 (1938), 167—190.
[5] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x-c|^p$, Доклады Ак. Наук СССР, XVIII (1938), 379—384.
[6] Ибрагимов И. И., Об асимптотическом значении наилучшего приближения функции, имеющей вещественную критическую точку, Доклады Ак. Наук СССР, т. XLIX, № 4 (1945), 242—245.

I. IBRAGHIMOFF. SUR LA VALEUR ASYMPTOTIQUE DE LA MEILLEURE APPROXIMATION D'UNE FONCTION AYANT UN POINT SINGULIER RÉEL

RÉSUMÉ

I. Dans ce mémoire nous nous occupons de la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'une fonction de la forme

$$f(x) = (a-x)^s [\ln (a-x)]^m \qquad (a > 1)$$

dans le segment $(-1, +1)$ par les polynômes de degré donné sous des suppositions différentes à propos des nombres positifs s et m. Les résultats suivant sont établis:

1) Si s et un nombre positif non-intégral arbitraire, m est un nombre intégral arbitraire et $a > 1$, alors la meilleure approximation de la fonction $f(x)$ dans le ségment $(-1, +1)$ par les polynômes de degré n est donnée par l'expression asymptotique suivante:

$$E_n [(a-x)^s \ln^m (a-x)] \sim \frac{\sin \pi s (a^2-1)^{\frac{s-1}{2}} (\ln n)^m \Gamma(s+1)}{\pi n^{s+1} (a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

En comparaison avec la formule (12') de S. Bernstein, notre formule montre que la multiplication de la fonction $(a-x)^s$ par $\ln^m (a-x)$ augmente (asymptotiquement) $(\ln n)^m$ fois la meilleure approximation de cette fonction.

2) Si p et m sont des nombres intégrals positifs et $a > 1$, alors la meilleure approximation de la fonction $(a-x)^p$ par $\ln^m (a-x)$ dans le ségment $(-1, +1)$ par les polynômes de degré n admet l'expression asymptotique suivante:

$$E_n [(a-x)^p \ln^m (a-x)] \sim \frac{(a^2-1)^{\frac{p-1}{2}} \Gamma(p+1) \cdot m (\ln n)^{m-1}}{n^{p+1} (a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

3) Si m est un nombre positif non-intégral arbitraire et $a > 2$, alors la meilleure approximation de la fonction $f(x)$ dans le ségment $(-1, +1)$ par les polynômes de degré n est donné par l'expression asymptotique suivante:

$$E_n \{(a-x)^s [\ln (a-x)]^m\} \sim \frac{|\sin \pi m| \, \Gamma(m+1) [(a-1)^2-1]^{\frac{m-1}{2}}}{\pi \cdot n^{m+1} [(a-1)+\sqrt{(a-1)^2-1}]^n}$$

quel que soit $s > 0$.

4) Si $m > 0$ est un nombre non-intégral quelconque, alors la meilleure approximation de la fonction $(2-x)^s [\ln (2-x)]^m$ dans le ségment $(-1, +1)$ par les polynômes de degré n est d'ordre $\frac{1}{n^{2m}}$ et, outre cela, il existe la limite

$$\lim n^{2m} E_n \{(2-x)^s [\ln (2-x)]^m\} = 2^m \mu(2m)$$

telle que $\mu(2m)$ satisfait à l'inégalitée

$$\left(1-\frac{1}{2m-1}\right)\frac{|\sin \pi m|}{\pi}\,\Gamma(2m+1) < \mu(2m) < \frac{|\sin \pi m|}{\pi}\,\Gamma(2m+1).$$

5) Si $m>0$ est un nombre non-intégral quelconque et $1<a<2$, alors il existe la limite

$$\lim n^m E_n\left[(a-x)^s\,|\ln(a-x)|^m\right] = \left[1-(a-1)^2\right]^{\frac{m}{2}}\,\mu(m)$$

telle que

$$\left(1-\frac{1}{m-1}\right)\frac{\left|\sin\frac{\pi m}{2}\right|}{\pi}\,\Gamma(m+1) < \mu(m) < \frac{\left|\sin\frac{\pi m}{2}\right|}{\pi}\,\Gamma(m+1).$$

II. Nous nous occupons maintenant de la meilleure approximation des fonctions de la forme $\varphi(x)=(1-x)^s\ln^m(1-x)$ dans le ségment $(-1, +1)$ par les polynômes de degré n.

Nous avons des résultats suivants:

1) Si s est un nombre positif non-intégral quelconque et $m>0$ est un nombre intégral arbitraire, alors la meilleure approximation de la fonction $\varphi(x)$ admet l'expression asymptotique

$$E_n\left[(1-x)^s\ln^m(1-x)\right] \sim 2^m(\ln n)^m E_n\left[(1-x)^s\right]$$

ou, de la façon plus exacte,

$$C_s > \frac{n^{2s}}{(\ln n)^m}\,E_n[\varphi(x)] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2s}\frac{C_s}{2\sqrt{2}},$$

où

$$C_s = \frac{2^{m-s+2}\sin\pi s}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{e^u+e^{-u}}.$$

2) Si $s=p$ et m sont des nombres integrals positifs, alors la meilleure approximation de la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'inégalitée

$$C_p > \frac{n^{2p}}{(\ln n)^{m-1}}\,E_n\left[(1-x)^p\ln^m[(1-x)]\right] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2p}\frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

où

$$C_p = m\cdot 2^{m-s+1}\int_0^\infty \frac{u^{2p-1}\,du}{e^u+e^{-u}}.$$

pourvu que n est assez grand.

III. En étudiant la meilleure approximations des fonctions de la forme $|x|^s\ln^m|x|$, nous avons obtenu les résultats suivants:

1) Si $s>0$ est un nombre non-intégral quelconque et $m>0$ est un nombre intégral arbitraire, alors l'ordre de décroissement de la meilleure approximation $E_N[|x|^s\ln^m|x|]$ est $\frac{(\ln N)^m}{N^s}$. D'une façon plus exacte l'inégalité suivante a lieu

$$C_s > \frac{N^s}{(\ln N)^m} E_N[|x|^s \ln^m |x|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^s \frac{C_s}{2\sqrt{2}},$$

où

$$C_s = \frac{4 \sin \frac{\pi s}{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{s-1}\, du}{e^u + e^{-u}}.$$

2) Si p est nombre positif pair et $m > 0$ est un nombre intégral quelconque, alors l'ordre de la meilleure approximation $E_u[|x|^p \ln^m |x|]$ est $\frac{(\ln n)^{m-1}}{n^p}$ et nous avons l'inégalité

$$C_p > \frac{n^p}{(\ln n)^{m-1}} E_n[|x|^p \ln^m |x|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p \frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

où

$$C_p = 2m \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\, du}{e^u + e^{-u}};$$

si $p > 0$ est un nombre impair et $m > 0$ est un nombre intégral quelconque, alors l'ordre de la meilleure approximation $E_n[|x|^p \ln^m |x|]$ est $\frac{(\ln n)^m}{n^p}$ et nous avons l'inégalité

$$C_p > \frac{n^p}{(\ln n)^m} E_n[|x|^p \ln^m |x|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p \frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

où

$$C_p = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\, du}{e^u + e^{-u}}.$$

3) Si p est un nombre positif impair, alors l'ordre de décroissance de la meilleure approximation $E_n[x^p \ln |x|]$ est $\frac{1}{n^p}$ et $E_n[x^p \ln |x|]$ satisfait à l'inégalité

$$C_p > n^p E_n[x^p \ln |x|] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p \frac{C_p}{2\sqrt{2}},$$

où

$$C_p = 2 \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\, du}{e^u - e^{-u}} = 2\Gamma(p) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^p}.$$

IV. Nous avons enfin les résultats se rapportants à la meilleure approximation des fonctions de la forme $x|x|^s$:

1) Si $s > 0$ est un nombre non-intégral quelconque alors

$$C_s > n^{s+1} E_n[x|x|^s] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{s+1} \frac{C_s}{2\sqrt{2}},$$

où

$$C_s = \frac{4 \sin \frac{\pi s}{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^p \, du}{e^u - e^{-u}} .$$

2) Si $p > 0$ est un nombre intégral impair, alors la meilleure approximation de la fonction impaire $x|x|^p$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ par les polynômes de degré n satisfait à l'inégalité double

$$C_p > n^{p+1} E_n[x|x|^p] > \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{p+1} \cdot \frac{C_p}{2\sqrt{2}} ,$$

où

$$C_p = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^p \, du}{e^u - e^{-u}} .$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 461–462 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ДОБАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ И. И. ИБРАГИМОВА «ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ОСОБУЮ ТОЧКУ»

Применяя соответствующий вычислительный аппарат, И. И. Ибрагимов получил теорему III:

Если $m > 0$—нецелое число и $s > 0$, то

$$E_n[(a-x)^s \ln^m (a-x)] \simeq \frac{|\sin \pi m| [(a-1)^2-1]^{\frac{m+1}{2}} \Gamma(m+1)}{\pi (a-1+\sqrt{(a-1)^2-1})^n n^{m+1}} \qquad (a > 1). \qquad \text{(I)}$$

Как известно, вторая часть равенства (I) представляет $E_n[(c-x)^m]$, где $c = a-1 > 1$.

Целью этого добавления является установление вытекающего из общей теории наилучшего приближения асимптотического равенства

$$E_n[(c-x)^m \Phi(x)] \simeq |\Phi(c)| E_n[(c-x)^m] \qquad (\Phi(c) \neq 0) \qquad \text{(II)}$$

при m нецелом ($m \gtrless 0$), справедливого для всякой функции $\Phi(x)$, регулярной внутри какого-нибудь эллипса Чебышева, включающего точку c.

Очевидно, что равенство (I) независимо от знака m и s есть частный случай равенства (II), так как функция

$$(a-x)^s \ln^m (a-x) = (a-x)^s \ln^m (1+c-x) = (c-x)^m \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = (a-x)^s \left[\frac{\ln(1+c-x)}{c-x}\right]^m,$$

регулярна внутри эллипса, проходящего через точку $a = c+1$ и $|\Phi(c)| = 1$.

Для доказательства асимптотического равенства (II) полагаем

$$\Phi(x) = \Phi(c) + (c-x)\Phi_1(x),$$

где $|\Phi_1(x)| < M$ в эллипсе D_R с полусуммой осей $R > \rho = c + \sqrt{c^2-1}$. В таком случае

$$|E_n[(c-x)^m \Phi(x)] - |\Phi(c)| E_n[(c-x)^m]| < E_n[(c-x)^{m+1}\Phi_1(x)]. \qquad \text{(III)}$$

Но, при сделанных предположениях, справедливо неравенство

$$E_n[(c-x)^{m+1}\Phi_1(x)] < \left(\frac{2MR}{R-\rho} + \varepsilon_n\right) E_n[(c-x)^{m+1}], \qquad \text{(IV)}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В самом деле, разлагая $\Phi_1(x)$ в ряд по многочленам Чебышева, получаем

$$\Phi_1(x) = \sum_0^n A_k T_k(x) + \delta_n(x),$$

где, как известно [см. литературу на стр. 455 (²), стр. 74)], $|A_k| < \frac{2M}{R^k}$ и $|\delta_n(x)| < \frac{2M}{R-1} \cdot \frac{1}{R^n}$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Таким образом,

$$E_n\left[(c-x)^{m+1}\Phi_1(x)\right] < E_n\left[\sum_0^n A_k T_k(x)(c-x)^{m+1}\right] + \frac{M}{R-1}\cdot\frac{a^{m+1}}{R^n}.$$

Но, принимая во внимание, что $|T_k(x)| \leqslant 1$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеем

$$E_n\left[(c-x)^{m+1}T_k(x)\right] \leqslant E_{n-k}(c-x)^{m+1} < \rho_1^k E_n\left[(c-x)^{m+1}\right],$$

где $\rho_1 > \rho$ может быть взято сколь угодно близким к ρ (независимо от $k \leqslant n$) при n достаточно большом.

Отсюда следует неравенство

$$E_n\left[(c-x)^{m+1}\Phi_1(x)\right] < 2M\sum_{k=0}^n \frac{\rho_1^k}{R^k} E_n\left[(c-x)^{m+1}\right] + \frac{M}{R-1}\cdot\frac{a^{m+1}}{R^n} <$$

$$< \frac{2MR}{R-\rho_1} E_n\left[(c-x)^{m+1}\right] + \frac{M}{R-1}\cdot\frac{a^{m+1}}{R^n},$$

которое равнозначно (IV).

Таким образом, вследствие (III) и (IV), получаем

$$E_n\left[(c-x)^m\Phi(x)\right] = |\Phi(c)|\, E_n\left[(c-x)^m\right] + O E_n\left[(c-x)^{m+1}\right],$$

откуда вытекает (II), благодаря тому, что

$$E_n\left[(c-x)^{m+1}\right] \simeq \frac{m+1}{n}(c^2-1)^{1/2} E_n\left[(c-x)^m\right] = O\,\frac{E_n\left[(c-x)^m\right]}{n}.$$

Неравенство (IV), как нетрудно видеть, остается в силе, если заменить $(c-x)^{m+1}$ любой функцией $\Phi_0(x)$, для которой

$$\lim \sqrt[n]{E_n\left[\Phi_0(x)\right]} = \rho < R.$$

Вообще, каковы бы ни были особенности функции $\Phi_0(x)$ на эллипсе D_ρ с суммой полуосей $\rho < R$, существует последовательность возрастающих значений n, для которых $\varepsilon_n \to 0$ в неравенстве

$$E_n\left[\Phi_0(x)\Phi_1(x)\right] < \left(\frac{2MR}{R-\rho} + \varepsilon_n\right) E_n\left[\Phi_0(x)\right]. \qquad \text{(IV bis)}$$

Поступило 4.III. 1946.

S. BERNSTEIN. COMPLÉMENT AU TRAVAIL DE I. IBRAGHIMOFF «SUR LA VALEUR ASYMPTOTIQUE DE LA MEILLEURE APPROXIMATION D'UNE FONCTION AYANT UN POINT SINGULIER RÉEL»

RÉSUMÉ

Ce complément établit le fait suivant: Soit $\Phi_1(x)$ une fonction régulière et bornée

$$|\Phi_1(x)| \leqslant M$$

à l'intérieur de l'ellipse D_R ayant -1, $+1$ pour foyers dont la somme de demiaxes est égale à R; on a alors l'inégalité

$$E_n\left[\Phi_0(x)\Phi_1(x)\right] < \left(\frac{2MR}{R-\rho} + \varepsilon_n\right) E_n\left[\Phi_0(x)\right],$$

où $\varepsilon_n \to 0$ pour une infinité de valeurs de n, quelle que soit la fonction $\Phi_0(x)$ donnée possédant des singularités sur l'éllipse D_ρ dont la somme de demiaxes $\rho < R$.

Ainsi, en particulier, lorsque la fonction $\Phi_0(x)$ a un seul point singulier c à l'intérieur de D_R et jouit de la propriété que $\lim \sqrt[n]{E_n\Phi_0(x)}$ éxiste et que

$$E_n\left[(c-x)\Phi_0(x)\right] = o E_n\left[\Phi_0(x)\right]$$

on a pour toute valeur de $n \to \infty$ (en supposant $|\Phi_1(c)| > 0$)

$$E_n\left[\Phi_0(x)\Phi_1(x)\right] \simeq |\Phi_1(c)|\, E_n\left[\Phi_0(x)\right].$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 463—468 Série mathématique

Н. А. САПОГОВ

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ ВЕЩЕСТВЕННУЮ КРИТИЧЕСКУЮ ОСОБЕННОСТЬ НА ЭЛЛИПСЕ СХОДИМОСТИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе исследуется вопрос об асимптотическом значении наилучшего приближения (простого и взвешенного) функции $(a-x)^s$ при произвольном вещественном s с помощью интегрирования дробного порядка.

1. Исходной точкой для определения асимптотического значения наилучшего приближения аналитической функции, имеющей заданную вещественную особенность $a>1$ на эллипсе сходимости, является для С. Н. Бернштейна (¹) равенство

$$R_n(x)=\frac{1}{x-a}-\frac{\cos(n\theta+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \tag{1}$$

приводящее к точному значению наилучшего приближения функции $\frac{1}{x-a}$ [см. (¹), стр. 82]:

$$E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)=\frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}=\frac{1}{(a^2-1)R^n(a)}$$

Дифференцированием и интегрированием (1) по a решается вопрос о наилучшем приближении функций, для которых точка $a>1$ является полюсом любого порядка или логарифмической особой точкой.

При исследовании функции, особенность $a>1$ которой является критической типа $(a-x)^s$, где s—дробное число, С. Н. Бернштейн отказывается от метода дифференцирования и интегрирования и прибегает к особому приему интерполяционного построения многочлена $P_n(x)$, являющегося многочленом наилучшего асимптотического приближения для функции $(a-x)^s$. Между тем, с помощью интегрирования дробного порядка оказывается возможным использовать и для функции $(a-x)^s$ по существу ту же идею, которая приводит к цели в случаях полюса или логарифмической особой точки. Таким путем достигается единство метода.

Кроме того, использование интегрирования дробного порядка позволяет получить асимптотическое значение

$$E_{n,\,t(x)}[(a-x)^s]$$

взвешенного наилучшего приближения $(a-x)^s$ при непрерывном весе $t(x) > 0$ на отрезке $[-1, 1]$.

Интеграл дробного порядка α от функции $f(x)$ понимается в смысле Римана и Лиувилля, как функция

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,$$

где $\Gamma(\alpha)$—гамма-функция Эйлера.

2. Продифференцируем h раз по a равенство (1), затем заменим a на t и, умножив обе его части на $(t-a)^\lambda$, где $-1 < \lambda$, проинтегрируем по t от $t=a$ до $t=b > a$. Имея в виду, что при дифференцировании $(a+\sqrt{a^2-1})^{-n}$ выделяется главный член (при $n \to \infty$), равный

$$\left(\frac{-n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h \left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n,$$

получаем асимптотическое равенство

$$\int_a^b \frac{h!\,(t-a)^\lambda dt}{(x-t)^{h+1}} - Q_n(x) \sim (-n)^h \int_a^b \frac{(t-a)^\lambda \cos(n\theta+\delta)\, dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}} R^n(t)}, \qquad (2)$$

где $Q_n(x)$—многочлен степени $\leqslant n$.

При интегрировании по частям интеграл правой части распадается на сумму

$$\cos(n\theta+\delta) \int_a^b \frac{(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}} R^n(t)} + \int_a^b \frac{d}{dt}\cos(n\theta+\delta)\, dt \int_t^b \frac{(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}} R^n(t)} \cdots,$$

в которой только первое слагаемое играет существенную роль. Действительно, воспользовавшись одной общей формулой С. Н. Бернштейна [см. ([1]), стр. 92], находим, что

$$\int_a^b \frac{(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}} R^n(t)} \sim \frac{\Gamma(1+\lambda)}{n^{1+\lambda} (a^2-1)^{\frac{h+1-\lambda}{2}} R^n(a)}$$

и

$$\left| \int_a^b \frac{d}{dt}\cos(n\theta+\delta)\, dt \int_t^b \frac{(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}} R^n(a)} \right| < M \int_a^b dt \int_t^b \frac{(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}} R^n(a)} \sim$$

$$\sim \frac{M\Gamma(1+\lambda)}{n^{2+\lambda} (a^2-1)^{\frac{h-\lambda}{2}} R^n(a)}, \qquad (3)$$

где $M = \max\left|\frac{d}{dt}\cos(n\theta+\delta)\right|$ при $a \leqslant t \leqslant b$. Отсюда заключаем, что $Q_n(x)$

является многочленом наилучшего асимптотического приближения на отрезке $[-1, 1]$ для функции

$$\int_a^b \frac{h!\,(t-a)^\lambda dt}{(x-t)^{h+1}},$$

которая отличается от

$$\frac{\pi\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-h+1)(a-x)^{\lambda-h}}{\sin\lambda\pi}$$

только на функцию, регулярную как внутри, так и на границе эллипса сходимости C, определяемого точкой a. Это следует из тождества

$$(-1)^h h! \int_a^b \frac{(t-a)^\lambda dt}{(t-x)^{h+1}} + \frac{\pi\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-h+1)(a-x)^{\lambda-h}}{\sin\lambda\pi} = \frac{h!}{2i}\int_C \frac{(a-z)^\lambda}{(x-z)^{h+1}}\,dz,$$

где C — контур, начинающийся и заканчивающийся в точке $z=b$ и охватывающий отрезок вещественной оси от $z=x$ до $z=b$.

Итак, равенство (2) приводит к соотношению

$$E_n[(a-x)^{\lambda-h}] \sim \frac{n^{h-\lambda-1}\Gamma(\lambda-h+1)\,|\sin\lambda\pi|}{\pi(a^2-1)^{\frac{1-h-\lambda}{2}} R^n(a)},$$

которое при $\lambda-h=s$ принимает вид формулы С. Н. Бернштейна

$$E_n[(a-x)^s] \sim \frac{|\sin\pi\lambda|\,\Gamma(1+s)\,(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}}{n^{1+s}\pi R^n(a)}, \tag{4}$$

где s — любое действительное число.

3. Переходя к вычислению асимптотического значения взвешенного наилучшего приближения $E_{n,\,t(x)}[(a-x)^s]$ при непрерывном положительном весе $t(x)$, рассмотрим тождество [(2), стр. 116]

$$\sqrt{t_0(x)}\,\frac{S_{n+1}(x)}{S_{n+1}(a)}\cdot\frac{1}{x-a} = \left[\frac{1}{x-a} - \frac{P_n(x)}{S_{n+1}(a)}\right]\sqrt{t_0(x)},$$

которое играет ту же роль, что и равенство (1) для простого приближения. Как и там, при дифференцировании левой части по a h раз выделяется только один главный член, существенный для вычисления $E_{n,\sqrt{t_0(x)}}[(a-x)^s]$. Заменив после дифференцирования a на t, умножив обе части на $(t-a)^\lambda$ и интегрируя от $t=a$ до $t=b>a$, получим, считая $-1<\lambda$,

$$\sqrt{t_0(x)}\int_a^b \frac{d^h}{da^h}\left(\frac{1}{S_{n+1}(t)}\right)\frac{S_{n+1}(t)\,(t-a)^\lambda}{x-t}\,dt \sim$$

$$\sim \left[\int_a^b \frac{h!\,(t-a)^\lambda}{(x-t)^{h+1}}\,dt - Q_n(x)\right]\sqrt{t_0(x)}. \tag{5}$$

Для вычисления левой части этого асимптотического равенства примем,

что $t_0(x)$ является положительным многочленом. Тогда имеет место соотношение *

$$\frac{d^h}{da^h}\left(\frac{1}{S_{n+1}(t)}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(-n)^h}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}}\,R^n(t)}\,e^{T(t)},$$

где

$$T(t)=\frac{\sqrt{t^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(t-z)\sqrt{1-z^2}},$$

из которого находим

$$\int_a^b \frac{d^h}{da^h}\left(\frac{1}{S_{n+1}(t)}\right)\frac{S_{n+1}(x)\,(t-a)^\lambda}{x-t}\,dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(-n)^h\int_a^b \frac{e^{T(t)}S_{n+1}(x)\,(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}}\,(x-t)\,R^n(t)}.$$

При интегрировании по частям последнего интеграла получим сумму

$$\frac{S_{n+1}(x)}{x-a}\int_a^b \frac{e^{T(t)}(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}}\,R^n(t)}+\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{S_{n+1}(x)}{x-t}\right)dt\int_t^b \frac{e^{T(t)}(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}}\,R^n(t)},$$

в которой второе слагаемое бесконечно мало сравнительно с первым. Доказательство этого утверждения вытекает из формул, аналогичных формулам (3):

$$\int_a^b \frac{e^{T(t)}(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}}\,R^n(t)} \sim \frac{\Gamma(1+\lambda)\,e^{T(a)}\,(a^2-1)^{\frac{\lambda-h-1}{2}}}{n^{1+}\,R^n(a)}$$

и

$$\left|\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{S_{n+1}(x)}{x-t}\right)dt\int_t^b \frac{e^{T(t)}(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}}\,R^n(t)}\right| < M\int_a^b dt\int_t^b \frac{e^{T(t)}(t-a)^\lambda dt}{(t^2-1)^{\frac{h+2}{2}}\,R^n(t)} \sim$$

$$\sim \frac{M\Gamma(1+\lambda)\,e^{T(a)}\,(a^2-1)^{\frac{\lambda}{2}h}}{n^{2+\lambda}R^n(a)}.$$

где $M=\max\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{S_{n+1}(x)}{x-t}\right)\right|$ при $a\leqslant t\leqslant b$.

* Это асимптотическое равенство хотя явно и не содержится в [3], однако непосредственно следует из рассматриваемых там соотношений.

Принимая во внимание, что [(2), стр. 115]

$$\frac{S_{n+1}(x)}{x-a} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t_0(x)}} \cos(n\theta + \psi + \delta),$$

преобразуем (5) к виду

$$\frac{(-1)^l \Gamma(1+\lambda) e^{T(a)} (a^2-1)^{\frac{\lambda-h-1}{2}}}{n^{\lambda-h+1} R^n(a)} \cos(n\theta + \psi + \delta) \sim$$

$$\sim \left[\int_a^b \frac{h!\,(t-a)^\lambda dt}{(x-t)^{h+1}} - Q_n(t) \right] \sqrt{t_0(x)},$$

определяющему асимптотическое значение взвешенного наилучшего приближения функции

$$\int_a^b \frac{h!\,(t-a)^\lambda dt}{(x-t)^{h+1}}.$$

Чтобы перейти к функции $(a-x)^{\lambda-h}$, достаточно отметить двойное неравенство

$$l \cdot E_n[f(x)] < E_{n,\,t(x)}[f(x)] < L \cdot E_n[f(x)],$$

имеющее место при условии $l < t(x) < L$, откуда следует, что

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{E_n[f(x)]} = \overline{\lim} \sqrt[n]{E_{n,\,t(x)}[f(x)]} \quad (l > 0).$$

Поэтому, как и в случае простого приближения, для асимптотического значения взвешенного наилучшего приближения играют роль только те особые точки функции $f(x)$, которые лежат на эллипсе сходимости C этой функции. Вспоминая сказанное выше об особых точках функции

$$\int_a^b \frac{h!\,(t-a)^\lambda dt}{(x-t)^{h+1}} \quad \text{и} \quad (a-x)^{\lambda-h},$$

находим окончательный результат:

$$E_{n,\sqrt{t_0(x)}}[(a-x)^s] \sim \frac{\Gamma(1+s)(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}} |\sin \pi s|\, e^{T(a)}}{n^{1+s} \cdot R^n(a) \cdot \pi} \qquad (\lambda - h = s).$$

Таким образом, каковы бы ни были положительный многочлен $t_0(x)$ и вещественное число s, справедлива, вследствие (4), асимптотическая формула

$$E_{n,\sqrt{t_0(x)}}[(a-x)^s] \sim E_n[(a-x)^s]\, e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln t_0(z)\, dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}},$$

доказанная С. Н. Бернштейном для случая целых s. Предположение, что $t_0(x)$ является многочленом, не существенно для этой формулы.

Из теоремы Вейерштрасса о приближении произвольной непрерывной функции $t(x)$ многочленами заключаем, что формула остается в силе при любом непрерывном положительном весе $t(x)$.

Поступило
14. III. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, М. - Л., 1937.
[2] Бернштейн С. Н., О многочленах, ортогональных в конечном интервале, Харьков, 1937.

N. SAPOGOV. MEILLEURE APPROXIMATION D'UNE FONCTION AYANT UNE SINGULARITÉ CRITIQUE RÉELLE SUR L'ELLIPSE DE CONVERGENCE

RÉSUMÉ

Le présent article contient la démonstration, que

$$E_{n,\sqrt{t(x)}}[(a-x)^s] \sim E_n[(a-x)^s]\, e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln t(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}},$$

quelque soit le nombre réel s et la fonction continue $t(x) > 0$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 10 (1946), 469–486 Série mathématique

В. Б. ГУРЕВИЧ

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ СОВПАДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПОЛИНОМОМ СТЕПЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе даются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система из $2n+2$ точек интервала $(0,2\pi)$, чтобы тригонометрические полиномы порядка n, осуществляющие наилучшие равномерные и степенные приближения (степени $p \geqslant 1$) функции периода 2π, на этой системе точек тождественно совпадали.

Ввиду сложности нахождения полинома наилучшего приближения представляют интерес случаи, когда этот полином совпадает с полиномом квадратического и других степенных приближений, получаемых значительно проще.

§ 1. Приближения тригонометрическими полиномами порядка не больше n в системе $2n+2$ точек

Пусть на отрезке $[0,2\pi]$ задана система m чисел $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < 2\pi$ и даны значения $f(x_k)$ некоторой функции при этих аргументах.

Полином

$$S_n^*(x) = a_0^* + \sum_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda^* \cos \lambda x + b_\lambda^* \sin \lambda x) \tag{1*}$$

назовем полиномом степенного приближения степени l в системе m точек $[x_k, f(x_k)]$, если из всех тригонометрических полиномов

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) \tag{1}$$

порядка $n < \frac{m-1}{2}$ полином (1*) обращает в минимум сумму

$$\sum_{k=0}^{m-1} | f(x_k) - S_n(x_k) |^l. \tag{2}$$

Как известно, такой полином при всяком $l \geqslant 1$ существует и при $l > 1$ единствен. При $l = 2$ мы говорим о полиноме квадратического приближения.

Точно так же всегда существует и единственен полином наилучшего приближения (1*) порядка $\leqslant n$ в системе $m > 2n+1$ точек, обращающий в минимум $\max|f(x_k)-S_n(x_k)|$, где $k=0, 1, \ldots, m-1$ (этот минимум называется «наилучшим приближением»).

ТЕОРЕМА 1. *Тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ квадратического приближения в системе $2n+2$ равноотстоящих точек есть одновременно полином наилучшего приближения.*

Нетрудно видеть, что тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, осуществляющий квадратическое приближение в системе $m > 2n+1$ равноотстоящих точек $[x_k, f(x_k)]$, выражается формулой

$$S_n(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x_k - x)}{\sin\frac{1}{2}(x_k - x)} f(x_k), \tag{3}$$

где

$$x_k = x_0 + \frac{2\pi}{m}k, \quad k=0, 1, \ldots, m-1, \quad 0 \leqslant x_0 < x_k < 2\pi.$$

При $m = 2n+2$ имеем

$$S_n(x_i) = \frac{1}{2n+2}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{2n+1} \frac{\sin\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\pi(k-i)}{\sin\frac{1}{2}\frac{\pi}{n+1}(k-i)} f(x_k) + \frac{2n+1}{2n+2} f(x_i) =$$

$$= \frac{1}{2n+2}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{2n+1} (-1)^{k-i+1} f(x_k) + \frac{2n+1}{2n+2} f(x_i);$$

$$\rho_i = S_n(x_i) - f(x_i) = \frac{\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{2n+1} (-1)^{k-i+1} f(x_k) - f(x_i)}{2n+2} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k-i+1} f(x_k)}{2n+2},$$

$$\rho_i = (-1)^i \rho_0 \quad (i = 0, 1, \ldots, 2n+1). \tag{4}$$

Формула (4), в силу основной теоремы Чебышева, показывает, что $S_n(x)$ есть полином наилучшего приближения.

Установим условия совпадения тригонометрического полинома наилучшего приближения порядка $\leqslant n$ в системе $2n+2$ точек с полиномами степенных приближений степеней $l \geqslant 1$.

Для полинома наилучшего приближения порядка $\leqslant n$ в системе $2n+2$ точек возможны только два следующих случая:

1. Наилучшее приближение ρ равно нулю (следовательно, полином является интерполяционным). В этом случае полином наилучшего приближения, очевидно, всегда совпадает с полиномами степенных приближений любой степени $l \geqslant 1$ (случай тривиальный).

2. Наилучшее приближение ρ не равно нулю. В этом случае имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы полином наилучшего приближения порядка $\leqslant n$ в системе $2n+2$ точек $\{x_k, f(x_k)\}$ осуществлял одновременно и степенные приближения любой степени $l \geqslant 1$, необходимо и достаточно выполнение равенств:*

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cos \lambda x_k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \sin \lambda x_k = 0 \tag{5}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$0 \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1} < 2\pi, \tag{6}$$

если только наилучшее приближение не равно нулю.

Докажем сначала теорему для $l > 1$.

Необходимость условия. Пусть (1) есть полином наилучшего приближения в системе заданных точек с абсциссами (6), обращающий сумму (2) в минимум при некотором значении $l > 1$.

Обозначив

$$f(x_k) - S_n(x_k) = \rho_k,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^l = \min,$$

$$\rho_k = (-1)^k \varepsilon\rho \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^l = -l \sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign} \rho_k = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda} \sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^l = -l \sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign} \rho_k \cos \lambda x_k = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_\lambda} \sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^l = -l \sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign} \rho_k \sin \lambda x_k = 0. \tag{10}$$

Приняв во внимание, что $\operatorname{sign} \rho_k = \varepsilon(-1)^k$; $|\rho_k| = \rho$, (условие (7)), получим (5) и равенство $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k = 0$, которое всегда выполняется и может быть опущено.

Замечание. Докажем, что если полином (1) наилучшего приближения порядка $\leqslant n$ удовлетворяет уравнениям (8), (9) и (10), то никакой другой полином $S_n^*(x)$ порядка $\leqslant n$ не удовлетворяет этим уравнениям.

В самом деле, систему (8), (9), (10) можно рассматривать, как однородную систему $2n+1$ уравнений с $2n+2$ неизвестными $|\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign} \rho_k$. Все определители порядка $2n+1$, составленные из матрицы коэффициентов, являются определителями типа Вандермонда и не равны нулю, поэтому все решения системы пропорциональны некоторым числам.

Пусть

$$\rho_k = f(x_k) - S_n(x_k) = (-1)^k \varepsilon \rho$$

удовлетворяют уравнениям (8), (9), (10). Предположим, что полином $S_n^*(x)$ удовлетворяет тем же уравнениям и обозначим

$$f(x_k) - S_n^*(x_k) = \rho_k^*.$$

Тогда $|\rho_k^*|^{l-1} \operatorname{sign} \rho_k^*$ пропорциональны $|\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign} \rho_k$, следовательно, отклонения ρ_k^* равны по модулю и чередуются по знаку, а это означает, что $S_n^*(x)$ есть также полином наилучшего приближения, что невозможно.

Достаточность условия. Пусть выполняются условия (5), (6), и (1) есть полином наилучшего приближения; следовательно,

$$\rho_k = -(1)^k \varepsilon \rho \neq 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Если в уравнения (8), (9), (10) вставить эти значения ρ_k, то они будут удовлетворяться в силу (5). А так как $S_n(x)$—единственный тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, удовлетворяющий этим уравнениям (см. замечание к теореме 2), и степенное приближение степени $l > 1$ всегда существует и единственно, то $S_n(x)$ осуществляет степенное приближение степени l, где l—любое число, большее 1.

Рассмотрим теперь случай $l = 1$. Доказательство необходимости условий (5), данное для случая $l > 1$, остается в силе и для $l = 1$. В самом деле, пусть полином порядка $\leqslant n$ степенного приближения степени $l = 1$ в системе $2n+2$ точек совпал с полиномом наилучшего приближения. Так как по условию наилучшее приближение не равно нулю, то ни одно из отклонений не равно нулю. Поэтому дифференцирование, примененное для получения уравнений (8), (9), (10), законно и в рассматриваемом случае; уравнения (8), (9), (10) имеют место, и все доказательство остается в силе.

Докажем достаточность условий (5). Пусть выполнены условия (5) и (6), и $S^n(x)$ (1)—какой угодно тригонометрический полином порядка $\leqslant n$.

Обозначим через $\bar{S}_n(x)$ тригонометрический полином наилучшего приближения порядка $\leqslant n$ в системе данных точек. Имеем

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |f(x_k) - S_n(x_k)| \geqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \varepsilon \{f(x_k) - S_n(x_k)\} (-1)^k \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (10a)$$

В силу условий (5)

$$\sum_{k=0}^{2n+1} S_n(x_k)(-1)^k = 0,$$

каков бы ни был тригонометрический полином $S_n(x)$ порядка $\leqslant n$. Можно поэтому в правой части неравенства (10а) на место $S_n(x_k)$ поставить $\overline{S}_n(x_k)$. Получим

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |f(x_k) - S_n(x_k)| \geqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \varepsilon \{f(x_k) - \overline{S}_n(x_k)\}(-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} |f(x_k) - S_n(x_k)|.$$

Так как $S_n(x)$ — какой угодно тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, то последнее неравенство показывает, что полином наилучшего приближения $\overline{S}_n(x)$ есть одновременно и полином степенного приближения степени $l = 1$.

Условия (5) налагаются, как мы видим, только на абсциссы данных точек.

Следствие 1. *В системе равноотстоящих $2n+2$ точек тригонометрический полином $S_n(x)$ порядка $\leqslant n$ наилучшего приближения и полиномы степенных приближений любой степени $l \geqslant 1$ совпадают.*

В самом деле, числа $x_k = x_0 + k\frac{2\pi}{2n+2}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n+1)$ удовлетворяют уравнениям (5). Теорема 1 есть частный случай этого следствия.

Следствие 2. *Если тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ наилучшего приближения в системе $2n+2$ точек совпадает с полиномом степенного приближения какой-либо степени $l_0 \geqslant 1$, то он совпадает и с полиномами степенных приближений любой другой степени $l \geqslant 1$.*

В самом деле, если наилучшее приближение не равно нулю, то из хода доказательства необходимости условий (5) теоремы 2 видно, что из совпадения полинома наилучшего приближения с полиномом степенного приближения степени $l_0 \geqslant 1$ следует выполнение условий (5). А из достаточности условий (5) следует совпадение полинома наилучшего приближения с полиномами степенных приближений любой степени $l \geqslant 1$.

Если же наилучшее приближение равно нулю, то доказываемое свойство тривиально.

§ 2. Решение системы уравнений (5)

Поставим теперь существенную для разбираемого вопроса задачу о нахождении всех решений системы уравнений (5).

ЛЕММА. *Система уравнений*

$$z_0^\lambda + z_1^\lambda + \ldots + z_n^\lambda = u_0^\lambda + u_1^\lambda + \ldots u_n^\lambda \qquad (11)$$

$$(|z_k| = |u_k| = 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет решения:

1) *либо системы чисел* z_k *и* u_k *тождественны, т. е., если числа* z *уже перенумерованы, то числа и можно перенумеровать так, что* $u_0 = z_0$, $u_1 = z_1$, ..., $u_n = z_n$. *Назовем это решение «тривиальным»;*

2) *либо*

$$z_k = \cos\left(\varphi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(\varphi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right),$$

$$u_k = \cos\left(\psi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(\psi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right),$$

где φ_0 *и* ψ_0 — *произвольные вещественные числа.*

Доказательство. Введем следующие обозначения для симметрических функций чисел z_k и u_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum z_0 = p_1, \\ &z_0z_1 + z_0z_2 + \ldots + z_{n-1}z_n = \sum z_0z_1 = p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &z_0z_1\ldots z_n = p_{n+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum u_0 = q_1, \\ &\sum u_0u_1 = q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &u_0u_1\ldots u_n = q_{n+1}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\sum_{k=0}^{n} z_k^\lambda = s_\lambda, \qquad (14)$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^\lambda = \sigma_\lambda. \qquad (15)$$

Данные уравнения можно записать в виде

$$s_\lambda = \sigma_\lambda, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \qquad (16)$$

По свойствам симметрических функций отсюда следует

$$p_\lambda = q_\lambda. \qquad (17)$$

Уравнение

$$\Phi(z) = z^{n+1} - p_1z^n + p_2z^{n-1} - \ldots + (-1)^n p_nz + (-1)_n{}^{+1}p_{n+1} = 0 \qquad (18)$$

имеет корни

$$z_0, z_1, \ldots, z_n. \qquad (19)$$

Уравнение

$$\Psi(u) = u^{n+1} - p_1 u^n + p_2 u^{n-1} - \ldots + (-1)^n p_n u + (-1)^{n+1} q_{n+1} = 0 \qquad (20)$$

имеет корни

$$u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n. \qquad (21)$$

Составим

$$p_\lambda = \sum z_0 z_1 \ldots z_{\lambda-1}$$

и найдем сопряженное комплексное число $\overline{p}_\lambda$:

$$\overline{p}_\lambda = \sum \overline{z}_0 \overline{z}_1 \ldots \overline{z}_{\lambda-1} = \sum \frac{1}{z_0 z_1 \ldots z_{\lambda-1}} = \frac{\sum z_\lambda z_{\lambda+1} \ldots z_n}{z_0 z_1 \ldots z_n} = \frac{p_{n+1-\lambda}}{p_{n+1}}. \qquad (22)$$

По заданию p_{n+1} не равно нулю, так как $|z_k| = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Таким образом,

$$p_{n+1} \overline{p}_\lambda = p_{n+1-\lambda}. \qquad (23)$$

Первый случай. Хотя бы одно из чисел p_λ не равно 0. Тогда $\overline{p}_\lambda \neq 0$, $p_{n+1-\lambda} \neq 0$ и p_{n+1} найдется из уравнения (23). В этом случае p_{n+1} зависит от предыдущих коэффициентов, а так как у функции $\Psi(u)$ те же коэффициенты, $-p_1, p_2, \ldots, (-1)^n p_n$, что у функции $\Phi(z)$, то

$$p_{n+1} = q_{n+1} \qquad (24)$$

и система чисел $z_0, z_1, \ldots, z_n$ тождественна с системой чисел $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

Второй случай. $p_\lambda = 0$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, по свойствам симметрических функций, и все $s_\lambda = 0$, а следовательно, $\sigma_\lambda = 0$ [см. (16)]:

$$\left.\begin{aligned} z_0^\lambda + z_1^\lambda + \ldots + z_n^\lambda = 0, \\ u_0^\lambda + u_1^\lambda + \ldots + u_n^\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Уравнения $\Phi(z) = 0$, $\Psi(u) = 0$ примут вид

$$z^{n+1} + (-1)^{n+1} p_{n+1} = 0, \qquad (26)$$

$$u^{n+1} + (-1)^{n+1} q_{n+1} = 0, \qquad (27)$$

где p_{n+1} и q_{n+1} — произвольные числа.

$$z_k = \sqrt[n+1]{(-1)^n p_{n+1}} = \cos\left(\varphi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right) + i \sin\left(\varphi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right), \qquad (28)$$

$$u_k = \sqrt[n+1]{(-1)^n q_{n+1}} = \cos(\psi_0 + k)\frac{2\pi}{n+1}\Big) + i \sin\left(\psi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right), \qquad (29)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

где φ_0 и ψ_0 — произвольные вещественные числа.

ТЕОРЕМА 3. *Система уравнений* (5) *имеет решения*:

1) *либо система чисел x_{2p} с четными номерами тождественна с системой чисел x_{2p+1} с нечетными номерами (тривиальное решение),*

2) *либо*

$$x_{2p} = x_0 + p\frac{2\pi}{n+1}, \qquad x_{2p+1} = x_1 + p\frac{2\pi}{n+1} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n), \qquad (30)$$

где x_0 и x_1 — произвольные вещественные числа.

Доказательство. Из (5) следует

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\cos(\lambda x_k+i\sin\lambda x_k)=0,\quad \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k e^{x_k\lambda i}=0. \tag{31}$$

Обозначим

$$e^{x_{2p}i}=z_p,\quad e^{x_{2p+1}i}=u_p.$$

Тогда

$$\sum_{p=0}^{n} z_p^\lambda=\sum_{p=0}^{n} u_p^\lambda. \tag{32}$$

По лемме:

1) либо система чисел z_p тождественна с системой чисел u_p, следовательно, система чисел x_{2p} тождественна с системой чисел x_{2p+1};

2) либо решения даются формулами (30).

ТЕОРЕМА 4. *Система уравнений*

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\cos\lambda x_k=0,\quad \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\sin\lambda x_k=0,\quad \lambda=1,2,\ldots,n$$

имеет те же решения, что система

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\cos\lambda x_k=0,\quad \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\sin\lambda x_k=0,\\ \lambda=\begin{cases}1,2,\ldots,\frac{n}{2} & \text{при } n \text{ четном},\\ 1,2,\ldots,\frac{n+1}{2} & \text{при } n \text{ нечетном},\end{cases}\end{array}\right\} \tag{33}$$

если решения нетривиальны.

Из равенства (23) следует, что если $p_\lambda=0$, то и $p_{n+1-\lambda}=0$, так как $p_{n+1}\neq 0$. Следовательно, при n четном из равенства нулю чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{\frac{n}{2}}$ следует равенство нулю остальных чисел $p_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, p_n$.

Далее, если $s_1=s_2=\ldots=s_{\frac{n}{2}}=0$, то и $p_1=p_2=\ldots=p_{\frac{n}{2}}=0$, откуда $p_{\frac{n}{2}+1}=\ldots=p_n=0$ и $s_{\frac{n}{2}+1}=\ldots=s_n=0$. Таким образом, система уравнений $s_\lambda=0$ $(\lambda=1,2,\ldots,n)$ в случае n четного, равносильна системе уравнений $s_\lambda=0$ $\left(\lambda=1,2,\ldots,\frac{n}{2}\right)$. Отсюда следует доказываемая теорема (см. доказательство теоремы 3). Так же доказывается теорема для нечетного n.

Следствие. В формулировке теоремы 2 можно в необходимом и достаточном условии (5) уменьшить число уравнений, беря $\lambda=1,2,\ldots$

$\ldots, \frac{n}{2}$ (при n четном) и $\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}$ (при n нечетном), так как по заданию система тривиального решения не имеет.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 и 3 видно, что система

$$\sum_{k=0}^{n} \cos \lambda x_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin \lambda x_k = 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n \tag{34}$$

имеет единственное решение $x_k = x_0 + k\frac{2\pi}{n+1}$, где x_0 — произвольное число, а $k = 0, 1, \ldots, n$.

Из этих уравнений при x четном можно сохранить первые $\frac{n}{2}$ уравнений, а остальные отбросить (как следствия первых уравнений), а при n нечетном — сохранить первые $\frac{n+1}{2}$ уравнений (см. доказательство теоремы 4).

§ 3. Расположение точек при совпадении тригонометрического полинома наилучшего приближения в системе $2n+2$ точек с полиномами степенных приближений

ТЕОРЕМА 5. *Тригонометрический полином наилучшего приближения порядка $\leqslant n$ в системе $2n+2$ точек $[x_k, f(x_k)]$ (если только он не является интерполяционным), совпадает с тригонометрическими полиномами степенных приближений любой степени $l \geqslant 1$ только при условии, что абсциссы данных точек составляются по формулам* (30). *Это условие является необходимым и достаточным.*

Теорема 5 следует из теорем 2 и 3, так как данные $2n+2$ точек должны быть различными; x_0 и x_1 — произвольные числа; не нарушая общности, можно положить $0 \leqslant x_0 < x_1 < \frac{\pi}{n+1}$.

Таким образом, для совпадения тригонометрических полиномов, порядка $\leqslant n$, наилучшего и степенных приближений степеней $l \geqslant 1$ в системе $2n+2$ точек (если полином не интерполяционный) необходимо и достаточно, чтобы отклонения значений полинома от значений функции в заданных точках представляли собой периодическую функцию с периодом $\frac{2\pi}{n+1}$.

§ 4. Совпадение двух степенных приближений тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant n$ в системе $2n+2$ точек

В теореме 2 (следствие 2) рассмотрен случай совпадения полинома наилучшего приближения с полиномом степенного приближения какой-либо степени $l_0 \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь случай совпадения двух степенных приближений.

ТЕОРЕМА 6. *Если тригонометрический полином* (1) *порядка $\leqslant n$ в системе $2n+2$ точек осуществляет степенные приближения одновременно двух различных степеней l_1 и l_2, где $1 \leqslant l_1 < l_2$, то этот же полином осуществляет наилучшее приближение и степенные приближения любой другой степени $l \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть полином (1) порядка $\leqslant n$ осуществляет в системе $2n+2$ точек степенные приближения одновременно двух различных степеней l_1 и l_2.

1. Положим сперва $1 < l_1 < l_2$. Тогда, сохраняя обозначения теоремы 2 и дифференцируя по a_0, a_λ, b_λ, получим систему уравнений (8), (9), (10) для показателя l_1 и такую же — для показателя l_2.

Рассмотрим уравнения (8), (9), (10), как системы уравнений относительно неизвестных $|\rho_k|^{l_1-1}$ и $|\rho_k|^{l_2-1}$.

Как было показано в замечании к теореме 2, каждая из систем имеет решения, пропорциональные некоторым числам. Коэффициенты обеих систем одинаковы, следовательно

$$\frac{|\rho_0|^{l_1-1}}{|\rho_0|^{l_2-1}} = \frac{|\rho_1|^{l_1-1}}{|\rho_1|^{l_2-1}} = \cdots = \frac{|\rho_{2n+1}|^{l_1-1}}{|\rho_{2n+1}|^{l_2-1}}, \tag{35}$$

$$|\rho_1|^{l_1-l_2} = |\rho_2|^{l_1-l_2} = \cdots = |\rho_{2n+1}|^{l_1-l_2}, \quad |\rho_1| = |\rho_2| = \cdots = |\rho_{2n+1}|. \tag{36}$$

Из системы (8), (9), (10) с показателем l_1 или l_2 получим:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \operatorname{sign} \rho_k = 0, \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \operatorname{sign} \rho_k \cos \lambda x_k = 0, \tag{38}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \operatorname{sign} \rho_k \sin \lambda x_k = 0. \tag{39}$$

Уравнение (37) показывает, что положительных отклонений столько же, сколько отрицательных. Переставим слагаемые в уравнениях (38) и (39) так, чтобы знаки слагаемых чередовались и аргументы у слагаемых со знаком плюс возрастали, а также чтобы возрастали аргументы у слагаемых со знаком минус. Получим уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cos \lambda x'_k = 0, \tag{40}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \sin \lambda x'_k = 0. \tag{41}$$

Ввиду единственности решений систем (40), (41) (§ 2), найдем

$$x'_{2p} = x'_0 + p\frac{2\pi}{n+1}, \quad x'_{2p+1} = x'_1 + p\frac{2\pi}{n+1} \tag{42}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, n).$$

Система уравнений (38), (39) отличается от (40), (41) только порядком слагаемых и имеет те же решения. На основании теоремы 4 отсюда сле-

дует, что (1) осуществляет наилучшее приближение и степенные приближения любой степени $l \geqslant 1$.

2. Пусть теперь $1 = l_1 < l_2$. Определители порядка $2n+1$, составленные из матрицы коэффициентов системы уравнений (8), (9), (10) с неизвестными $|\rho_k|^{l_2-1}$, как определители Вандермонда, не равны нулю. Следовательно, либо ни одно из отклонений ρ_k не равно нулю и тогда имеют место уравнения (8), (9), (10) для $l_1 = 1$, которые обращаются в (37), (38), (39) и дальнейшее доказательство остается то же, что в случае $1 < l_1 < l_2$, либо все отклонения равны нулю и выполнение теоремы тривиально.

Теорема, конечно, тривиально верна и для интерполяционного полинома.

Следствие. Рассматривая полином наилучшего приближения, как предельный случая степенного приближения (степени $l = \infty$), и объединяя следствие 2 теоремы 2 с теоремой 6, получим следующую теорему:

Если тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ *в системе* $2n+2$ *точек есть полином степенного приближения одновременно двух различных степеней* l_1 *и* l_2 $(1 \leqslant l_1 \leqslant \infty;\ 1 \leqslant l_2 \leqslant \infty)$, *то этот же полином осуществляет и степенные приближения любой другой степени* $(1 \leqslant l \leqslant \infty)$.

§ 5. Приближение на отрезке

Обратив внимание на периодичность отклонений аппроксимирующего тригонометрического полинома порядка $\leqslant n$ от заданных значений функции в системе $2n+2$ точек в случае совпадения полиномов различных приближений, установим следующие достаточные признаки совпадения полиномов различных приближений на отрезке.

ТЕОРЕМА 7. *Если* $f(x)$ — *непрерывная функция на отрезке* $[0, 2\pi]$ *и*

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x$$

— *некоторый тригонометрический полином порядка* $\leqslant n$, *причем*

$$f\left(x + m\frac{\pi}{n+1}\right) - S_n\left(x + m\frac{\pi}{n+1}\right) = -(1)^m [f(x) - S_n(x)], \qquad (43)$$

где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, *то* $S_n(x)$ — *полином наилучшего приближения для* $f(x)$ *на отрезке* $[0, 2\pi]$ *и совпадает с полиномами степенных приближений любой степени* $l \geqslant 1$.

Условие (43) содержит периодичность отклонений с периодом $\frac{2\pi}{n+1}$ и перемену знаку всех отклонений на полупериодах.

Доказательство. Обозначим

$$f(x) - S_n(x) = \rho_n(x).$$

Не нарушая общности, можно положить $\rho_n(0) = 0$.

По заданию, непрерывная функция $\rho_n(x)$ обладает свойством

$$\rho_n\left(x+m\frac{\pi}{n+1}\right)=(-1)^m\rho_n(x).$$

На каждом периоде $\frac{2\pi}{n+1}$ функция $\rho_n(x)$ меняет знак и достигает модуль-максимума с противоположными знаками не менее чем в двух точках, а на всем отрезке $[0, 2\pi]$ достигает модуль-максимума с чередующимися знаками не менее чем в $2n+2$ точках. Следовательно, $S_n(x)$ есть полином наилучшего приближения для $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Полагая $\rho_n(0)=0$ и принимая во внимание непрерывность $\rho_n(x)$, найдем

$$\rho_n\left(m\frac{\pi}{n+1}\right)=0, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1.$$

Покажем, что $S_n(x)$ осуществляет степенное приближение функции $f(x)$ при любой степени $l\geqslant 1$.

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\int_0^{2\pi}|\rho_n(x)|^l\,dx=-l(n+1)\int_0^{\frac{2\pi}{n+1}}|\rho_n(x)|^{l-1}\operatorname{sign}\rho_n(x)\,dx=$$

$$=-l(n+1)\left[\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}|\rho_n(x)|^{l-1}\,dx-\varepsilon\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n+1}}|\rho_n(x)|^{l-1}\,dx=0\qquad \varepsilon=\pm 1;\right. \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\int_0^{2\pi}|\rho_n(d)|^l\,dx=-l\int_0^{2\pi}|\rho_n(x)|^{l-1}\operatorname{sign}\rho_n(x)\cos\lambda x\,dx=$$

$$=-l\left(\int_0^{\frac{2\pi}{n+1}}+\int_{\frac{2\pi}{n+1}}^{2\cdot\frac{2\pi}{n+1}}+\cdots+\int_{n\cdot\frac{2\pi}{n+1}}^{2\pi}\right)=-l\int_0^{\frac{2\pi}{n+1}}\left[|\rho_n(x)|^{l-1}\operatorname{sign}\rho_n(x)\cos\lambda x+\right.$$

$$+\left|\rho_n\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right)\right|^{l-1}\operatorname{sign}\rho_n\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right)\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right)+\cdots$$

$$\left.\cdots+\left|\rho_n\left(x+n\frac{2\pi}{n+1}\right)\right|^{l-1}\operatorname{sign}\rho_n\left(x+n\frac{2\pi}{n+1}\right)\cos\lambda\left(x+n\frac{2\pi}{n+1}\right)\right]dx=$$

$$=-l\int_0^{\frac{2\pi}{n+1}}|\rho_n(x)|^{l-1}\operatorname{sign}\rho_n(x)\left[\cos\lambda x+\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right)\right]+\cdots$$

$$\cdots+\cos\lambda\left(x+n\frac{2\pi}{n+1}\right)\Big]\,dx=0 \quad (45)$$

(теорема 4, замечание). Точно так же доказывается, что

$$\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\int_0 |\rho_n(x)|^l\,dx=0. \tag{46}$$

Из полученных равенств вытекает, что $S_n(x)$ есть полином степенного приближения любой степени $l>1$.

Пусть теперь $l=1$. Из (43) следует, что

$$q(x)=\operatorname{sign}\rho_n(x)=\operatorname{sign}[f(x)-S_n(x)]$$

есть функция ортогональная к любому тригонометрическому полиному n-го порядка. Поэтому, если $T_n(x)$—произвольный тригонометрический полином n-го порядка, то

$$\int_0^{2\pi}|f(x)-T_n(x)|\,dx\geqslant\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n(x)]\,q(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}[f(x)-S_n(x)]\,q(x)\,dx=\int_0^{2\pi}|f(x)-S_n(x)|\,dx,$$

откуда следует, что $S_n(x)$—полином степенного приближения степени $l=1$.

Заметим, что в силу теоремы 5 тот же полином $S_n(x)$ дает степенное приближение любой степени $l\geqslant1$, включая $l=\infty$, и в системе $2n+2$ точек максимального отклонения.

ТЕОРЕМА 8. *Если $f(x)$—непрерывная функция на отрезке $[0, 2\pi]$ и (1)—некоторый тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, причем*

$$f\left(x+m\frac{2\pi}{n+1}\right)-S_n\left(x+m\frac{2\pi}{n+1}\right)=f(x)-S_n(x)=\rho_n(x), \tag{47}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{n+1}-x\right)-S_n\left(\frac{2\pi}{n+1}-x\right)=-[f(x)-S_n(x)], \tag{48}$$

$$(m=\pm1,\pm2,\ldots)$$

где положено $\rho_n(0)=0$, то $S_n(x)$ есть полином наилучшего приближения для функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и совпадает с полиномами степенных приближений любой степени $l\geqslant1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

В качестве примера возьмем функцию

$$b_{n+1}\sin(n+1)x+b_{2(n+1)}\sin2(n+1)x.$$

Из всех тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$ нуль есть полином наилучшего приближения для этой функции, и этот же полином, равный нулю, осуществляет степенные приближения любой степени $l\geqslant1$, так как

$$\rho_n(x)=[b_{n+1}\sin(n+1)x+b_{2(n+1)}\sin2(n+1)x-0]$$

удовлетворяет признаку теоремы 8.

Рассмотрим еще функции С. Н. Бернштейна ([1])

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{n_i}\cos n_i x+b_{n_i}\sin n_i x),$$

где $\frac{n_{i+1}}{n_i}=2p_i+1$ (нечетному числу), $a_{n_i}\neq 0$, $b_{n_i}\neq 0$, или хотя бы $a_{n_i}\neq 0$, либо $b_{n_i}\neq 0$.

Сумма $S_k(x)$ любого числа k членов этого ряда есть полином наилучшего приближения для функции $f(x)$ и одновременно степенных приближений любой степени $l\geqslant 1$, так как для $\rho_k(x)=f(x)-S_k(x)$ осуществляется признак теоремы 7.

Поступило
8. IV. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., О периодических функциях, для которых наилучшим сходящимся рядом является ряд Фурье, Труды Ленинградского индустриального ин-та, № 10, 1936.

V. GOUREVITCH. SUR CERTAINS CAS DE COÏNCIDENCE DU POLYNÔME-MINIMUM TRIGONOMÉTRIQUE ET DES POLYNÔMES D'APPROXIMATION QUADRATIQUE ET D'AUTRES DEGRÉS

RÉSUMÉ

§ 1. Approximation par les polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n$ sur un ensemble de $2n+2$ points

Soient donnés m nombres

$$0\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_{m-1}<2\pi$$

dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ ainsi que les valeurs correspondantes $f(x_k)$ d'une certaine fonction. Nous appelerons le polynôme trigonométrique

$$S_n^*(x)=a_0^*+\sum_{\lambda=1}^{n}(a_\lambda^*\cos\lambda x+b_\lambda^*\sin\lambda x) \tag{1*}$$

polynôme *d'approximation de degré l* si parmi tous les polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n<\frac{m-1}{2}$

$$S_n(x)=a_0+\sum_{\lambda=1}^{n}(a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x) \tag{1}$$

c'est $S_n^*(x)$ qui minimalize la somme:

$$\sum_{k=0}^{m-1}|f(x_k)-S_n(x_k)|^l. \tag{2}$$

Quand $l=2$ $S_n^*(x)$ est *le polynôme d'approximation quadratique* Le polynôme-minimum (1*) sur un ensemble de $m>2n+1$ points $[x_k, f(x_k)]$ minimalize le plus grand écart $\max|f(x_k)-S_n(x_k)|$ (cette borne inférieure du module-maximum est appelée *la meilleure approximation*).

THÉORÈME 1. *Le polynôme* (1) *d'ordre $\leqslant n$ d'approximation quadratique sur un ensemble de $2n+2$ points equidistants est le polynôme-minimum.*

Nous démontrons ce théorème par la substitution $x_k = x_0 + k\frac{2\pi}{2n+2}$ et $x = x_i = x_0 + i\frac{2\pi}{2n+2}$ à l'expression

$$S_n(x) = \frac{1}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_k)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)} f(x_k) \tag{3}$$

représentant le polynôme d'approximation quadratique d'ordre $\leqslant n$ sur un ensemble de $2n+2$ points $[x_k, f(x_k)]$ equidistants; alors

$$\rho_i = S_n(x_i) - f(x_i) = \frac{1}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n+1}(1)^{k-i+1} f(x_k) = (-1)^i \rho_0 \tag{4}$$

d'où suit le théorème 1.

THÉORÈME 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme-minimum trigonométrique* (1) *d'ordre* $\leqslant n$ *sur un ensemble de* $2n+2$ *points* $[x_k, f(x_k)]$ *fournît l'approximation de chacun degré* $l \geqslant 1$ *est que les* x_k *vérifissent les équations*:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k \cos\lambda x_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k \sin\lambda x_k = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n+1} < 2\pi. \tag{6}$$

Il n'y a d'exception, que si la meilleure approximation est nulle et $S_n(x)$ *est le polynôme d'interpolation.*

Considérons les cas $l > 1$. La condition est nécessaire. En effet, soit (1) le polynôme-minimum d'ordre $\leqslant n$ sur un ensemble de $2n+2$ points $[x_k, f(x_j)]$ qui au même temps minimalize la somme (2).

Posons $f(x_k) - S_n(x_k) = \rho_k$. Alors

$$\rho_k = (-1)^k \varepsilon\rho \neq 0 \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{7}$$

En différentiant (2) par rapport à a_0, a_λ, b_λ nous aurons:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign}\rho_k = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign}\rho_k \cos\lambda x_k = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |\rho_k|^{l-1} \operatorname{sign}\rho_k \sin\lambda x_k = 0. \tag{10}$$

En remplaçant ρ_k par $(-1)^k \varepsilon\rho$ nous obtiendrons (5).

La condition est suffisante. En effet, supposons que (5) et (6) soient accomplis et soit (1) le polynôme-minimum; alors, $\rho_k = (-1)^k \varepsilon\rho$. En remplaçant ρ_k par $(-1)^k \varepsilon\rho$ dans les équations (8), (9), (10) nous obtiendrons des identités, par (5). Les équations (8), (9), (10) forment un système de $2n+1$ équations homogènes par rapport à $|\rho_k|^{l-1}\operatorname{sign}\rho_k$

$(k=0, 1, \ldots, 2n+1)$. Et, comme le polynôme-minimum $S_n(x)$ est unique, on peut démontrer qu'aucun autre polynôme $S_n^*(x)$ d'ordre $\leqslant n$ satisfait aux équations (8), (9), (10). Par conséquent, le polynôme $S_n(x)$ fournit l'approximation de chacun degré $l > 1$. Ce théorème est aussi démontré pour le cas $l = 1$.

Corollaire 1. *Sur un ensemble de* $2n+2$ *points équidistants le polynôme trigonométrique d'ordre* $\leqslant n$ *et les polynômes d'approximation de chacun degré* $l \geqslant 1$ *coïncident.*

Corollaire 2. *Si le polynôme-minimum* (1) *trigonométrique d'ordre* $\leqslant n$ *sur un ensemble de* $2n+2$ *points coïncide avec de polynôme d'approximation de degré quelconque* $l_0 \geqslant 1$, *alors* (1) *est le polynôme d'approximation de chacun degré* $l \geqslant 1$.

§ 2. Sur la résolution de système d' équations (5)

LEMME. *Le système d' équations*

$$z_0^\lambda + z_1^\lambda + \ldots + z_n^\lambda = u_0^\lambda + u_1^\lambda + \ldots + u_n^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

est résoluble; avec celà seulement deux cas sont possible:

1) *les systèmes de nombres* z_k *et* u_k *sont identiques, par exemple* $z_0 = u_0;\ z_1 = u_1;\ \ldots\ z_n = u_n$; *c'est le cas de la résolution triviale.*

$$2)\ z_k = \cos\left(\varphi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(\varphi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right),$$
$$u_k = \cos\left(\psi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(\psi_0 + k\frac{2\pi}{n+1}\right),$$

où $k = 0, 1, \ldots, n$ *et* φ_0 *et* ψ_0 *sont des nombres réels quelconques; dans ce cas* z_k *et* u_k *sont les racines des équations:*

$$\left.\begin{aligned} z_0^\lambda + z_1^\lambda + \ldots + z_n^\lambda = 0, \\ u_0^\lambda + u_1^\lambda + \ldots + u_n^\lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Les propriétés des fonctions symmétriques de $z_0, z_1, \ldots, z_k$ et $u_0, u_1, \ldots, u_k$ font la base pour la démonstration de ce théorème.

THÉORÈME 3. *Le système d' équations* (5) *est résoluble, et nous avons deux possibilitées:*

1) *les nombres* x_{2p} *ayant des indices paires, sont identiques aux nombres* x_{2p+1} *avec les indices impaires (la résolution triviale)*;

$$2)\ x_{2p} = x_0 + p\frac{2\pi}{n+1}, \quad x_{2p+1} = x_1 + p_1\frac{2\pi}{n+1} \quad (p = 0, 1, \ldots, n), \tag{30}$$

où x_0 *et* x_1 *sont des nombres réels quelconques.*

On peut reduire ce théorème au lemme précédant en remplyçant $e^{x_{2p}i}$ par z_p et $e^{x_{2p+1}i}$ par u_p.

THÉORÈME 4. *Le système d' equations*

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cos\lambda x_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \sin\lambda x_k = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

les mêmes racines que le système

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cos \lambda x_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \sin \lambda x_k = 0,$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est paire} \\ 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

pourvu que la résolution ne soit triviale.

Formulant le théorème 2 on peut maintenant diminuer le nombre d'équationns (5), selon le théorème 4.

§ 3. Situation des $2n+2$ points dans le cas, où les approximations différentes par le polynôme (1) d'orde $\leqslant n$ coïncident

THÉORÈME 5. *Le polynôme-minimum trigonométrique* (1) *d'ordre $\leqslant n$ sur un ensemble de $2n+2$ points $[x_k, f(x)]$, pourvu que la meilleure approximation ne soit nulle, fournit l'approximation de chacun degré $l \geqslant 1$, si les abscisses des points donnés se composent selon les formules* (30). *C'est la condition nécessaire et suffisante.*

Dans ce cas les écarts $\rho_n(x_k) = S_n(x_k) - f(x_k)$ sont périodiques avec le période $\frac{2\pi}{n+1}$.

§ 4. Coïncidence des polynômes d'approximation de différents degrés

THÉORÈME 6. *Si un polynôme trigonométrique* (1) *d'ordre $\leqslant n$ sur un ensemble de $2n+2$ points fournit l'approximation de degrés $l_1 \geqslant 1$ et $l_2 \geqslant 1$, alors $S_n(x)$ est le polynôme-minimum qui fournit l'approximation de chacun degré $l \geqslant 1$.*

Le polynôme d'approximation de degré $l = \infty$ est le polynôme-minimum et on peut réunir le corollaire 2 du théorème 2 avec le théorème 6.

§ 5. Approximation dans un intervalle

La periodicité des écarts au cas d'approximation considéré est bien remarquable. Quant aux polynômes d'approximation dans un intervalle, deux critères de coïncidence de ces polynômes peuvent être établis.

THÉORÈME 7. *Si $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *et* (1) *est un polynôme trigonométrique quelconque d'ordre $\leqslant n$ satisfaisant à la condition*

$$f\left(x + m\frac{\pi}{n+1}\right) - S_n\left(x + m\frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^m [f(x) - S_n(x)], \tag{43}$$

où $m = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ alors $S_n(x)$ est le polynôme-minimum pour la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ *qui fournit l'approximation de chacun degré $l \geqslant 1$.*

THÉORÈME 8. *Si $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ et (1) est un polynôme trigonométrique quelconque d'ordre $\leqslant n$, satisfaisant aux conditions:*

$$f\left(x+m\frac{2\pi}{n+1}\right)-S_n\left(x+m\frac{2\pi}{n+1}\right)=f(x)-S_n(x)=\rho_n(x), \tag{47}$$

$$(m=\pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$f\left(\frac{2\pi}{n+1}-x\right)-S_n\left(\frac{2\pi}{n+1}-x\right)=-[f(x)-S_n(x)] \tag{48}$$

$$(\textit{suppossant } \rho_n(0)=0),$$

alors $S_n(x)$ est le polynôme-minimum pour la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui fournit l'approximation de chacun degré $l \geqslant 1$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 487—512 Série mathématique

А. Х. ТУРЕЦКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ В НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ СООТНОШЕНИЮ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе изучается асимптотическое выражение верхней грани абсолютных величин тригонометрических полиномов $P_n(x)$ порядка n, удовлетворяющих условию

$$|a_m P_n^{(m)}(x_k) + a_{m-1} P_n^{(m-1)}(x_k) + \ldots + a_0 P_n(x_k)| \leqslant 1,$$

где a_i — заданные константы и $x_k = \frac{2\pi k}{2n+1}$ $(k=0, 1, \ldots, 2n)$.

1. Нами решена задача об определении верхней границы модуля тригонометрического полинома $P_n(x)$ порядка n, удовлетворяющего условиям

$$|aP_n''(x_k) + bP_n'(x_k) + cP(x_k)| \leqslant 1,$$

где $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=0, 1, \ldots, 2n)$, а a, b и c — данные вещественные постоянные величины. Это решение в сжатом виде изложено в нашей заметке ([1]).

Здесь мы рассматриваем эту задачу в общем виде: определить верхнюю границу модуля тригонометрического полинома $P_n(x)$ порядка n, удовлетворяющего условиям

$$|a_m P_n^{(m)}(x_k) + a_{m-1} P_n^{(m-1)}(x_k) + \ldots + a_1 P_n'(x_k) + a_0 P_n(x_k)| \leqslant 1 \quad (k=0, 1, \ldots, 2n), \tag{1}$$

где x_k имеют прежние значения, $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ — данные вещественные постоянные величины, m — любое натуральное число.

2. Для решения этой задачи обозначим

$$a_m P_n^{(m)}(x) + a_{m-1} P_n^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 P_n'(x) + a_0 P_n(x) = S_n(x).$$

Тогда условия (1) принимают вид

$$|S_n(x_k)| \leqslant 1 \quad (k=0, 1, \ldots, 2n). \tag{1'}$$

Напишем для $S_n(x)$ интерполяционную формулу:

$$S_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}. \tag{2}$$

Используя известное тождество

$$\frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}=1+2\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu(x-x_k)=$$
$$=1+2\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x\cos\nu x_k+2\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x\sin\nu x_k,$$

перепишем (2) в виде

$$S_n(x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}S_n(x_k)+\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x\sum_{k=0}^{2n}S_n(x_k)\cos\nu x_k+$$
$$+\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x\sum_{k=0}^{2n}S_n(x_k)\sin\nu x_k. \tag{2'}$$

Таким образом, мы получили для тригонометрического полинома $P_n(x)$ дифференциальное уравнение

$$a_mP_n^{(m)}(x)+a_{m-1}P_n^{(m-1)}(x)+\ldots+a_1P'_n(x)+a_0P_n(x)\equiv$$
$$\equiv a_0P_n(x)+\sum_p a_{2p}P_n^{(2p)}(x)+\sum_p a_{2p-1}P_n^{(2p-1)}(x)=$$
$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}S_n(x_k)+\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x\sum_{k=0}^{2n}S_n(x_k)\cos\nu x_k+$$
$$+\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x\sum_{k=0}^{2n}S_n(x_k)\sin\nu x_k. \tag{3}$$

Представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=A_0+\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\cos\nu x+\sum_{\nu=1}^{n}B_\nu\sin\nu x, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}P_n^{(2p)}(x)&=(-1)^p\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2p}A_\nu\cos\nu x+(-1)^p\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2p}B_\nu\sin\nu x,\\ P_n^{(2p-1)}(x)&=(-1)^{p-1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2p-1}B\;\cos\nu x+(-1)^p\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2p-1}A_\nu\sin\nu x.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подставив выражение $P_n(x)$ и его производных в (3), получим тождество

$$a_0A_0+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x\left[a_0A_\nu+\sum_p(-1)^pa_{2p}\nu^{2p}A_\nu+\sum_p(-1)^{p-1}a_{2p-1}\nu^{2p-2}B_\nu\right]+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x\left[a_0B_\nu+\sum_p(-1)^pa_{2p}\nu^{2p}B_\nu+\sum_p(-1)^pa_{2p-1}\nu^{2p-1}A_\nu\right]=$$

$$= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) + \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \cos \nu x_k + \\ + \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \sin \nu x_k. \qquad (6)$$

Сравнив соответствующие коэффициенты, получим для определения A_0, A_ν, $B_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 A_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k), \\ &\left[a_0 + \sum_p (-1)^p a_{2p} \nu^{2p}\right] A_\nu + \left[\sum_p (-1)^{p-1} a_{2p-1} \nu^{2p-1}\right] B_\nu = \\ &\quad = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \cos \nu x_k, \\ &\left[a_0 + \sum_p (-1)^p a_{2p} \nu^{2p}\right] B_\nu - \left[\sum_p (-1)^{p-1} a_{2p-1} \nu^{2p-1}\right] A_\nu = \\ &\quad = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \sin \nu x_k. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение характеристический полином

$$F(r) = a_m r^m + a_{m-1} r^{m-1} + \ldots + a_1 r + a_0 \equiv a_0 + \sum_p a_{2p} r^{2p} + \sum_p a_{2p-1} r^{2p-1}.$$

Тогда

$$F(i\nu) = a_0 + \sum_p (-1)^p a_{2p} \nu^{2p} + i \sum_p (-1)^{p-1} a_{2p-1} \nu^{2p-1} = \alpha_\nu + i\beta_\nu; \quad F(0) = a_0.$$

Обозначим

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) = u_0, \quad \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \cos \nu x_k = u_\nu,$$
$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \sin \nu x_k = v_\nu. \qquad (8)$$

Тогда система (7) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned} &a_0 A_0 = u_0, \\ &\alpha_\nu A_\nu + \beta_\nu B_\nu = u_\nu, \\ &-\beta_\nu A_\nu + \alpha_\nu B_\nu = v_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Решив эту систему, найдем

$$A_0 = \frac{u_0}{a_0}, \quad A_\nu = \frac{\alpha_\nu u_\nu - \beta_\nu v_\nu}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}, \quad B_\nu = \frac{\alpha_\nu v_\nu + \beta_\nu u_\nu}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}, \qquad (9)$$

если $F(0) \neq 0$ и $F(i\nu) \neq 0$.

Если же $a_0 = F(0) = 0$ и, следовательно,

$$u_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) = 0,$$

то примем $A_0 = 0$. Точно так же, если при некотором целом l, $1 \leqslant l < n$, $F(il) = 0$, значит $\alpha_l = \beta_l = 0$ и, следовательно,

$$u_l = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \cos lx_k = 0, \qquad v_l = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \sin lx_k = 0,$$

то примем $A_l = B_l = 0$.

Подставив найденные значения A_0, A_ν и B_ν в выражение (4) для $P_n(x)$, получим

$$P_n(x) = \frac{u_0}{a_0} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu (u_\nu \cos \nu x + v_\nu \sin \nu x) + \beta_\nu (u_\nu \sin \nu x - v_\nu \cos \nu x)}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}$$

и, наконец, принимая во внимание (8), найдем

$$P_n(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \left[\frac{1}{2a_0} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu \cos \nu (x - x_k) + \beta_\nu \sin \nu (x - x_k)}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2} \right] \quad (10)$$

если $a_0 = F(0) \neq 0$ и $F(i\nu) \neq 0$ для $\nu = 1, 2, \ldots, n$. При $a_0 = 0$ получим

$$P_n(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu \cos \nu (x - x_k) + \beta_\nu \sin \nu (x - x_k)}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}, \quad (11)$$

а если $F(il) = 0$ для некоторого целого l, $1 \leqslant l \leqslant n$, то в сумме $\sum\limits_{\nu=1}^{n}$ в (10) или (11) будет отсутствовать член, соответствующий значению $\nu = l$.

3. Предположим, что $x_q < x < x_{q+1}$, или $x = x_q + \theta(x_{q+1} - x_q)$, где $0 < \theta < 1$, а q равно одному из чисел $0, 1, \ldots, 2n-1$; тогда (10) и (11) преобразуются соответственно к виду

$$P_n(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k^{(q)}) \left[\frac{1}{2a_0} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu \cos \frac{2\nu(k+\theta)\pi}{2n+1} + \beta_\nu \sin \frac{2\nu(k+\theta)\pi}{2n+1}}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2} \right], \quad (10)$$

$$P_n(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k^{(q)}) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu \cos \frac{2\nu(k+\theta)\pi}{2n+1} + \beta_\nu \sin \frac{2\nu(k+\theta)\pi}{2n+1}}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}, \quad (11')$$

где

$$x_k^{(q)} = \begin{cases} x_{q-k} & \text{для } k = 0, 1, \ldots, q, \\ x_{2n+1+q-k} & \text{для } k = q+1, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Обозначим

$$\frac{1}{2a_0}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\sin\nu\varphi}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}$$

или, соответственно,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\sin\nu\varphi}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}$$

через $f_n(\varphi)$; тогда получим

$$P_n(x)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}S_n(x_k^{(q)})\,f_n\left(\frac{2(k+\theta)\pi}{2n+1}\right).$$

Очевидно, что $f_n(\varphi)$ при $n\to\infty$ сходится равномерно к $f(\varphi)$, где

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_0}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\sin\nu\varphi}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}$$

или, соответственно,

$$f(\varphi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\sin\nu\varphi}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}$$

для значений $m\geqslant 2$; таким образом,

$$f_n(\varphi)=f(\varphi)+\varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ (равномерно).

Если $F(0)\neq 0$ и $F(i\nu)\neq 0$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, то, принимая во внимание условия (1′), получаем для верхней границы модуля $P_n(x)$ следующую асимптотическую оценку (для достаточно больших значений n):

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\left|f\left(\frac{2(k+\theta)\pi}{2n+1}\right)\right|\to\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(\varphi)|\,d\varphi \text{ при } n\to\infty.$$

Очевидно, найденная верхняя граница для $|P_n(x)|$ асимптотически достижима.

Решение задачи сводится к вычислению величины

$$L=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(\varphi)|\,d\varphi.$$

Если $f(\varphi)$ не будет иметь нулей в интервале $(0, 2\pi)$, то

$$L=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi\right|=\frac{1}{|a_0|},$$

так как

$$\int_0^{2\pi}\cos\nu\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sin\nu\varphi\,d\varphi=0 \quad (\nu=1, 2, \ldots).$$

Если же $f(\varphi)$ будет иметь в интервале $(0, 2\pi)$ l корней (каждый нечетной кратности): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$, то

$$L = \frac{1}{\pi}\left| \int_0^{\varphi_1} f(\varphi)\,d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\varphi)\,d\varphi + \ldots + (-1)^{l-1}\int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} f(\varphi)\,d\varphi + \right.$$

$$\left. + (-1)^l \int_{\varphi_l}^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \right| = \frac{2}{\pi}\left| \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu-1}\Phi(\varphi_\nu)^{l-1} - \frac{1}{2}\Phi(0) + \frac{(-1)^l}{2}\Phi(2\pi) \right|, \tag{12}$$

где

$$\Phi(\varphi) = \int f(\varphi)\,d\varphi.$$

Замечание. В дальнейшем будем писать $f(\varphi)$ в виде

$$f(\varphi) = \frac{1}{2a_0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu \cos\nu\varphi + \beta_\nu \sin\nu\varphi}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2},$$

помня при этом, что в случае $F(0) = 0$ в правой части отсутствует первый член, а в случае $F(il) = 0$ отсутствует член, соответствующий значению $\nu = l$.

Если $F(il_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, где $l_1, l_2, \ldots, l_p$—целые числа (одно из них может быть равно нулю), то числа $S_n(x_k^{(q)})$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$ удовлетворяют не только равенствам (1′), но также условиям

$$\sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k^{(q)}) \cos l_j x_k^{(q)} = 0, \quad \sum_{k=0}^{2n} S_n(x_k^{(q)}) \sin l_j x_k^{(q)} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

В этом случае имеем

$$\sup|P_n(x)| = \min_{(x_{l_j}, y_{l_j})} \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left| f_n\left(\frac{2(k+\theta)\pi}{2n+1}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{p} \left(x_{l_j} \cos l_j \frac{2(k+\theta)\pi}{2n+1} + y_{l_j} \sin l_j \frac{2(k+\theta)\pi}{2n+1} \right) \right| =$$

$$= \min_{(x_{l_j}, y_{l_j})} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\varphi) - \sum_{j=1}^{p} (x_{l_j} \cos l_j\varphi + y_{l_j} \sin l_j\varphi \right| d\varphi + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Для вычисления этого минимума предположим, что функция

$$\psi(\varphi) = f(\varphi) - \sum_{j=1}^{p} (x_{l_j} \cos l_j\varphi + y_{l_j} \sin l_j\varphi)$$

для допустимых значений x_{l_j}, y_{l_j} $(j = 1, 2, \ldots, p)$ меняет знак, проходя через нуль, в точках

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_q$$

интервала $(0, 2\pi)$, и что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ — дифференцируемые функции от x_{l_j}, y_{l_j} $(j=1, 2, \ldots, p)$. При этом ограничимся предположением, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ — простые нули функции $\psi(\varphi)$. Тогда

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\varphi)|\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\left|\sum_{k=0}^{q}(-1)^k \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \psi(\varphi)\, d\varphi\right|,$$

где $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{q+1} = 2\pi$.

Положим для определенности, что

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{q}(-1)^k \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \psi(\varphi)\, d\varphi.$$

Приняв во внимание, что

$$\psi(\varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

найдем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_{l_j}} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{q}(-1)^{k+1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \cos l_j\varphi\, d\varphi = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi l_j}\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \sin l_j\varphi_k & \text{при } l_j \neq 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \varphi_k + 2(-1)^{q+1} & \text{при } l_j = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_{l_j}} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{q}(-1)^{k+1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \sin l_j\varphi\, d\varphi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi l_j}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+1}\cos l_j\varphi_k + \dfrac{(-1)^q - 1}{2}\right] & \text{при } l_j \neq 0 \\ 0 & \text{при } l_j = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Вычислим теперь значение квадратичной формы

$$H = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_{l_i}\partial x_{l_j}} h_i h_j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_{l_i}\partial y_{l_j}} h'_i h'_j +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_{l_j}\partial y_{l_i}} h_j h'_i + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_{l_i}\partial y_{l_j}} h_i h'_j$$

в стационарных точках, определяемых уравнениями

$$\psi(\varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_{l_j}} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y_{l_j}} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

Используя равенства

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{l_j}} = \frac{\cos l_j\varphi_k}{\psi'(\varphi_k)}, \qquad \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_{l_j}} = \frac{\sin l_j\varphi_k}{\psi'(\varphi_k)},$$

получаемые дифференцированием тождеств $\psi(\varphi_k)=0$, найдем, что в стационарных точках

$$H=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{q}\frac{(-1)^k}{\psi'(\varphi_k)}\left[\sum_{j=1}^{p}(h_j\cos l_j\varphi_k+h'_j\sin l_j\varphi_k)\right]^2.$$

Так как в интервале $(\varphi_k,\ \varphi_{k+1})$

$$\operatorname{sign}\psi(\varphi)=(-1)^k,$$

то

$$\operatorname{sign}\psi'(\varphi_k)=(-1)^k.$$

Следовательно, в стационарных точках $H>0$. Далее, в стационарной точке

$$\Psi=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}f(\varphi)\,d\varphi=\frac{2}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\Phi(\varphi_k)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\Phi(0)+\frac{(-1)^q}{2}\Phi(2\pi)\right],$$

где, как и выше,

$$\Phi(\varphi)=\int f(\varphi)\,d\varphi.$$

Итак, мы получили в рассматриваемом случае для верхней границы $|P_n(x)|$ следующую асимптотическую оценку:

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{2}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\Phi(\varphi_k)-\frac{1}{2}\Phi(0)+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^q}{2}\Phi(2\pi)\right|+\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n\to 0, \tag{12'}$$

где $\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_q$ определяются из уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&f(\varphi)_k=\sum_{j=1}^{p}(x_{l_j}\cos l_j\varphi_k+y_{l_j}\sin l_j\varphi_k)\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\
&\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\sin l_j\varphi_k=0\ \text{при}\ l_j\neq 0,\quad \sum_{k=1}^{q}(-1)^k\varphi_k=(-1)^q\pi\ \text{при}\ l_j=0,\\
&\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+1}\cos l_j\varphi_k=\frac{1+(-1)^{q+1}}{2}\quad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ p).
\end{aligned}\right\}\tag{12''}$$

Эта верхняя граница для $|P_n(x)|$ асимптотически достижима.

4. Для исследования функции $f(\varphi)$ представим ее, используя равенства

$$F(i\nu)=\alpha_\nu+i\beta_\nu,\quad F(-i\nu)=\alpha_\nu-i\beta_\nu$$

и формулы Эйлера, в виде

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_0}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{F(i\nu)}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{F(-i\nu)}\right]. \tag{13}$$

Пусть

$$F(r)=a_m(r-r_1)^{k_1}(r-r_2)^{k_2}\dots(r-r_s)^{k_s},$$

где $k_1+k_2+\dots+k_s=m$. Разложив дробь

$$\frac{a_m}{F(r)}=\frac{1}{(r-r_1)^{k_1}(r-r_2)^{k_2}\dots(r-r_s)^{k_s}}$$

на простейшие, получим

$$\frac{a_m}{F(r)}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(r-r_j)^p}\;\frac{1}{(k_j-p)!}\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}, \tag{14}$$

где

$$\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}=\left[\frac{d^{k_j-p}\left(\frac{1}{F_j(r)}\right)}{dr^{k_j-p}}\right]_{r=r_j},$$

а

$$F_j(r)=\frac{F(r)}{a_m(r-r_j)^{k_j}}=(r-r_1)^{k_1}\dots(r-r_{j-1})^{k_{j-1}}(r-r_{j+1})^{k_{j+1}}\dots(r-r_s)^{k_s}.$$

Таким образом,

$$\frac{e^{i\nu\varphi}}{F(i\nu)}=\frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(k_j-p)!}\left[\frac{1}{(F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu-r_j)^p}.$$

Следовательно,

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_0}+\frac{1}{2a_m}\sum_{j=1}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(k_j-p)!}\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu-r_j)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu-r_j)^p}\right]. \tag{15}$$

5. Предположим, что $r_j\neq 0$, $r_j\neq il$, и вычислим сумму

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu-r_j)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu-r_j)^p}\right].$$

Заметим для этого, что для всех значений φ из интервала $(0,2\pi)$ легко установить справедливость равенства

$$u(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{i\nu-t}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{-i\nu-t}\right]=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu\sin\nu\varphi-t\cos\nu\varphi}{t^2+\nu^2}=\frac{1}{t}-v(t), \tag{16}$$

где

$$v(t)=\frac{\pi e^{t(\varphi-\pi)}}{\operatorname{sh}\pi t}. \tag{17}$$

Дифференцируя это равенство $p-1$ раз, получим

$$u^{(p-1)}(t)=(p-1)!\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu-t)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu-t)^p}\right].$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu-r_j)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu-r_j)^p}\right]=\frac{1}{(p-1)!}\,u^{(p-1)}(r_j). \tag{18}$$

Подставив последнее выражение в (15), получим

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_0}+\frac{1}{2a_m}\sum_{j=1}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(p-1)!\,(k_j-p)!}\,u^{(p-1)}(r_j)\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}=$$

$$=\frac{1}{2a_0}+\frac{1}{2a_m}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\sum_{p=0}^{k_j-1}c_{k_j-1}^{p}\,u^{p}(r_j)\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1-p)}.$$

Но по формуле Лейбница

$$\sum_{p=0}^{k_j-1}c_{k_j-1}^{p}\,u^{(p)}(r_j)\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1-p)}=\left[\frac{u(r_j)}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)},$$

следовательно,

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_0}+\frac{1}{2a_m}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{u(r_j)}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)} \tag{19}$$

или, принимая во внимание (16),

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_0}+\frac{1}{2a_m}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{1}{r_jF_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)}-$$

$$-\frac{1}{2a_m}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{v(r_j)}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)}. \tag{20}$$

Положив в (14) $r=0$, получим

$$\frac{1}{a_0}=\frac{1}{F(0)}=\frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(k_j-p)!}\,\frac{1}{(-r_j)^p}\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}=$$

$$=-\frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(k_j-p)!\,(p-1)!}\left[\frac{1}{r_j}\right]^{(p-1)}\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}$$

$$=-\frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{1}{r_jF_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)}. \tag{14'}$$

Подставив это выражение в (19), найдем

$$f(\varphi)=-\frac{1}{2a_m}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{v(r_j)}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)}. \tag{21}$$

6. Пусть теперь $r_1=0$. Тогда, согласно сделанному выше замечанию, равенство (15) примет вид

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_m}\left\{\sum_{p=1}^{k_1}\frac{1}{(k_1-p)!}\left[\frac{1}{F_1(0)}\right]^{(k_1-p)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu)^p}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(k_j-p)!}\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu-r_j)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu-r_j)^p}\right]\right\}. \quad (22)$$

Нетрудно убедиться, что для всех значений φ из интервала $(0, 2\pi)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu)^p}\right]=-\frac{(2\pi)^p}{p!}B_p\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right), \quad (23)$$

где $B_p(x)$ есть полином Бернулли степени p.

Подставив значения сумм формул (18) и (23) в (22) и сделав те же преобразования, что и выше, получим

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_m}\left\{-\sum_{p=1}^{k_1}\frac{(2\pi)^p}{(k_1-p)!\,p!}B_p\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)\left[\frac{1}{F_1(0)}\right]^{(k_1-p)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{1}{r_jF_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)}-\sum_{j=2}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{v(r_j)}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)}\right\}. \quad (24)$$

7. Рассмотрим теперь случай $r_1=il$, $r_2=-il$, где l — некоторое целое положительное число. При этом для простоты ограничимся случаем, когда эти корни простые, т. е. положим $k_1=k_2=1$. Тогда в $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}$ формулы (15) будет отсутствовать член, соответствующий значению $\nu=l$. Обозначим такую сумму через $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}$.

Формула (15) в этом случае примет вид

$$f(\varphi)=\frac{1}{2a_0}+\frac{1}{2a_m}\left\{\frac{1}{F_1(r_1)}\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{i\nu-il}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{-i\nu-il}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{F_2(r_2)}\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{i\nu+il}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{-i\nu+il}\right]+$$

$$+\sum_{j=3}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(k_j-p)!}\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{(i\nu-r_j)^p}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{(-i\nu-r_j)^p}\right]-$$

$$-\sum_{j=3}^{s}\sum_{p=1}^{k_j}\frac{1}{(k_j-p)!}\left[\frac{1}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-p)}\left[\frac{e^{il\varphi}}{(il-r_j)^p}+\frac{e^{-il\varphi}}{(-il-r_j)^p}\right].$$

Упростим это выражение, используя (14), (16), (18), формулу Лейбница и следующие равенства:

$$F_1(r_1)=\frac{1}{a_m}F'(il), \qquad F_2(r_2)=\frac{1}{a_m}F'(-il),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{i\nu-il}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{-i\nu-il}\right]=2\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\frac{\nu\sin\nu\varphi-il\cos\nu\varphi}{\nu^2-l^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\left[\frac{e^{i\nu\varphi}}{i\nu+il}+\frac{e^{-i\nu\varphi}}{-i\nu+il}\right]=2\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\frac{\nu\sin\nu\varphi+il\cos\nu\varphi}{\nu^2-l^2},$$

$$\frac{e^{il\varphi}}{(il-r_j)^p}+\frac{e^{-il\varphi}}{(-il-r_j)^p}=\frac{2}{(p-1)!}\left[\frac{l\sin l\varphi-r_j\cos l\varphi}{r_j^2+l^2}\right]^{(p-1)}_{r_j},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\frac{\cos\nu\varphi}{\nu^2-l^2}=\frac{1}{2l^2}+\frac{\cos l\varphi+2l(\varphi-\pi)\sin l\varphi}{4l^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{(l)}\frac{\nu\sin\nu\varphi}{\nu^2-l^2}=-\frac{\sin l\varphi+2l(\varphi-\pi)\cos l\varphi}{4l}$$

(последние два равенства справедливы для всех значений φ из интервала $(0, 2\pi)$).

Получим

$$f(\varphi)=-\frac{\sin l\varphi+2l(\varphi-\pi)\cos l\varphi}{4l}\left[\frac{1}{F'(il)}+\frac{1}{F'(-il)}\right]-$$
$$-i\frac{\cos l\varphi+2l(\varphi-\pi)\sin l\varphi}{4l}\left[\frac{1}{F'(il)}-\frac{1}{F'(-il)}\right]-$$
$$-\frac{1}{2a_m}\sum_{j=3}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{v(r_j)}{F_j(r_j)}\right]^{(k_j-1)}-$$
$$-\frac{1}{a_m}\sum_{j=3}^{s}\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{l\sin l\varphi-r_j\cos l\varphi}{F_j(r_j)(r_j^2+l^2)}\right]^{(k_j-1)}_{r_j}. \tag{25}$$

8. Изучим поведение функции

$$v(t)=\frac{\pi e^{t(\varphi-\pi)}}{\operatorname{sh}\pi t} \tag{17}$$

и ее производных для значений φ из интервала $(0, 2\pi)$ и всех вещественных значений $t \neq 0$.

Обозначим для краткости $\varphi-\pi=\alpha$. Тогда α будет любым числом из $(-\pi, \pi)$ и $v(t)$ примет вид

$$v(t)=\frac{\pi e^{\alpha t}}{\operatorname{sh}\pi t}. \tag{17'}$$

Очевидно, что $v(t)>0$ при $t>0$ и $v(t)<0$ при $t<0$. Далее, легко заметить, что

$$v'(t)=\pi e^{\alpha t}\frac{\alpha\operatorname{sh}\pi t-\pi\operatorname{ch}\pi t}{\operatorname{sh}^2\pi t}<0$$

для всех вещественных t и всех α из $(-\pi, \pi)$.

Докажем, что при $t > 0$

$$\operatorname{sign} v^{(p)}(t) = (-1)^p,$$

а при $t < 0$

$$v^{(p)}(t) < 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

для всех α из $(-\pi, \pi)$.

Действительно, имеем

$$v^{(p)}(t) = \pi e^{\alpha t} \sum_{\nu=0}^{p} C_p^\nu \alpha^{p-\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \pi t}\right]^{(\nu)}.$$

Обозначим

$$Q_p(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{p} C_p^\nu \alpha^{p-\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \pi t}\right]^{(\nu)};$$

тогда

$$v^{(p)}(t) = \pi e^{\alpha t} Q_p(\alpha).$$

Знак $v^{(p)}(t)$, очевидно, совпадает со знаком $Q_p(\alpha)$.

Легко проверить, что

$$Q'_{p+1}(\alpha) = (p+1)\, Q_p(\alpha).$$

Убедимся, что наше утверждение достаточно доказать для $\alpha = \pi$ при $t > 0$ и $\alpha = -\pi$ при $t < 0$.

Предположим, что наше утверждение справедливо для p и мы доказываем его справедливость для $p+1$.

При $t > 0$ и p четном пусть будет $Q_p(\alpha) > 0$ для всех α из $(-\pi, \pi)$. Тогда $Q_{p+1}(\alpha)$ будет возрастающей функцией от α и для доказательства того, что $Q_{p+1}(\alpha) < 0$ для всех α из $(-\pi, \pi)$, достаточно установить, что $Q_{p+1}(\pi) < 0$.

Аналогично, при $t > 0$ и p нечетном пусть будет $Q_p(\alpha) < 0$ для всех α из $(-\pi, \pi)$. Тогда $Q_{p+1}(\alpha)$ будет убывающей функцией от α и для доказательства того, что $Q_{p+1}(\alpha) > 0$ для всех α из $(-\pi, \pi)$, достаточно установить, что $Q_{p+1}(\pi) > 0$.

Наконец, при $t < 0$ пусть будет $Q_p(\alpha) < 0$ для всех α из $(-\pi, \pi)$. Тогда $Q_{p+1}(\alpha)$ будет убывающей функцией от α и для доказательства того, что $Q_{p+1}(\alpha) < 0$ для всех α из $(-\pi, \pi)$, достаточно установить, что $Q_{p+1}(-\pi) < 0$.

Итак, при $t > 0$ надо изучить функцию

$$v_1(t) = \frac{e^{\pi t}}{\operatorname{sh} \pi t}$$

и ее производные, а при $t < 0$ — функцию

$$v_2(t) = \frac{e^{-\pi t}}{\operatorname{sh} \pi t}.$$

и ее производные. Очевидно, достаточно ограничиться изучением одной из этих функций, ибо $v_2(-t) = -v_1(t)$.

Положив $\pi t = z$, получим

$$v_1(t) = w(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sh} z} = 1 + \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Дифференцируя, найдем

$$w'(z) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}, \quad w''(z) = \frac{2 \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh}^3 z}, \quad w'''(z) = -\frac{4 \operatorname{ch}^2 z + 2}{\operatorname{sh}^4 z}$$

и т. д. Докажем, что

$$w^{(p)}(z) = (-1)^p \frac{R_{p-1}(\operatorname{ch} z)}{\operatorname{sh}^{p+1}(z)},$$

где $R_{p-1}(\operatorname{ch} z)$ есть полином степени $p-1$ от $\operatorname{ch} z$ с положительными коэффициентами (содержащий только четные степени $\operatorname{ch} z$ при p нечетном и наоборот), т. е. $R_{p-1}(\operatorname{ch} z) > 0$. Этим, очевидно, наше утверждение будет полностью доказано.

Имеем

$$w^{(p+1)}(z) = (-1)^p \frac{(\operatorname{ch}^2 z - 1) R'_{p-1}(\operatorname{ch} z) - (p+1) \operatorname{ch} z R_{p-1}(\operatorname{ch} z)}{\operatorname{sh}^{p+2} z} = $$
$$= (-1)^{p+1} \frac{R_p(\operatorname{ch} z)}{\operatorname{sh}^{p+2} z},$$

откуда

$$R_p(\operatorname{ch} z) = (p+1) \operatorname{ch} z R_{p-1}(\operatorname{ch} z) + (1 - \operatorname{ch}^2 z) R'_{p-1}(\operatorname{ch} z),$$

или, обозначив $\operatorname{ch} z = x$,

$$R_p(x) = (p+1) x R_{p-1}(x) + (1 - x^2) R'_{p-1}(x).$$

Положим

$$R_{p-1}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} x^k, \quad R_p(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k^{(p)} x^k.$$

Подставляя эти выражения в предыдущее тождество и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$a_0^{(p)} = a_1^{(p-1)},$$
$$a_k^{(p)} = (p-k+2) a_{k-1}^{(p-1)} + (k+1) a_{k+1}^{(p-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, p-2),$$
$$a_{p-1}^{(p)} = 3a_{p-2}^{(p-1)},$$
$$a_p^{(p)} = 2a_{p-1}^{(p-1)}.$$

Эти соотношения показывают, что если коэффициенты $R_{p-1}(x)$ положительны, то коэффициенты $R_p(x)$ также положительны, что и требовалось доказать.

9. Для любого m нам удалось изучить поведение функции $f(\varphi)$, определенной формулой (21), (24) или (25) и получить асимптотическую оценку $|P_n(x)|$ только в некоторых частных случаях, которые мы сейчас рассмотрим.

Первый случай. Характеристический полином $F(r)$ имеет один вещественный корень m-й кратности отличный от нуля; обозначим его через r_1. Тогда

$$F(r) = a_m (r - r_1)^m.$$

Функция $f(\varphi)$ определяется формулой (21), в которой следует положить $s = 1$, $F_1(r) = 1$, $k_1 = m$.

Таким образом, получаем

$$f(\varphi) = -\frac{1}{2a_m (m-1)!} v^{(m-1)}(r_1).$$

Следовательно, $f(\varphi)$ не меняет знака в $(0, 2\pi)$ и, по доказанному в п. 3, для тригонометрического полинома $P_n(x)$ при достаточно больших значениях n получаем оценку

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|} + \varepsilon_n \quad \text{или} \quad |P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_m r_1^m|} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0,$$

так как здесь $a_0 = (-1)^m a_m r_1^m$.

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

Если тригонометрический полином $P_n(x)$ порядка n удовлетворяет условиям

$$\left| a_m \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu C_m^\nu r_1^\nu P_n^{(m-\nu)}(x_k) \right| \leqslant 1,$$

где $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$, a_m и r_1 — любые вещественные числа, отличные от нуля, то для всех вещественных значений x

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_m r_1^m|} + \varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

10. Второй случай. Все корни характеристического полинома $F(r)$ вещественны, различны, отличны от нуля и одного знака. Функция $f(\varphi)$ в этом случае также определяется формулой (21), в которой следует положить $s = m$, $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 1$, $F_j(r_j) = \frac{1}{a_m} F'(r_j)$.

Таким образом, получаем

$$f(\varphi) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{v(r_j)}{F'(r_j)}, \tag{26}$$

где $F(r) = a_m (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_m)$.

Как известно, равенство (26) можно переписать в виде

$$f(\varphi) = -\frac{v^{(m-1)}(\xi)}{2a_m (m-1)!},$$

где ξ заключено между наименьшим и наибольшим из чисел r_j $(j = 1,$

2, ..., m). Следовательно, и в этом случае $f(\varphi)$ не меняет знака в $(0, 2\pi)$, и при достаточно большом n получаем оценку

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|} + \varepsilon_n \quad \text{или} \quad |P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_m r_1 r_2 \cdots r_m|} + \varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

Если тригонометрический полином $P_n(x)$ порядка n удовлетворяет условиям

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu P_n^{(\nu)}(x_k) \right| \leqslant 1,$$

где $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$ и все корни $r_1, r_2, \ldots, r_m$ характеристического полинома $F(r) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu r^\nu$ вещественны, различны, отличны от нуля и одного знака, то для всех вещественных значений x

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|} + \varepsilon_n = \frac{1}{|a_m r_1 r_2 \cdots r_m|} + \varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

11. Третий случай. Характеристический полином $F(r)$ имеет корень r_1 кратности k_1 и корень r_2 кратности k_2, где r_1 и r_2 вещественны, отличны от нуля и разных знаков, $k_1 + k_2 = m$, т. е.

$$F(r) = a_m (r - r_1)^{k_1} (r - r_2)^{k_2}.$$

Для определения $f(\varphi)$ следует в (21) положить $s = 2$, $F_1(r_1) = (r_1 - r_2)^{k_2}$, $F_2(r_2) = (r_2 - r_1)^{k_1}$ и вычислить входящие туда производные по формуле Лейбница; в результате получим

$$f(\varphi) = \frac{1}{2a_m (k_1 - 1)!\,(k_2 - 1)!} \left[\sum_{\nu=0}^{k_1-1} \frac{(-1)^\nu c_{k_1-1}^{\nu} (k_2 + \nu - 1)!}{(r_1 - r_2)^{k_2+\nu}} v^{(k_1-\nu-1)}(r_1) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=0}^{k_1-1} \frac{(-1)^\nu c_{k_2-1}^{\nu} (k_1 + \nu - 1)!}{(r_2 - r_1)^{k_1+\nu}} v^{(k_2-\nu-1)}(r_2) \right]. \qquad (27)$$

Учитывая, что при $t > 0$ $\operatorname{sign} v^{(p)}(t) = (-1)^p$, а при $t < 0$ $v^{(p)}(t) < 0$, мы легко обнаружим, что все члены обеих сумм имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком $(-1)^{k_1+1}$ при $r_1 > 0$ и $r_2 < 0$, или со знаком $(-1)^{k_2+1}$ при $r_1 < 0$ и $r_2 > 0$. Следовательно, $f(\varphi)$ не меняет знака в $(0, 2\pi)$ и для всех вещественных значений x имеем

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|} + \varepsilon_n = \frac{1}{|a_m r_1^{k_1} r_2^{k_2}|} + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, мы получили следующий результат:

Если тригонометрический полином $P_n(x)$ порядка n удовлетворяет условиям

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu P_n^{(\nu)}(x_k)\right| \leqslant 1,$$

где $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=0, 1, \ldots, 2n)$, *а характеристический полином имеет вид*

$$F(r) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu r^\nu = a_m (r-r_1)^{k_1}(r-r_2)^{k_2} \quad (k_1+k_2=m),$$

где r_1 и r_2 вещественны, отличны от нуля и разных знаков, то для всех вещественных значений x

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|} + \varepsilon_n = \frac{1}{|a_m r_1^{k_1} r_2^{k_2}|} + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

12. Четвертый случай. Характеристический полином $F(r)$ имеет один корень $r_1 = 0$ кратности m, т. е. $F(r) = a_m r^m$. Функция $f(\varphi)$ в этом случае определяется формулой (24), в которой надо положить $F_1(r) = 1$, $s = 1$, $k_1 = m$. Получаем

$$f(\varphi) = -\frac{(2\pi)^m}{2a_m m!} B_m\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Для оценки $|P_n(x)|$ применим формулы (12′) и (12″), в которых надо положить

$$p=1, \quad l_1=0, \quad q=2, \quad \Phi(\varphi) = \frac{(2\pi)^{m+1}}{2a_m (m+1)!} B_{m+1}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Таким образом, для всех вещественных значений x получим

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{(2\pi)^{m+1}}{\pi |a_m| (m+1)} \left| B_{m+1}\left(\frac{\varphi_1}{2\pi}\right) - B_{m+1}\left(\frac{\varphi_2}{2\pi}\right) - \frac{1}{2} B_{m+1}(0) + \frac{1}{2} B_{m+1}(1)\right| + \varepsilon_n,$$

где φ_1 и φ_2 определяются из уравнений

$$B_m\left(\frac{\varphi_1}{2\pi}\right) = B_m\left(\frac{\varphi_2}{2\pi}\right), \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pi,$$

а $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.
При m нечетном получаем $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 2\pi$ и, следовательно,

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{(2\pi)^m (2^{m+1}-1) |B_{m+1}|}{|a_m| (m+1)!} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0,$$

где B_{m+1}—число Бернулли.

При m четном имеем $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, следовательно,

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2(2\pi)^{m+1}}{\pi |a_m| (m+1)!} \left| B_{m+1}\left(\frac{1}{4}\right)\right| + \varepsilon_n,$$

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{4}{\pi |a_m|} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{m+1}} + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Этот результат совпадает с результатом С. Н. Бернштейна ([2]), полученным им при определении верхней границы $|f(x)|$ на $(0,2\pi)$ для функций, у которых $|f^{(n)}(x)|$ ограничено* и среднее значение по периоду равно нулю.

13. Остановимся детальнее на случае $m = 2$. В этом случае условия (1) принимают вид

$$|a_2 P''_n(x_k) + a_1 P'_n(x_k) + a_0 P_n(x_k)| \leqslant 1. \tag{1''}$$

Здесь надо различать следующие случаи:

1. Характеристический полином $F(r) = a_2 r^2 + a_1 r + a_0$ имеет один двукратный корень, отличный от нуля.

2. Корни характеристического полинома вещественны, различны, отличны от нуля и одного знака.

3. Корни $F(r)$ вещественны, отличны от нуля и разных знаков.

4. $F(r)$ имеет один двукратный корень, равный нулю.

5. Корни $F(r)$ комплексные сопряженные:

$$r_1 = A + iB, \quad r_2 = A - iB.$$

6. Корни $F(r)$ имеют вид: $r_1 = il$, $r_2 = -il$, где l—некоторое целое число.

7. Один корень $F(r)$ равен нулю, а второй отличен от нуля: $r_1 = 0, r_2 \neq 0$.

Первые четыре случая под соответствующими номерами рассмотрены нами для любого m (см. пп. 9, 10, 11, 12).

Остается рассмотреть последние три случая.

Случай пятый. Положив в формуле (26)

$$m = 2, \quad F(r) = a_2(r - r_1)(r - r_2), \quad r_1 = A + iB, \quad r_2 = A - iB$$

$(B > 0)$, мы после элементарных преобразований получим

$$f(\varphi) = \frac{\pi e^{A(\varphi-\pi)}}{2a_2 B} \cdot \frac{N \cos B(\varphi-\pi) - M \sin B(\varphi-\pi)}{M^2 + N^2},$$

где

$$M = \operatorname{sh} A\pi \cos B\pi, \quad N = \operatorname{ch} A\pi \sin B\pi, \quad M^2 + N^2 = \operatorname{sh}^2 A\pi + \sin^2 B\pi.$$

Нули $f(\varphi)$ определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} B(\varphi - \pi) = \operatorname{tg} B\pi \operatorname{cth} A\pi.$$

---

* Выражаю благодарность С. М. Никольскому, указавшему на ошибку, допущенную мной при рассмотрении этого случая в одной из моих предыдущих работ, а также за все ценные указания, данные С. М. Никольским в отзыве на публикуемую работу.

Расстояние между двумя соседними корнями этого уравнения равно $\frac{\pi}{B}$, и так как

$$f(0)=f(2\pi)=\frac{\pi}{4a_2B}\cdot\frac{\sin 2B\pi}{\operatorname{sh}^2 A\pi+\sin^2 B\pi},$$

то $f(\varphi)$ имеет четное число корней в $(0, 2\pi)$ если $\sin 2B\pi\neq 0$. Следовательно, при $B<\frac{1}{2}$ $f(\varphi)$ не имеет ни одного корня в $(0, 2\pi)$. Если же $B>\frac{1}{2}$, то $f(\varphi)$ имеет $2l$ простых корней в $(0, 2\pi)$, когда $l-\frac{1}{2}<B<$ $<l+\frac{1}{2}$ и $B\neq l$ (l — натуральное число); эти корни таковы:

$$\varphi_1,\ \varphi_1+\frac{\pi}{B},\ \varphi_1+\frac{2\pi}{B},\ \ldots,\ \varphi_1+\frac{(2l-1)\pi}{B},$$

где φ_1 — наименьший положительный корень $f(\varphi)$, содержащийся, очевидно, в интервале $\left(0, \frac{\pi}{B}\right)$.

Если $\sin 2B\pi=0$, то либо $B=l+\frac{1}{2}$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, либо $B=l$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$.

При $B=l+\frac{1}{2}$ имеем

$$f(\varphi)=\frac{\pi e^{A(\varphi-\pi)}}{a_2(2l+1)}\frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\operatorname{ch} A\pi},$$

значит, $f(\varphi)$ имеет в $(0, 2\pi)$ $2l$ простых корней:

$$\frac{2\pi}{2l+1},\quad 2\,\frac{2\pi}{2l+1},\quad 3\,\frac{2\pi}{2l+1},\ \ldots,\ 2l\,\frac{2\pi}{2l+1}.$$

В частности, при $l=0$, $B=\frac{1}{2}$ $f(\varphi)$ не имеет ни одного корня в $(0, 2\pi)$.

При $B=l$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ получаем

$$f(\varphi)=-\frac{\pi e^{A(\varphi-\pi)}}{2a_2l}\cdot\frac{\sin l\varphi}{\operatorname{sh} A\pi}.$$

Мы здесь предполагаем $A\neq 0$, ибо случай $A=0$, $B=l$ нами разбирается ниже (см. п. 14, случай 6). Следовательно, $f(\varphi)$ имеет в $(0, 2\pi)$ $2l-1$ простых корней:

$$\frac{\pi}{l},\ \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ \frac{(2l-1)\pi}{l}.$$

Итак, мы должны здесь различать следующие три случая:

1° $B\leqslant\frac{1}{2}$; $f(\varphi)$ не имеет ни одного корня в $(0, 2\pi)$;

2° $l-\frac{1}{2}<B\leqslant l+\frac{1}{2}$, $B\neq l$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$; $f(\varphi)$ имеет в $(0,\ 2\pi$ $2l$ простых корней:

$$\varphi_\nu = \varphi_1 + \frac{(\nu-1)\pi}{B} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2l);$$

3° $B = l$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$); $f(\varphi)$ имеет в $(0, 2\pi)$ $2l-1$ простых корней:

$$\varphi_\nu = \frac{\nu\pi}{l} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2l-1).$$

В случае 1° мы, следовательно, получим для $|P_n(x)|$ следующую асимптотическую оценку:

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|}.$$

В случае 2° мы получим для $|P_n(x)|$ асимптотическую оценку, применив формулу (12), в которой надо l заменить на $2l$ и положить

$$\Phi(\varphi) = \int \frac{\pi e^{A(\varphi-\pi)}}{2a_2 B} \cdot \frac{N\cos B(\varphi-\pi) - M\sin B(\varphi-\pi)}{M^2+N^2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi e^{A(\varphi-\pi)}}{2a_0 B(M^2+N^2)}\left[(AN+BM)\cos B(\varphi-\pi) + (BN-AM)\sin B(\varphi-\pi)\right]$$

(мы здесь использовали равенство $a_2(A^2+B^2) = a_0$),

$$\varphi_\nu = \varphi_1 + \frac{(\nu-1)\pi}{B} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2l).$$

Так как

$$\Phi(\varphi_\nu) = (-1)^{\nu-1} e^{\frac{(\nu-1)A\pi}{B}}\Phi(\varphi_1), \qquad \frac{\Phi(2\pi)-\Phi(0)}{2} = \frac{\pi}{2a_0},$$

то получаем

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\Phi(\varphi_1)\sum_{\nu=1}^{2l} e^{\frac{(\nu-1)A\pi}{B}} + \frac{\pi}{2a_0}\right|;$$

произведя вычисления и используя равенство

$$\operatorname{tg} B(\varphi_1-\pi) = \operatorname{tg} B\pi \operatorname{cth} A\pi = \frac{N}{M},$$

найдем

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|}\left|\frac{e^{A\left[\varphi_1-\pi+\frac{(2l-1)\pi}{2B}\right]}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 A\pi + \sin^2 B\pi}} \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{lA\pi}{B}}{\operatorname{sh}\frac{A\pi}{2B}} + 1\right|. \tag{28}$$

(В нашей заметке ([1]) произведена оценка только для $l = 1$).

Наконец, в случае 3° заменим в формуле (12) l на $2l-1$ и положим

$$\Phi(\varphi) = -\int \frac{\pi e^{A(\varphi-\pi)}}{2a_2 l} \frac{\sin l\varphi}{\operatorname{sh} A\pi}\, d\varphi = \frac{\pi e^{A(\varphi-\pi)}(l\cos l\varphi - A\sin l\varphi)}{2a_0 l \operatorname{sh} A\pi},$$

$$\varphi_\nu = \frac{\nu\pi}{l} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2l-1).$$

Так как

$$\Phi(\varphi_\nu) = \frac{(-1)^\nu \pi e^{\frac{\nu A\pi}{l}} e^{-A\pi}}{2a_0 \operatorname{sh} A\pi}, \qquad \frac{\Phi(0)+\Phi(2\pi)}{2} = \frac{\pi \operatorname{ch} A\pi}{2a_0 \operatorname{sh} A\pi},$$

то

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0 \operatorname{sh} A\pi|} \left| e^{-A\pi} \sum_{\nu=1}^{2l-1} e^{\frac{\nu A\pi}{l}} + \operatorname{ch} A\pi \right|.$$

Произведя вычисления, найдем

$$|P_n(x)| \leqslant \left| \frac{1}{a_0} \operatorname{cth} \frac{A\pi}{2l} \right|. \tag{29}$$

(В заметке ([1]) нами и в этом случае произведена оценка только для $l=1$).

Легко заметить, что формула (29) получается как частный случай (28) при $B=l$.

14. Случай шестой. Положив в формуле (25)

$$s=2, \quad F'(il)=2a_2li, \quad F'(-il)=-2a_2li,$$

найдем

$$f(\varphi) = -\frac{\cos l\varphi + 2l(\varphi-\pi)\sin l\varphi}{4a_2l^2}.$$

Так как здесь для любого l затруднительно найти эффективную оценку для $|P_n(x)|$, то мы ограничимся случаем $l=1$. В этом случае

$$f(\varphi) = -\frac{1}{4a_2}[\cos\varphi + 2(\varphi-\pi)\sin\varphi].$$

Для оценки $|P_n(x)|$ применим формулы (12′) и (12″), в которых надо положить

$$\Phi(\varphi) = -\frac{1}{4a_2}[3\sin\varphi - 2(-\varphi\pi)\cos\varphi], \quad p=1, \quad l_1=1, \quad q=2.$$

Тогда

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left| \Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2) - \frac{1}{2}\Phi(0) + \frac{1}{2}\Phi(2\pi) \right| + \varepsilon_n,$$

где φ_1 и φ_2 определяются из уравнений

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2,$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2,$$

$$x_1\cos\varphi_k + y_1\sin\varphi_k = -\frac{1}{4a_2}[\cos\varphi_k + 2(\varphi_k-\pi)\sin\varphi_k] \quad (k=1, 2),$$

а $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, найдем

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_2|}.$$

15. Случай седьмой. Положив в формуле (24)

$$m=2, \quad s=2, \quad k_1=k_2=1, \quad F_1(0)=-r_2, \quad F_2(r_2)=r_2,$$

найдем

$$f(\varphi) = \frac{1}{2a_2r_2}\left[\varphi - \pi + \frac{1}{r_2} - \frac{\pi e^{r_2(\varphi-\pi)}}{\operatorname{sh}\pi r_2}\right].$$

Нетрудно заметить, что $f(\varphi)$ имеет в интервале $(0, 2\pi)$ один максимум

или один минимум (в зависимости от знака a_2). Применим опять формулы (12′) и (12″), в которых надо положить

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{2a_2 r_2}\left[\frac{\varphi^2}{2} - \pi\varphi + \frac{\varphi}{r_2} - \frac{\pi e^{r_2(\varphi-\pi)}}{r_2 \operatorname{sh} \pi r_2}\right], \quad p = 1, \quad l_1 = 0, \quad q = 2.$$

Таким образом, для всех вещественных значений x имеет место неравенство

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2) - \frac{1}{2}\Phi(0) + \frac{1}{2}\Phi(2\pi)\right| + \varepsilon_n,$$

где φ_1 и φ_2 определяются из уравнений

$$f(\varphi_1) = f(\varphi_2),$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi,$$

а $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Вычисления дают, что

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{r_2} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi r_2}{2}$$

и, следовательно,

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_2| r_2^2} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi r_2}{2} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Заметим, что

$$\lim_{r_2 \to 0}\left[\frac{1}{|a_2| r_2^2} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi r_2}{2}\right] = \frac{\pi^2}{8|a_2|} = \frac{4}{\pi |a_2|} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3},$$

что совпадает с результатом, полученным в п. 12 для $m = 2$.

16. Для $m = 3$ мы, кроме случаев, исследованных для любого m, рассмотрим дополнительно следующие:

1) Корни характеристического полинома вещественны, различны, отличны от нуля, причем два из них положительные, а один отрицательный:

$$r_1 > r_2 > 0, \quad r_3 < 0.$$

Положив в формуле (26) $m = 3$, получим

$$f(\varphi) = -\frac{1}{2a_3}\left[\frac{v(r_1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} + \frac{v(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} + \frac{v(r_3)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}\right].$$

Далее, имеем

$$\frac{v(r_1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} + \frac{v(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} = \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\frac{v(r_1)}{r_1 - r_3} - \frac{v(r_2)}{r_2 - r_3}\right] = \left[\frac{v(x)}{x - r_3}\right]' =$$

$$= \frac{v'(x)}{x - r_3} - \frac{v(x)}{(x - r_3)^2},$$

где $r_1 > x > r_2 > 0$.

Следовательно,

$$f(\varphi) = -\frac{1}{2a_3}\left[\frac{v'(x)}{x-r_3} - \frac{v(x)}{(x-r_3)^2} + \frac{v(r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\right]. \qquad (26')$$

Все члены в квадратной скобке отрицательны для любого φ из $(0, 2\pi)$, так как

$$v(r_3) < 0, \quad v(x) > 0, \quad v'(x) < 0.$$

Итак, $f(\varphi)$ не имеет корней в $(0, 2\pi)$.

2) $r_1 < r_2 < 0$, $r_3 > 0$. Функция $f(\varphi)$ может быть представлена в том же виде (26′), что и в предыдущем случае, но здесь $r_1 < x < r_2 < 0$.

В данном случае все члены в квадратной скобке положительны для любого φ из $(0,2\pi)$, так как

$$v(r_3) > 0, \quad v(x) < 0, \quad v'(x) < 0.$$

Следовательно, и в данном случае $f(\varphi)$ не имеет корней в $(0, 2\pi)$.

3) Характеристический полином имеет один двукратный корень r_1 и один простой корень r_2, где r_1 и r_2 отличны от нуля и одинаковых знаков.

Положив в (27) $m=3$, $k_1=2$, $k_2=1$, получим

$$f(\varphi) = -\frac{1}{2a_3}\frac{v'(r_1)}{r_1-r_2} - \left[\frac{v(r_1)}{(r_1-r_2)^2} + \frac{v(r_2)}{(r_2-r_1)^2}\right].$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$f(\varphi) = -\frac{1}{2a_3}\left[\frac{v'(r_1)}{r_1-r_2} - \frac{v'(x)}{r_1-r_2}\right] = -\frac{1}{2a_3}\frac{(r_1-x)\,v''(t)}{r_1-r_2},$$

где x заключен между r_1 и r_2, а t заключено между x и r_1.

Значит, и в этом случае $f(\varphi)$ не имеет корней в $(0, 2\pi)$.

Таким образом, во всех этих случаях мы получаем для $|P_n(x)|$ асимптотическую оценку

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{|a_0|}$$

для всех вещественных значений x.

Нетрудно заметить, что все полученные нами оценки асимптотически достижимы.

17. В заключение заметим, что совершенно аналогично решается следующая задача: определить верхнюю границу $|u(x)|$, где $u(x)$ — периодическая, периода 2π функция, удовлетворяющая для всех вещественных значений x неравенству

$$|c_m u^{(m)}(x) + c_{m-1} u^{(m-1)}(x) + \ldots + c_1 u'(x) + c_0 u(x)| \leqslant 1,$$

$c_0, c_1, \ldots, c_m$ — данные вещественные постоянные величины, m — любое натуральное число.

Действительно, обозначив

$$c_m u^{(m)}(x) + c_{m-1} u^{(m-1)}(x) + \ldots + c_1 u'(x) + c_0 u(x) = v(x)$$

и рассматривая $v(x)$ как известную функцию, мы из дифференциального уравнения легко определим $u(x)$. Для этого напишем ряд Фурье функции $v(x)$ в виде

$$v(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и будем искать решение дифференциального уравнения в виде суммы тригонометрического ряда

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Коэффициенты A_0, A_k и B_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} c_0 A_0 &= a_0, \\ \alpha_k A_k + \beta_k B_k &= a_k, \\ -\beta_k A_k + \alpha_k B_k &= b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

где $\alpha_k + i\beta_k = F(ik)$ и $F(r) = c_m r^m + c_{m-1} r^{m-1} + \ldots + c_0$ — характеристический многочлен. Определив коэффициенты A_0, A_k и B_k, и используя равенства

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \sin kt\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

получим для $u(x)$ выражение

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(x - \varphi) \left[\frac{1}{2c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right] d\varphi,$$

если $F(0) \neq 0$ и $F(ik) \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Если же $F(0) = 0$ и, следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t)\, dt = 0,$$

то примем $A_0 = 0$, а если при некотором целом l $F(il) = 0$ и, следовательно,

$$a_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \cos lt\, dt = 0, \quad b_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \sin lt\, dt = 0,$$

то примем $A_l = B_l = 0$. Тогда для функции $u(x)$ найдем такое же выражение, что и выше, только в ряде

$$f(\varphi) = \frac{1}{2c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

в первом случае будет отсутствовать первый член, а во втором — член, соответствующий значению $k = l$.

Таким образом, мы получим для $|u(x)|$ те же неравенства, что и выше, с той лишь разницей, что они будут не асимптотическими, а точными.

Пусть мы для данного характеристического многочлена $F(r)$ получили для функции $u(x)$ оценку $|u(x)| < M$ для всех вещественных значе-

ний x; тогда мы для соответствующего тригонометрического полинома $P_n(x)$ имеем асимптотическую оценку

$$|P_n(x)| \leqslant M + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Пусть равенство достигается для функции $u^*(x)$ в точке x^*, так что

$$|u^*(x^*)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} v^*(x^*-\varphi) f(\varphi)\, d\varphi\right| = M,$$

где $v^*(\varphi)$—измеримая функция, для которой $|v^*(\varphi)| \leqslant 1$.

Обозначим через $\sigma_n^*(x)$ среднюю арифметическую порядка n частичных сумм ряда Фурье функции $v^*(x)$. Тогда будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |v^*(\varphi) - \sigma_n^*(\varphi)|\, d\varphi = 0.$$

Тригонометрический полином порядка n

$$Q_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_n^*(x-\varphi) f(\varphi)\, d\varphi$$

будет удовлетворять условиям

$$|c_m Q_n^{(m)}(x) + c_{m-1} Q_n^{(m-1)}(x) + \ldots + c_1 Q_n'(x) + c_0 Q_n(x)| \leqslant 1$$

для всех вещественных значений x и

$$|Q_n(x^*)| = M + \varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. В самом деле,

$$Q_n(x^*) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v^*(x^*-\varphi) f(\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{\sigma_n^*(x^*-\varphi) - v^*(x^*-\varphi)\} f(\varphi)\, d\varphi,$$

причем первый член правой части этого равенства равен M, а второй, в силу ограниченности $f(\varphi)$, стремится при $n\to\infty$ к нулю.

Таким образом, при указанных условиях мы получаем следующий результат:

В классе тригонометрических полиномов $T_n(x)$ порядка n, удовлетворяющих в произвольных $2n+1$ точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$ интервала $(0, 2\pi)$ неравенствам

$$|c_m T^{(m)}(x_i) + c_{m-1} T_n^{(m-1)}(x_i) + \ldots + c_1 T_n'(x_i) + c_0 T_n(x_i)| \leqslant 1,$$

найдется полином, абсолютное значение которого достигает значения, асимптотически равного M. При этом $|T_n(x)|$ не превышает асимпто-

тически этого значения, если в качестве точек x_i взяты равноотстоящие точки интервала $(0, 2\pi)$.

Белорусский государственный университет
г. Минск

Поступило
10. XII. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Турецкий А. Х., Об одном экстремальном свойстве тригонометрических полиномов, удовлетворяющих в отдельных точках интервала дифференциальному соотношению, Доклады Ак. Наук СССР, т. L.

[2] Bernstein S., Sur quelques propriétés extrémales des intégrales successives, C. R., t. 200 (1935), p. 1900.

[3] Турецкий А. Х., Об ограничении интегралов тригонометрических полиномов порядка n, ограниченных в $2n+1$ равноотстоящих точках интервала $(0,2\pi)$, Труды Витебского пед. института, вып. III (1940), 128—136.

A. TURETZKY. ASYMPTOTICAL INEQUALITIES FOR TRIGONOMETRICAL POLYNOMIALS SATISFYING A DIFFERENTIAL RELATION AT A CERTAIN SYSTEM OF POINTS

SUMMARY

In this paper we study the asymptotic expression for the least upper bound of the absolute magnitude of trigonometrical polynomials $P_n(x)$ of order n satisfying the condition

$$|a_m P_n^{(m)}(x_k) + a_{m-1} P_n^{(m-1)}(x_k) + \ldots + a_0 P_n(x_k)| \leqslant 1,$$

where a_i are given constants and $x_k = \frac{2\pi k}{2n+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$.

Член редколлегии проф. *Б. И. Сегал*

Подписано к печати 7. XII 1946 г. А 11286
Объем $7^1/_2$ печ. л., уч.-изд. л. 11. Тираж 2500 экз.
Цена 9 руб. Заказ 960

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный, 9.

Содержание

Стр.

Sommaire

Page.

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 19.
Adresse de la rédaction: B. Kaloujskaja, 19. Moscou

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946). 513–528 Série mathématique

Д. А. РАЙКОВ

О ПОПОЛНЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье излагается способ пополнения топологических групп, применимый ко всем топологическим группам без исключения. Устанавливается совпадение понятий полноты и абсолютной замкнутости группы и доказывается единственность расширения топологической группы до абсолютно замкнутой.

В настоящей статье излагается способ пополнения топологических групп (полученный мною еще в начале 1942 г.) и дается применение его к построению и охарактеризованию так называемых абсолютно замкнутых групп.

Вопросом о пополнении топологических групп занимались Van-Dantzig ([1]), G. Birkhoff ([2]) и A. Weil ([3]). Однако, чтобы обеспечить применимость предложенных ими способов пополнения, они вынуждены были налагать на пополняемые группы некоторые ограничения. В противоположность этому, предлагаемый здесь способ применим ко всем топологическим группам без исключения; в случаях же, рассматривавшихся указанными авторами, он согласуется с их способами и приводит к той же пополненной группе.

Наиболее естественным понятием полноты группы является понятие абсолютной замкнутости, введенное А. Д. Александровым в его заметке ([4]). *Абсолютно замкнутой* А. Д. Александров называет такую топологическую группу, которая остается замкнутым множеством во всякой топологической группе, содержащей ее как абстрактную подгруппу и топологическое подпространство.

В настоящей статье устанавливается, что абсолютно замкнуты те и только те группы, которые являются полными в нашем смысле, т. е. совпадают со своим пополнением. Это приводит к очень простому необходимому и достаточному признаку абсолютной замкнутости группы*. Вместе с тем заново получается теорема А. Д. Александрова о возможности расширения всякой топологической группы до абсолютно замкнутой. Но в то время, как в доказательстве А. Д. Александрова устанавливается лишь существование требуемого расширения,

* Как заметил А. А. Марков, в формулировке достаточного признака абсолютной замкнутости топологической группы, предложенной в ([4]), содержится ошибка.

здесь дается и способ построения этого расширения, а именно — пополнение группы. Кроме того, здесь доказывается, что абсолютно замкнутая группа, содержащая заданную топологическую группу как абстрактную подгруппу и всюду плотное подпространство, единственна с точностью до изоморфизма, при котором элементы заданной группы соответствуют сами себе.

При окончательной редакции настоящей статьи я воспользовался ценными замечаниями А. А. Маркова, за что выражаю ему свою благодарность.

I. ПОПОЛНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

§ 1. Воронки и полнота группы

Через G мы будем обозначать произвольную топологическую группу, через e — ее единицу.

Определение 1. Пусть $\{M\}$ — некоторая система множеств M, составленных из элементов группы G. Мы будем говорить, что эта система содержит множества, *произвольно малые справа*, если, какова бы ни была окрестность U единицы группы, существует множество $M \in \{M\}$ такое, что $MM^{-1} \subset U$. Точно так же, мы будем говорить, что система $\{M\}$ содержит множества, *произвольно малые слева*, если для всякой окрестности U единицы существует множество $M \in \{M\}$ такое, что $M^{-1}M \subset U$.

Определение 2. *Воронкой* мы будем называть всякую систему $\{M\}$ попарно пересекающихся множеств M элементов группы G, содержащую как множества, произвольно малые справа, так и множества, произвольно малые слева. Иными словами, *воронкой будет называться всякая система множеств $\{M\}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

1° *Любые два множества M_1, M_2 из $\{M\}$ имеют непустое пересечение.*

2° *Какова бы ни была окрестность U единицы e, существует $M_1 \in \{M\}$ такое, что $M_1M_1^{-1} \subset U$, и $M_2 \in \{M\}$ такое, что $M_2^{-1}M_2 \subset U$.*

ЛЕММА 1. *Базис окрестностей любого элемента группы G является воронкой.*

Доказательство. Пусть g — рассматриваемый элемент группы и $\{O\}$ — любой базис его окрестностей. Пусть U — произвольная окрестность e и U_1 — окрестность e такая, что одновременно $U_1U_1^{-1} \subset U$ и $U_1^{-1}U_1 \subset U$. В $\{O\}$ существует окрестность O, содержащаяся в $U_1g \cap gU_1$ *. Для нее имеем:

$$OO^{-1} \subset U_1g(U_1g)^{-1} = U_1U_1^{-1} \subset U \text{ и } O^{-1}O \subset (gU_1)^{-1}gU_1 = U_1^{-1}U_1 \subset U$$

Таким образом, в $\{O\}$ существуют окрестности, произвольно малые (даже одновременно) и справа и слева. Так как, кроме того, все окрестности из $\{O\}$, очевидно, попарно пересекаются (имеют даже общее пересечение), то следовательно, $\{O\}$ есть воронка.

Определение 3. Мы будем говорить, что *воронка стягивается*

* $\cap$ есть символ пересечения множеств.

к элементу группы, если этот элемент содержится в замыкании любого из множеств воронки или, что то же самое, если каждое из множеств воронки пересекается с каждой из окрестностей рассматриваемого элемента.

Примером воронки, стягивающейся к элементу группы, может очевидно, служить любой базис окрестностей этого элемента.

Определение 4. *Полной мы будем называть топологическую группу, на которой всякая воронка стягивается к какому-либо элементу.*

Целью этой главы будет построение с помощью воронок требуемого пополнения группы G.

§ 2. Классы равных воронок

Определение 5. Две воронки $\{M\}$ и $\{N\}$ мы будем называть *равными*, и писать $\{M\}=\{N\}$, в том и только в том случае, если $e\in\overline{MN^{-1}}$ для любой пары множеств $M\in\{M\}$ и $N\in\{N\}$.

Докажем, что *равенство воронок обладает тремя характеристическими свойствами равенства — рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью.*

Рефлексивность: $\{M\}=\{M\}$.

Действительно, любые два множества M_1 и M_2 из $\{M\}$ пересекаются и потому $e\in M_1M_2^{-1}\subset\overline{M_1M_2^{-1}}$.

Симметричность: *если* $\{M\}=\{N\}$, *то* $\{N\}=\{M\}$.

Действительно, если $e\in\overline{MN^{-1}}$, то $e\in(\overline{MN^{-1}})^{-1}=\overline{NM^{-1}}$.

Транзитивность: *если* $\{M\}=\{N\}$ *и* $\{N\}=\{P\}$, *то* $\{M\}=\{P\}$.

Действительно, пусть U — произвольная окрестность e и U_1 — окрестность e такая, что $U_1^3\subset U$. Выберем $N\in\{N\}$ такое, что $NN^{-1}\subset U_1$, и пусть M и P — произвольные множества, соответственно, из $\{M\}$ и $\{P\}$. В силу условия, в M, N и N, P содержатся, соответственно, элементы m, n_1 и n_2, p такие, что $mn_1^{-1}\in U_1$ и $n_2p^{-1}\in U_1$. Тогда

$$mp^{-1}=(mn_1^{-1})(n_1n_2^{-1})(n_2p^{-1})\in U_1(NN^{-1})U_1\subset U_1^3\subset U,$$

и, следовательно, в силу произвольности выбора окрестности U, $e\in\overline{MP^{-1}}$.

Определение 6. *Классом равных воронок* мы будем называть всякую совокупность воронок, обладающую следующими двумя свойствами:

a) каждые две воронки из этой совокупности равны;

b) если какая-либо воронка принадлежит этой совокупности, то и все равные ей воронки принадлежат той же совокупности.

В силу доказанных свойств соотношения равенства воронок, множество всех воронок разбивается на классы равных воронок.

ЛЕММА 2. *Если воронка $\{M\}$ составляет часть воронки $\{N\}$, т. е., если каждое множество M из $\{M\}$ содержится в $\{N\}$, то воронки $\{M\}$ и $\{N\}$ равны.*

Доказательство совершенно такое же, как доказательство рефлексивности равенства воронок.

ЛЕММА 3. *Если каждое множество воронки $\{M\}$ пересекается с каждым множеством воронки $\{N\}$, то воронки $\{M\}$ и $\{N\}$ равны.*

Доказательство. Из условия леммы и определения воронки следует, что система, составленная из множеств обеих воронок $\{M\}$ и $\{N\}$, также есть воронка. Эта воронка, в силу леммы 2, равна каждой из воронок $\{M\}$, $\{N\}$ как своей части. А отсюда следует, что воронки $\{M\}$ и $\{N\}$ равны между собой.

Следствие. *Если две воронки не равны, то по крайней мере одна пара множеств из этих воронок не пересекается.*

Рассмотрим теперь воронки, стягивающиеся к элементам группы G.

ЛЕММА 4. *Воронка, стягивающаяся к элементу группы, равна любому базису окрестностей этого элемента, рассматриваемому как воронка.*

Доказательство. Пусть $\{M\}$ — произвольная воронка, стягивающаяся к элементу $g \in G$, и $\{O\}$ — произвольный базис окрестностей этого элемента. Согласно определению 3, каждое из множеств $M \in \{M\}$ пересекается с каждой из окрестностей $O \in \{O\}$. Но тогда $\{M\} = \{O\}$ в силу леммы 3.

ЛЕММА 5. *Две воронки, стягивающиеся к одному и тому же элементу, равны.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 4.

ЛЕММА 6. *Воронка, равная какому-либо базису окрестностей элемента группы, рассматриваемому как воронка, стягивается к этому элементу.*

Доказательство. Пусть $\{M\} = \{O\}$, где $\{O\}$ — базис окрестностей элемента $g \in G$. Достаточно показать, что каждое множество $M \in \{M\}$ пересекается с каждой окрестностью $O \in \{O\}$. Но какое бы $O \in \{O\}$ мы ни взяли, в $\{O\}$ существует окрестность O_1 такая, что $O_1 g^{-1} O_1 \subset O$. Так как $e \in \overline{MO_1^{-1}}$, а $O_1 g^{-1}$ есть окрестность e, то $O_1 g^{-1}$ пересекается с MO_1^{-1}. Следовательно, M пересекается с $O_1 g^{-1} O_1$ и, тем более, с O, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7. *Если одна из двух равных воронок стягивается к элементу $g \in G$, то и другая стягивается к g.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 4 и 6.

В силу лемм 5 и 7, *совокупность всех воронок, стягивающихся к заданному элементу группы, образует класс равных воронок.* Для удобства мы будем говорить, что сам *класс стягивается к данному элементу.*

ЛЕММА. 8. *Две воронки, стягивающиеся к различным элементам, не равны.*

Доказательство. В силу леммы 4, достаточно показать, что не равны базисы окрестностей двух различных элементов, рассматриваемые как воронки. Пусть $g, h \in G$, $g \neq h$, $\{V\}$ — базис окрестностей g и $\{W\}$ — базис окрестностей h. Так как $gh^{-1} \neq e$, то существует

окрестность O элемента gh^{-1} такая, что O не содержит e. Но в $\{V\}$ и $\{W\}$ имеются окрестности V и W, для которых $VW^{-1} \subset O$. Следовательно, и $\overline{VW^{-1}}$ не содержит e, а тогда $\{V\} \neq \{W\}$.

В силу леммы 8, *классы, стягивающиеся к различным элементам, различны.*

Таким образом, леммы 5, 7 и 8 показывают, что *соответствие между элементами группы G и стягивающимися к ним классами равных воронок взаимно однозначно.*

§ 3. Построение группы классов равных воронок

ЛЕММА 9. *Система множеств $\{MN\}$, составленная из всевозможных попарных групповых произведений множеств M воронки $\{M\}$ с множествами N воронки $\{N\}$ также есть воронка.*

Доказательство. Попарное пересечение произведений MN очевидно; проверки требует лишь, что среди этих произведений имеются произвольно малые справа и произвольно малые слева.

Пусть U — произвольная окрестность e и U_1 — окрестность e такая, что $U_1^3 \subset U$. Выберем в $\{M\}$ множество M_1, для которого $M_1M_1^{-1} \subset U_1$, и затем в $\{N\}$ — множество N_1, для которого $N_1N_1^{-1} \subset M_1^{-1}U_1M_1$. * Тогда будем иметь:

$$(M_1N_1)(M_1N_1)^{-1} = M_1(N_1N_1^{-1})(M_1^{-1} \subset M_1(M_1^{-1}U_1M_1)M_1^{-1} = \\ = (M_1M_1^{-1})U_1(M_1M_1^{-1}) \subset U_1^3 \subset U.$$

Аналогично, выбирая $N_2 \in \{N\}$ так, чтобы $N_2^{-1}N_2 \subset U_1$, и затем $M_2 \in \{M\}$ так, чтобы $M_2^{-1}M_2 \subset N_2U_1N_2^{-1}$, будем иметь

$$(M_2N_2)^{-1}(M_2N_2) = N_2^{-1}(M_2^{-1}M_2)N_2 \subset N_2^{-1}(N_2U_1N_2^{-1})N_2 = \\ = (N_2^{-1}N_2)U_1(N_2^{-1}N_2) \subset U_1^3 \subset U.$$

Определение 7. Воронку $\{MN\}$, образованную из всевозможных попарных групповых произведений множеств воронки $\{M\}$ с множествами воронки $\{N\}$, назовем *произведением* воронок $\{M\}$ и $\{N\}$. *Ассоциативность произведения воронок* непосредственно следует из ассоциативности группового произведения множеств.

ЛЕММА 10. *Умножение воронок инвариантно относительно равенства, т. е. если $\{M\} = \{M'\}$ и $\{N\} = \{N'\}$, то $\{M\}\{N\} = \{M'\}\{N'\}$.*

Доказательство. Пусть M, N, M', N' — произвольные множества из соответствующих воронок и U — произвольная окрестность e. Нужно показать, что $(MN)(M'N')^{-1}$ пересекается с U. В силу равенства воронок $\{M\}$ и $\{M'\}$ существуют элементы $m \in M$ и $m' \in M'$ такие, что $mm'^{-1} \in U$. Тогда найдется окрестность O элемента m такая, что $Om'^{-1} \subset U$, и окрестность U_1 единицы такая, что $mU_1 \subset O$. Но в силу равенства воронок $\{N\}$ и $\{N'\}$ существуют элементы $n \in N$ и $n' \in N'$, для которых $nn'^{-1} \in U_1$. В результате получаем

* $M_1^{-1}U_1M_1$ есть открытое множество, содержащее e.

$$(mn)(m'n')^{-1} = m(nn'^{-1})m'^{-1} \in mU_1m'^{-1} \subset Om'^{-1} \subset U,$$

т. е. $(MN)(M'N')^{-1}$ действительно пересекается с U.

Из леммы 10 следует, что *если взять любые два класса равных воронок и произвести перемножение каждой воронки из одного класса с каждой воронкой из другого, то все полученные таким образом произведения будут принадлежать одному вполне определенному классу.* Это дает возможность ввести следующее определение.

Определение 8. *Произведением двух классов равных воронок* мы будем называть тот класс, который содержит попарные произведения воронок из одного класса с воронками из другого.

Ассоциативность умножения классов непосредственно следует из ассоциативности умножения воронок.

ТЕОРЕМА 1. *Классы равных воронок, стягивающиеся к элементам группы G, образуют относительно умножения классов группу, изоморфную группе G; изоморфизм осуществляется отождествлением каждого элемента из G со стягивающимся к нему классом.*

Доказательство. Взаимная однозначность соответствия между элементами группы G и стягивающимися к ним классами равных воронок была установлена в предыдущем параграфе. Остается показать, что *если два класса равных воронок стягиваются, соответственно, к элементам g и h, то произведение этих классов стягивается к произведению этих элементов gh.* В силу лемм 7 и 10, достаточно установить справедливость аналогичного утверждения для воронок. Пусть воронка $\{M\}$ стягивается к g и воронка $\{N\}$ — к h. Таким образом, для любых $M \in \{M\}$ и $N \in \{N\}$ имеем $g \in \overline{M}$, $h \in \overline{N}$ и, значит, $gh \in \overline{M}\,\overline{N}$. Но $\overline{M}\,\overline{N} \subset \overline{MN}$. Следовательно, $gh \in \overline{MN}$, т. е. воронка $\{M\}\{N\}$, действительно стягивается к gh.

Определение 9. *Единичной воронкой* мы будем называть всякую воронку, являющуюся единицей относительно умножения воронок, т. е. всякую такую воронку $\{E\}$, что

$$\{E\}\{M\} = \{M\}\{E\} = \{M\}$$

для любой воронки $\{M\}$.

ЛЕММА 11. *Всякий базис окрестностей e является единичной воронкой.*

Доказательство. Пусть $\{U\}$ — базис окрестностей e и $\{M\}$ — произвольная воронка. Пусть U — произвольная окрестность из $\{U\}$ и M_1, M_2 — два произвольных множества из $\{M\}$. Имеем

$$e \in M_1M_2^{-1} \subset UM_1M_2^{-1} \subset \overline{UM_1M_2^{-1}};$$

это показывает, что $\{UM\} = \{M\}$, т. е. $\{U\}$ — левая единица. Точно так же,

$$e \in M_1M_2^{-1} \subset M_1UM_2^{-1} \subset \overline{M_1UM_2^{-1}},$$

что показывает, что $\{MU\} = \{U\}$ т. е. $\{U\}$ — также правая единица.

ЛЕММА 12. *Единичные воронки образуют класс равных воронок.*

Доказательство. То, что всякая воронка, равная единичной воронке, сама является единичной воронкой, следует непосредственно

из определения единичной воронки и леммы 10. То же, что любые две единичные воронки $\{E\}$ и $\{E'\}$ равны, показывают равенства $\{E\}=\{E\}\{E'\}=\{E'\}$.

ЛЕММА 13. *Всякая единичная воронка стягивается к e.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 12, 11 и 6.

Определение 10. Класс единичных воронок мы будем называть *единичным классом*.

Очевидно, *единичный класс служит единицей относительно умножения классов*. В силу леммы 13 *единичный класс есть не что иное, как класс, стягивающийся к e.*

ЛЕММА 14. *Если $\{M\}$ — воронка, то и $\{M^{-1}\}$ — воронка.*

Доказательство. Попарное пересечение множеств M^{-1} очевидно. Существование же среди множеств M^{-1} произвольно малых следует из существования произвольно малых среди множеств M; но только если M мало справа, то M^{-1} мало слева, и наоборот. Действительно, если $MM^{-1}\subset U$, то для $N=M^{-1}$ имеем $N^{-1}N\subset U$, и, точно так же, если $M^{-1}M\subset U$, то для $N=M^{-1}$ имеем $NN^{-1}\subset U$.

Определение 11. Воронкой, *обратной* к воронке $\{M\}$, мы будем называть всякую воронку $\{N\}$ такую, что $\{M\}\{N\}=\{E\}$, где $\{E\}$ — (любая) единичная воронка.

ЛЕММА 15. *Воронки $\{M\}$ и $\{M^{-1}\}$ взаимно обратны.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что произведения $\{M\}\{M^{-1}\}$ и $\{M^{-1}\}\{M\}$ стягиваются к e. Эти произведения имеют вид $\{M_1M_2^{-1}\}$, соответственно $\{M_2^{-1}M_1\}$, где M_1, M_2 пробегают $\{M\}$. Но M_1 и M_2 всегда пересекаются. Следовательно, $e\in M_1M_2^{-1}$ и $e\in M_2^{-1}M_1$, а значит, тем более $e\in\overline{M_1M_2^{-1}}$ и $e\in\overline{M_2^{-1}M_1}$.

Основываясь на лемме 15, можно известными из элементов теории групп способами убедиться в справедливости следующих предложений:

Если воронка $\{N\}$ обратна к $\{M\}$, то воронка $\{M\}$, в свою очередь, обратна к $\{N\}$.

Обращение воронок инвариантно относительно равенства, т. е. *если $\{M\}=\{M'\}$ и $\{N\}$ обратна к $\{M\}$, а $\{N'\}$ — к $\{M'\}$, то $\{N\}=\{N'\}$.*

Это показывает, что *для каждого класса равных воронок существует обратный класс*, а именно, класс, составленный из обратных воронок.

Мы можем резюмировать полученные результаты в следующей теореме:

ТЕОРЕМА 2. *Классы равных воронок образуют группу относительно умножения классов, притом алгебраически содержащую исходную группу G.*

Построенную нами группу всех классов равных воронок, определенных на G, мы будем обозначать через G^*.

§ 4. Топологизация группы классов равных воронок

Определение 12 [см. (5), стр. 16]. Мы будем говорить, что множество A элементов группы содержится *строго внутри* множества B, и писать: $A\Subset B$, если существует окрестность U единицы группы такая, что $UAU\subset B$.

Определение 13. Мы будем говорить, что воронка $\{M\}$ содержится строго внутри множества A, и писать $\{M\} \Subset A$, если $M \Subset A$ для некоторого $M \in \{M\}$.

Определение 14. *Нормальной воронкой* мы будем называть всякую воронку, составленную из открытых множеств и содержащуюся строго внутри каждого из этих составляющих ее множеств.

Примером нормальной воронки может служить произвольный базис окрестностей любого элемента группы G. Легко убедиться в том, что и обратно, всякая нормальная воронка, стягивающаяся к элементу из G, может служить базисом окрестностей этого элемента.

ЛЕММА 16. *Для всякой воронки существует равная ей нормальная воронка.*

Доказательство. Мы покажем, что *для получения нормальной воронки, равной данной, достаточно умножить данную воронку слева и справа на произвольный базис окрестностей единицы.* Действительно, пусть $\{M\}$—рассматриваемая воронка, $\{U\}$ — какой-нибудь базис окрестностей единицы, и U_1MU_2 — произвольное множество из произведения $\{U\}\{M\}\{U\}$. В $\{U\}$ существует окрестность U_3 такая, что $U_3^2 \subset U_1 \cap U_2$. Имеем: $U_3(U_3MU_3)U_3 \subset U_1MU_2$, т. е. $U_3MU_3 \Subset U_1MU_2$. Так как, кроме того, все множества из $\{U\}\{M\}\{U\}$ — открытые, то тем самым и показано, что $\{U\}\{M\}\{U\}$ — нормальная воронка. При этом $\{U\}\{M\}\{U\} = \{M\}$, ибо $\{U\}$ — единичная воронка.

ЛЕММА 17. *Если воронки $\{M\}$ и $\{N\}$ равны, то, каковы бы ни были множество $M \in \{M\}$ и окрестность U единицы, все достаточно малые $N \in \{N\}$ (безразлично, — малые справа или слева) содержатся строго внутри UMU.*

Доказательство. Пусть U_1 — окрестность e такая, что $U_1^3 \subset U$, и N — произвольное множество из $\{N\}$ такое, что $NN^{-1} \subset U_1$, либо $N^{-1}N \subset U_1$. Так как NM^{-1} пересекается с U_1, то N пересекается с U_1M.

Пусть $g \in N \cap U_1M$. При $NN^{-1} \subset U_1$ имеем

$$Ng^{-1} \subset NN^{-1} \subset U_1,$$

следовательно,

$$N \subset U_1g \subset U_1^2M \Subset UMU.$$

При $N^{-1}N \subset U_1$ имеем

$$g^{-1}N \subset N^{-1}N \subset U_1,$$

следовательно,

$$N \subset gU_1 \subset U_1MU_1 \Subset UMU.$$

ЛЕММА 18. *Если воронка $\{M\}$ содержится строго внутри множества A, то и всякая равная ей воронка содержится строго внутри A.*

Доказательство. Пусть M — множество из $\{M\}$ и U — окрестность e, такие, что $UMU \subset A$. Пусть, далее, U_1 — окрестность e такая, что $U_1^2 \subset U$. Тогда если $\{N\} = \{M\}$, то, в силу леммы 17, для всех достаточно малых N из $\{N\}$ имеем $N \subset U_1MU_1$. Поэтому

$$U_1NU_1 \subset U'_1MU'_1 \subset UMU \subset A,$$

т. е. $N \Subset A$, и, следовательно, $\{N\} \Subset A$.

Замечание. Беря в качестве $\{N\}$ саму воронку $\{M\}$, заключаем из проведенного сейчас доказательства, что *если* $\{M\} \Subset A$, *то* $M \Subset A$ (не только для некоторого, но и) *для всех достаточно малых множеств* M *из* $\{M\}$.

Лемма 18 дает возможность перенести определение 13 на классы равных воронок:

Определение 15. Мы будем говорить, что *класс равных воронок содержится строго внутри множества* A элементов группы G, если воронки этого класса содержатся строго внутри A.

Пользуясь этим определением, мы введем теперь множества, которые составят затем базис окрестностей группы G^*.

Определение 16. Пусть O — произвольное открытое множество элементов группы G. *Через* O^* *мы будем обозначать совокупность всех классов равных воронок, содержащихся строго внутри* O. Таким образом, для класса равных воронок g^* соотношения $g^* \in O^*$ и $g^* \Subset O$ равносильны.

ЛЕММА 19. *Если* O_1 *и* O_2 — *открытые множества из* G *такие, что соответствующие множества* O_1^* *и* O_2^* *пересекаются, то* O_1 *и* O_2 *также пересекаются и* $O_1^* \cap O_2^* = (O_1 \cap O_2)^*$.

Доказательство. Пусть $\{M\}$ — воронка из класса, принадлежащего пересечению $O_1^* \cap O_2^*$, т. е. $\{M\} \Subset O_1$ и $\{m\} \Subset O_2$. Так как тогда, согласно замечанию к лемме 18, $M \Subset O_1$ и $M \Subset O_2$ для всех достаточно малых $M \in \{M\}$, то O_1 и O_2 пересекаются, причем $M \Subset O_1 \cap O_2$ для некоторых $M \in \{M\}$, т. е. $\{M\} \Subset O_1 \cap O_2$. Это показывает, что $O_1^* \cap O_2^* \subset$ $\subset (O_1 \cap O_2)^*$. Обратное включение очевидно.

ЛЕММА 20. *Каждый класс равных воронок* g^* *содержится хотя бы в одном множестве вида* O^*, *а именно, во всяком таком* O^*, *для которого* O *есть какое-нибудь из множеств произвольной нормальной воронки, входящей в* g^*.

Доказательство. В силу леммы 16, в g^* содержатся нормальные воронки. Пусть $\{O\}$ — такая воронка и O — любое множество из $\{O\}$. По определению 14, $\{O\} \Subset O$. Тогда, по определению 15, $g^* \Subset O$ и, значит, по определению 16, $g^* \in O^*$.

ЛЕММА 21. *Любые два различных класса равных воронок* g_1^* *и* g_2^* *можно отделить непересекающимися множествами* O_1^* *и* O_2^*.

Доказательство. Пусть $\{O_1\}$ и $\{O_2\}$ — какие-нибудь нормальные воронки, соответственно, из g_1^* и g_2^*. Так как классы g_1^* и g_2^* различны, то $\{O_1\} \neq \{O_2\}$. Поэтому, согласно следствию леммы 3, существуют непересекающиеся множества $O_1 \in \{O_1\}$ и $O_2 \in \{O_2\}$. В силу леммы 19, тогда не пересекаются и множества O_1^* и O_2^*. В силу же леммы 20, g_1^* O_1^* и $g_2^* \in O_2^*$.

ЛЕММА 22. *Каковы бы ни были два множества* O_1^* *и* O_2^*, *содержа-*

щие класс равных воронок g^*, существует множество O^*, содержащее g^* и содержащееся в $O_1^* \cap O_2^*$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 19; в качестве O_3^* можно взять просто $O_1^* \cap O_2^*$.

Леммы 20—22 показывают, что *совокупность множеств O^*, образованных для всевозможных открытых множеств O из G, можно принять за базис окрестностей в G^*.* Так как при этом конечные пересечения множеств O^*, в силу леммы 19, сами суть множества типа O^*, то мы приходим к следующему определению:

Определение 17. *Открытыми множествами в G^* мы будем считать произвольные суммы множеств O^*.*

Заметим, что, как будет ниже показано на примере, уже сумма двух множеств типа O^* может сама не быть множеством этого типа.

Определение 17 превращает G^* в *хаусдорфово пространство.*

ЛЕММА 23. *Пусть O^*—базисная окрестность в G^*, т. е. построена по открытому множеству O из G, как указано в определении 16. Отождествляя элементы группы G со стягивающимися к ним классами равных воронок, имеем $O = O^* \cap G$.*

Доказательство. Принадлежность класса равных воронок к пересечению $O^* \cap G$ означает, что он содержится строго внутри O и стягивается к некоторому элементу $g \in G$. Тогда и (любой) базис окрестностей этого элемента g (входящий, в силу леммы 4, в рассматриваемый класс) содержится строго внутри O. Но это имеет место в том и только в том случае, если $g \in O$. Таким образом, $O^* \cap G$ есть совокупность всех классов равных воронок, стягивающихся к элементам из O, что и утверждается формулой $O = O^* \cap G$.

ТЕОРЕМА 3. *G есть всюду плотное подпространство пространства G^*.* При этом элементы g из G предполагаются отождествленными со стягивающимися к ним классами равных воронок.

Доказательство непосредственно следует из леммы 23. Действительно, утверждение этой леммы означает, во-первых, что всякая базисная окрестность O^* из G^* содержит точки группы G, т. е. что G плотна в G^*, и, во-вторых, что каждое открытое множество из G есть проекция открытого множества из G^* и каждое открытое множество из G^* проектируется в открытое множество из G, т. е. что G есть подпространство пространства G^*.

Перейдем теперь к установлению непрерывности групповых операций, определенных на G^*, в введенной нами топологии.

ЛЕММА 24. *Произведение в группе G^* непрерывно, т. е. для каждой базисной окрестности O^* произведения g^*h^* существуют такие окрестности V^*, W^*, соответственно, элементов g^*, h^*, что $V^*W^* \subset O^*$.*

Доказательство. Пусть $\{V\}$ и $\{W\}$—какие-нибудь нормальные воронки, соответственно, из g^* и h^*. Соотношение $g^*h^* \in O^*$ означает, что $g^*h^* \Subset O$, т. е. $\{V\}\{W\} \Subset O$. Поэтому существуют $V \in \{V\}$ и $W \in \{W\}$ такие, что $VW \Subset O$. В силу леммы 20, V^* есть окрестность g^* и W^*—

окрестность h^*. Покажем, что $V^*W^* \subset O^*$. В самом деле, пусть $g^{*\prime}$ и $h^{*\prime}$— произвольные элементы, соответственно, из V^* и W^*, а $\{V'\}$ и $\{W'\}$— какие-нибудь нормальные воронки, соответственно, из $g^{*\prime}$ и $h^{*\prime}$. Так же, как и выше, заключаем, что существуют $V' \in \{V'\}$ и $W' \in \{W'\}$ такие, что $V' \Subset V$ и $W' \Subset W$. Поэтому $V'W' \subset VW \Subset O$, т. е. $\{V'\}\{W'\} \Subset O$ и, значит, $g^{*\prime}h^{*\prime} \in O^*$. Так как $g^{*\prime}$ и $h^{*\prime}$ выбраны в V^* и W^* произвольно, то, следовательно, $V^*W^* \subset O^*$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 25. *Операция взятия обратного элемента в группе G^* непрерывна, т. е. для каждой окрестности O^* элемента g^{*-1} существует окрестность O_1^* элемента g^* такая, что $O_1^{*-1} \subset O^*$.*

Доказательство. Покажем, что в качестве окрестности O_1^* можно взять $(O^{-1})^*$. Действительно, пусть $\{V\}$—какая-нибудь воронка из g^{*-1} и, значит, $\{V^{-1}\}$—воронка из g^*. Так как $g^{*-1} \in O^*$, то $\{V\} \Subset O$, т. е. существуют $V \in \{V\}$ и окрестность единицы U такие, что $UVU \subset O$. Но тогда $U^{-1}V^{-1}U^{-1} \subset O^{-1}$, следовательно, $\{V^{-1}\} \Subset O^{-1}$, т. е. $g^* \in (O^{-1})^*$. Таким образом, $(O^{-1})^*$ есть окрестность элемента g^*, причем мы показали, что если $h^{*-1} \in O^*$, то $h^* \in (O^{-1})^*$. Заменяя здесь O на O^{-1} и h^* на h^{*-1}, получаем, что, и обратно, если $h^* \in (O^{-1})^*$, то $h^{*-1} \in O^*$. Соединяя оба предложения, имеем не только требуемое включение $(O^{-1})^{*-1} \subset O^*$, но даже равенство $(O^{-1})^{*-1} = O^*$, или $(O^{-1})^* = O^{*-1}$.

Мы можем теперь резюмировать полученные результаты в следующей теореме:

ТЕОРЕМА 4. *G^* есть топологическая группа, содержащая G в качестве абстрактной подгруппы и всюду плотного подпространства.*

§ 5. Полнота группы классов равных воронок

ТЕОРЕМА 5. *Какова бы ни была исходная группа G, группа G^* классов равных воронок, определенных на G, всегда является полной.*

Доказательство. Согласно определению 4, нам нужно показать, что всякая воронка, определенная на G^*, стягивается к некоторому элементу группы G^*. В силу лемм 7 и 16, достаточно ограничиться рассмотрением нормальных воронок *. Пусть $\{V^*\}$—произвольная нормальная воронка на G^*. Обозначим через V' проекцию множества V^* в G: $V' = V^* \cap G$. Заметим, что V^* не обязательно принадлежит базису окрестностей $\{O^*\}$, т. е., вообще говоря, не порождается каким-нибудь открытым множеством V из G, описанным в определении 16 способом. В действительности, V'^* вовсе не обязано совпадать с V^* **.

---

* Для нас важно, собственно, лишь, чтобы множества, входящие в рассматриваемые воронки, были открытыми.

** Пример. Пусть G—группа рациональных точек окружности длины 1, с топологией, индуцируемой естественной топологией всей этой окружности. Пусть O_1 и O_2—два сегмента этой группы, ограниченные парой диаметрально противоположных иррациональных точек, и V^*—сумма множеств O_1^* и O_2^*. Очевидно, $V' = V^* \cap G$ есть вся группа G и, значит, V'^* совпадает с группой G^* всех точек окружности. Между тем V^* не содержит пары иррациональных точек, ограничивающих O_1 и O_2. Таким образом, здесь $V'^* = (V^* \cap G)^* \neq V^*$.

Множества V' — открытые на G. Так как любые два множества V_1^*, V_2^* из $\{V^*\}$ пересекаются, то в них содержатся пересекающиеся базисные окрестности O_1^*, O_2^*. Тогда, в силу леммы 19, пересекаются и проекции O_1 и O_2 множеств O_1^*, O_2^*, а следовательно, пересекаются и проекции V_1', V_2' множеств V_1^*, V_2^*. Итак, множества V' попарно пересекаются.

Пусть теперь U — произвольная окрестность единицы группы G и V_1^* — окрестность из $\{V^*\}$ такая, что $V_1^* V_1^{*-1} \subset U^*$ (где U^* строится по U как указано в определении 16). Тогда $V_1' V_1'^{-1} \subset V_1^* V_1^{*-1} \subset U^*$ и, следовательно, $V_1' V_1'^{-1} \subset U^* \cap G = U$ (см. лемму 23). Таким же способом убедимся в том, что если V_2^* — окрестность из $\{V^*\}$ такая, что $V_2^{*-1} V_2^* \subset U^*$, то $V_2'^{-1} V_2' \subset U$. Мы видим, что $\{V'\}$ есть воронка в G. Остается показать, что $\{V^*\}$ стягивается к элементу $g^* \in G^*$, содержащему эту воронку $\{V'\}$, т. е. что каждое из множеств $V^* \in \{V^*\}$ пересекается с каждой базисной окрестностью O^* элемента g^*. Но если $g^* \in O^*$, то это значит, что $\{V'\} \Subset O = O^* \cap G$, так что существует множество $V_1' \in \{V'\}$, целиком содержащееся в O. Так как проекция V' любого множества $V^* \in \{V^*\}$ пересекается с V_1', то, следовательно, любое V^* пересекается с O, а тем самым и с O^*. Теорема полностью доказана.

II. ПОЛНОТА И АБСОЛЮТНАЯ ЗАМКНУТОСТЬ

§ 6. Необходимое и достаточное условие абсолютной замкнутости топологической группы

Определение 18. *Абсолютно замкнутой группой* мы будем, следуя А. Д. Александрову (4), называть такую группу, которая не содержится ни в какой более широкой топологической группе как абстрактная подгруппа и всюду плотное подпространство.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы топологическая группа была абсолютно замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы она была полной, т. е. чтобы каждая воронка на ней стягивалась к некоторому элементу.*

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из теоремы 4. Действительно, если G — не полная группа, то она содержится как абстрактная подгруппа и всюду плотное подпространство в более широкой, чем она, группе G^* и, следовательно, не является абсолютно замкнутой.

Докажем теперь достаточность. Пусть G — полная группа и G' — топологическая гуппа, содержащая G как абстрактную подгруппу и всюду плотное подпространство. Пусть g' — произвольный элемент из G' и $\{O'\}$ — базис его окрестностей. Обозначим через O проекции множеств O' на G: $O = O' \cap G$. В силу сделанного предположения, O являются непустыми открытыми множествами на G. Покажем, что они образуют на G воронку.

Действительно, так как любые два множества O_1' и O_2' из $\{O\}$ пересекаются по некоторому открытому множеству в G', то их проекции O_1 и O_2 пересекаются, а именно, по проекции пересечения $O_1' \cap O_2'$.

Далее, если U — произвольная окрестность единицы в G, то, в силу сделанного предположения, существует окрестность V' единицы в G' такая, что $V \cap G = V \subset U$; беря тогда O'_1 и O'_2 из $\{O'\}$ такие, что $O'_1 O'^{-1}_1 \subset V'$ и $O'^{-1}_2 O'_2 \subset V'$, будем для их проекций иметь: $O_1 O_1^{-1} \subset V \subset U$ и $O_2^{-1} O_2 \subset V \subset U$. Таким образом, $\{O\}$ действительно есть воронка на G. Так как, по предположению, группа G — полная, то $\{O\}$ стягивается к некоторому элементу $g \in G$, так что каждая окрестность g в G пересекается с каждым O из $\{O\}$. Тогда и каждая окрестность g в G' пересекается с каждым O' из $\{O'\}$, т. е. $\{O'\}$ стягивается к g. Но, будучи базисом окрестностей элемента g', $\{O'\}$ стягивается к g'. Следовательно, в силу леммы 8, $g' = g$. А так как g' — произвольный элемент из G', то $G' = G$, и доказательство теоремы завершено.

Из теорем 4, 5 и 6 непосредственно следует

ТЕОРЕМА А. Д. Александрова [4]. *Каждая топологическая группа может быть расширена до абсолютно замкнутой.*

Но теперь мы знаем, что *требуемое расширение может быть осуществлено путем пополнения группы*, описанного в §§ 1—4.

Специализируя выбор воронок в теореме 6, мы можем сформулировать, например, следующий

Критерий абсолютной замкнутости топологической группы. *Для того чтобы топологическая группа была абсолютно замкнута, необходимо и достаточно, чтобы каждая система попарно пересекающихся замкнутых множеств элементов этой группы, содержащая как множества, произвольно малые справа, так и множества, произвольно малые слева, имела непустое пересечение.*

§ 7. Единственность абсолютно замкнутого расширения топологической группы

Определение 19. *Абсолютно замкнутым расширением* топологической группы G мы будем называть всякую абсолютно замкнутую топологическую группу G', содержащую G как абстрактную подгруппу и всюду плотное подпространство.

ТЕОРЕМА 7. *Всякое абсолютно замкнутое расширение G' топологической группы G изоморфно группе G^* классов равных воронок, построенной на G. Таким образом, абсолютно замкнутое расширение, с точностью до изоморфизма, единственно. При этом изоморфизм можно установить так, чтобы элементы группы G соответствовали сами себе (если отождествить их со стягивающимися к ним классами равных воронок).*

Доказательство. В силу теоремы 6, группа G' полна и потому ее можно рассматривать также как группу классов равных воронок, определенных на ней самой. Поэтому дело сводится к установлению такого взаимно однозначного соответствия между классами равных воронок на G' и на G, которое было бы алгебраическим и топологическим изоморфизмом. Это соответствие опирается на несколько простых предложений о воронках на G и на G'.

1° Каждая воронка на G есть одновременно воронка на G'.

Действительно, пусть $\{M\}$ — воронка на G и U' — произвольная окрестность единицы в G'. Тогда $U' \cap G = U$ есть окрестность единицы в G, и, беря M_1, M_2 так, чтобы $M_1 M_1^{-1} \subset U$ и $M_2^{-1} M_2 \subset U$, мы, тем более, будем иметь $M_1 M_1^{-1} \subset U'$ и $M_2^{-1} M_2 \subset U'$.

2° Воронки $\{M\}$ и $\{N\}$, определенные и равные на G, равны и как воронки на G'.

Действительно, пусть U' — произвольная окрестность единицы в G'. Каковы бы ни были $M \in \{M\}$ и $N \in \{N\}$, MN^{-1} пересекается с $U = U' \cap G$, как с окрестностью единицы в G. Тем самым MN^{-1} пересекается с U', а следовательно, $\{M\}$ и $\{N\}$ равны как воронки на G'.

Предложения 1°—2° показывают, что каждый класс равных воронок на G содержится в некотором классе равных воронок на G'.

3° Воронки $\{M\}$ и $\{N\}$, определенные и не равные на G, не равны и как воронки на G'.

Действительно, согласно предположению, существуют два множества $M \in \{M\}$ и $N \in \{N\}$ и окрестность единицы U в G такие, что MN^{-1} не пересекается с U. Но в G' имеется окрестность единицы V', для которой $V' \cap G = V \subset U$. Тогда MN^{-1} не пересекается и с V', а следовательно. $\{M\}$ и $\{N\}$ не равны как воронки на G'.

Предложение 3° показывает, что в каждом классе равных воронок на G' содержится не более одного класса равных воронок на G.

4° Каждая воронка $\{M'\}$, определенная на G', равна некоторой воронке $\{O\}$, определенной на G (и, значит, в силу 1°, — также на G').

Действительно, пусть $\{O'\}$ — нормальная воронка на G', равная $\{M'\}$. Положим $O = O' \cap G$. O—не пустые (и открытые) множества в G. Пусть U—произвольная окрестность единицы в G, и V'—окрестность единицы в G' такая, что $V' \cap G = V \subset U$. Пусть, далее, O_1' и O_2'—множества из $\{O'\}$ такие, что $O_1' O_1'^{-1} \subset V'$ и $O_2'^{-1} O_2' \subset V'$. Тогда для $O_1 = O_1' \cap G$ и $O_2 = O_2' \cap G$ имеем: $O_1 O_1^{-1} \subset V \subset U$ и $O_2^{-1} O_2 \subset V \subset U$. Таким образом, $\{O\}$—воронка на G. Но, рассматриваемая как воронка на G', $\{O\}$ в силу леммы 3 равна $\{O'\}$, так как любое множество O_1 из $\{O\}$ пересекается с любым множеством O_2' из $\{O'\}$ (ибо пересекается с $O_2 = O_2' \cap G$). Таким образом, $\{M\} = \{O\}$.

Предложение 4° показывает, что в каждом классе равных воронок на G' содержится (и притом, по предыдущему, точно один) класс равных воронок на G.

Поставим теперь в соответствие каждому элементу g' группы G' тот элемент g^* группы G^* (т. е. тот класс равных воронок на G), который содержится в классе равных воронок на G', стягивающемся к g'. Из предшествующего следует, что этим будет установлено взаимно однозначное соответствие между элементами групп G^* и G'. При этом, по самому определению произведения классов равных воронок, произведению элементов группы G^* будет отвечать произведение соответствующих им элементов группы G', и обратно. Остается убедиться в том,

что установленный нами алгебраический изоморфизм групп G^* и G' является вместе с тем и топологическим.

5° Отображение G' на G^*, при котором каждому $g' \in G'$ ставится в соответствие стягивающийся к нему класс $g^* \in G^*$, непрерывно: для произвольной базисной окрестности O^* класса g^* существует окрестность V' элемента g', целиком отображающаяся в O^*.

Действительно, согласно определению 16, $g^* \Subset O$, где $O = O^* \cap G$. Пусть $\{V'\}$ — базис окрестностей элемента g' и $\{V\}$ — проекция $\{V'\}$ на G. В силу соответствия между g' и g^*, $\{V\}$ есть воронка из класса g^* и потому $\{V\} \Subset O$, т. е. в $\{V\}$ существует множество $V \Subset O$. Покажем, что V', проектирующееся в это V, обладает требуемым свойством. В самом деле, пусть g'_1 — произвольный элемент из V' и $\{W'_1\}$ — базис окрестностей g'_1. Существуют $W'_1 \in \{W'_1\}$ и окрестность U' единицы (в G') такие, что $U' W'_1 U' \subset V'$. Обозначая через U и W_1 проекции U' и W'_1 на G, имеем тогда $U W_1 U \subset V$, откуда $\{W_1\} \Subset V$. Но $\{W_1\}$ есть воронка из класса g^*_1, соответствующего элементу g'_1. Таким образом, $g^*_1 \Subset V$, т. е. $g^*_1 \in V^*$. Итак, мы показали, что окрестность V' элемента g' отображается в V^* и, значит, тем более в O^*.

6° Отображение G^* на G', при котором каждому классу $g^* \in G^*$ относится элемент $g' \in G'$, к которому стягивается g^*, непрерывно: для произвольной окрестности O' элемента g' существует окрестность O^*_1 класса g^*, целиком отображающаяся в O'.

Действительно, по свойству регулярности топологической группы, существует окрестность O'_1 элемента g' такая, что $\overline{O'_1} \subset O'$. Пусть $O_1 = O'_1 \cap G$. Покажем, что O^*_1 обладает требуемым свойством. В самом деле, пусть $\{V'\}$ — базис окрестностей элемента g' и $\{V\}$ — проекция $\{V'\}$ на G. Так как $\{V'\} \Subset O'_1$, то $\{V\} \Subset O_1$. Но $\{V\}$ есть воронка из класса g^*, которому отнесен элемент g'. Поэтому $g^* \Subset O_1$ или $g^* \in O^*_1$, т. е. O^*_1 действительно есть окрестность класса g^*. Пусть теперь g^*_1 — произвольный класс из O^*_1, g'_1 — соответствующий ему элемент из G', $\{V'_1\}$ — базис окрестностей g'_1 и $\{V_1\}$ — проекция $\{V'_1\}$ на G. Так как $g^*_1 \Subset O_1$, а $\{V_1\}$ — воронка из класса g^*_1, то в $\{V_1\}$ существует множество $V^0_1 \Subset O_1$. Но все V_1 из $\{V_1\}$ пересекаются с V^0_1. Следовательно, и все V'_1 из $\{V'_1\}$ пересекаются с V^0_1, а значит — с O_1 и O'_1. Таким образом, всякая окрестность V'_1 из базиса окрестностей элемента g'_1 пересекается с множеством O'_1, т. е. $g'_1 \in \overline{O'_1}$. А так как g^*_1 — произвольный класс из O^*_1, то тем самым мы показали, что окрестность O^*_1 класса g^* отображается в $\overline{O'_1}$ и, значит, тем более в O'.

Очевидно, при установленном соответствии между элементами g' группы G' и элементами (классами) g^* группы G^* каждому элементу g, принадлежащему группе G, соответствует стягивающийся к нему класс g^*, т. е., если отождествить элементы группы G со стягивающимися к ним классами, каждому элементу $g \in G$ относится он сам.

Тем самым, теорема полностью доказана.

Математический Институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
28. V.1946.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. van Dantzig., Zur topologischen Algebra. I. Komplettierungstheorie, Math. Ann., 107 (1932), 612—615.
[2] Birkhoff G., Moore-Smith Convergence in General Topology, Ann. of Math., 38 (1937), 48.
[3] Weil A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1937, 29.
[4] Александров А. Д., О расширении хаусдорфова пространства до H-замкнутого, Доклады Ак. Наук СССР, XXXVII, № 4 (1942), 138—141.
[5] Райков Д. А., Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, XIV (1945), 46.

D. RAIKOV. ON THE COMPLETION OF TOPOLOGICAL GROUPS

SUMMARY

In this paper a method of completing of topological groups (obtained by the author at the beginning of 1942) is expounded with the application to construction and characterization of the so-called absolutely closed groups.

The problem of completing of topological groups has been studying by Van-Dantzig ([1]), G. Birkhoff ([2]) and A. Weil ([3]). To guarantee the applicability of their methods of completion, however, they have been obliged to impose some restrictions on the groups. The method of ours is applicable to all topological groups; as to the cases considered by the authors just mentioned, our method agrees with their methods and leads to the same complete groups.

The most natural notion of completeness of a group is that of absolute closedness introduced by A. Alexandrov in ([4]). A topological group is called *absolutely closed* by A. Alexandrov if the group remains closed in any topological group containing the given group as an abstract subgroup and a topological subspace. In this paper we show that a group is absolutely closed if and only if it is complete in our sense, i. e. if it coincides with its completion. This leads to a very simple necessary and sufficient condition of absolute closedness of groups *. Besides that we obtain anew A. Alexandrov's theorem on the possibility of extending topological groups to absolutely closed groups. But, while Alexandrov's proof establishes only the existence of the required extension, we also give here the method of constructing the extension, namely, the method of completing the group. Moreover, we prove that the absolutely closed group containing the given topological group as an abstract subgroup and an everywhere dense subspace is unique, up to isomorphisms preserving the elements of the given group.

I express my gratitude to A. Markoff for his valuable remarks which have been used in the preparation of this paper.

* As is noticed by A. Markoff, there is an error in the formulation of a condition of absolute closedness of topological groups given in ([4]).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 529—554 Série mathématique

В. И. ШЕСТАКОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ПОСРЕДСТВОМ ВЫРАЖЕНИЙ, РЕАЛИЗУЕМЫХ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫМИ СХЕМАМИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе показано, что любая характеристическая функция любой операции n-значного исчисления предложений может быть представлена посредством таких алгебраических выражений, которые можно рассматривать как изоморфные образы некоторых релейно-контактных схем, построенных из проводников с конечными проводимостями и контактов n-позиционных реле или переключателей.

Глава I

Характеристические функции двухзначной логики

1. Пусть p—предложение, а α и ω—некоторые не равные друг другу постоянные величины, действительные или комплексные.

Функцию $\omega_\alpha(p)$, определяемую условием

$$\omega_\alpha(p) = \left\{ \begin{array}{l} \omega, \text{ если } p \text{ верно}, \\ \alpha, \text{ если } p \text{ ложно}, \end{array} \right\} \qquad \text{D1}$$

будем называть *характеристической функцией предложения p*.

Обменяв в D1 ω и α взаимно друг на друга, получим функцию

$$\alpha_\omega(p) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha, \text{ если } p \text{ верно}, \\ \omega, \text{ если } p \text{ ложно}, \end{array} \right\} \qquad \text{D1}'$$

которую будем называть *дополнительной к* $\omega_\alpha(p)$ *характеристической функцией предложения p*.

Легко доказать, что для всяких предложений p и q

$$\omega_\alpha(p) = \omega_\alpha(q) . \equiv . p \equiv q, \qquad (1)$$

$$\alpha_\omega(p) = \alpha_\omega(q) . \equiv . p \equiv q, \qquad (1')$$

где знак $\equiv$ есть знак логической эквивалентности, а точки заменяют скобки. Мы примем здесь то же правило применения точек (.,:, :., и т. д.) вместо скобок, какое принято в Principia mathematica [1].

На основании очевидного равенства

$$\omega_\alpha(\sim p) = \alpha_\omega(p), \qquad (2)$$

где $\sim p$ означает «не p», мы можем условиться применять в дальнейшем только одну из двух взаимно дополнительных характеристических функций, например, только функцию $\omega_\alpha(p)$.

2. Заменив в D1 ω и α соответственно числами ∞ и 0, получим характеристическую функцию $\infty_0(p)$, которую назовем *вырожденной функцией предложения p*. Вырожденную функцию предложения p условимся обозначать более простым символом $[p]$, т. е, положим по определению

$$[p] = \infty_0(p). \qquad \text{D2}$$

Определив операцию инверсии

$$X' = X^{-1} \qquad \text{D3}$$

для чисел 0 и ∞ посредством равенств

$$0^{-1} = \infty, \qquad (3)$$

$$\infty^{-1} = 0, \qquad (3')$$

получим

$$[\sim p] = [p]'. \qquad (4)$$

На основании (2) и (4) следует, что *инверсия вырожденной функции предложения является дополнительной вырожденной функцией* $0_\infty(p)$, т. е.

$$[p]' = 0_\infty(p). \qquad (5)$$

Из определений D1, D2 и равенств

$$0+0=0, \quad 0+\infty = \infty+0 = \infty+\infty = \infty, \qquad (6)$$

следует, что

$$[p \vee q] = [p] + [q], \qquad (7)$$

где $\vee$ — знак операции логического сложения или дизъюнкции («или»).

Так как всякая операция исчисления предложений может быть выражена через две основные операции: отрицания ($\sim$) и дизъюнкции ($\vee$), то на основании равенств (4) и (7) мы можем утверждать, что всякая операция, замкнутая в множестве *вырожденных* величин (т. е. величин, могущих принимать только два значения: ∞ и 0), может быть выражена через две основные операции: инверсии и обычного сложения.

3. Введем операцию $X \cdot Y$ (которая ранее была мною названа [(2), (3)] операцией гармонического сложения) посредством определения

$$X \bullet Y = (X^{-1} + Y^{-1})^{-1}. \qquad \text{D4}$$

Эта операция, как и операция обычного сложения *коммутативна и ассоциативна*, но «нулем» этой операции является число ∞, т. е. для всякого числа X имеем

$$\infty \bullet X = X, \qquad (8)$$

а обычный нуль 0 (нуль операции сложения) играет роль, аналогичную той, которую играет в обычном сложении число ∞, т. е. для всякого числа X имеем равенство

$$0 \bullet X = 0. \qquad (9)$$

Эти равенства справедливы, в частности, и для $X = \infty$.

Так же, как и относительно обычного сложения, умножение распределительно относительно гармонического сложения:

$$Z \times (X \bullet Y) = (Z \times X) \bullet (Z \times Y). \qquad (10)$$

4. Из определения D4 и равенств (4), (7) следует, что

$$[p \cdot q] = [p] \bullet [q], \tag{11}$$

где обыкновенная точка — знак операции *соединения* (conjunction) предложений, т. е. знак, заменяющий союз «и».

Вообще, если $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — какая-нибудь формула исчисления предложений, в которой предложения $p_1, p_2, \ldots p_n$ соединены знаками только трех операций: отрицания ($\sim$), дизъюнкции ($\vee$) и соединения ($\cdot$), то, в силу (4), (7) и D4 будем иметь равенство

$$[f(p_1, p_2, \ldots, p_n)] = F([p_1], [p_2], \ldots, [p_n]), \tag{12}$$

где $F([p_1], [p_2], \ldots, [p_n])$ — формула, получаемая из формулы $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ посредством замены предложений $p_1, p_2, \ldots, p_n$ их вырожденными функциями $[p_1], [p_2], \ldots, [p_n]$ и замены знаков операций $\sim$, $\vee$ и $\cdot$ (обыкновенная точка) соответственно знаками операций $'$, $+$ и $\bullet$ (круглая жирная точка).

Воспользовавшись определением операции следования*

*1.01 $$p \supset q = \cdot = \cdot \sim p \vee q \qquad \text{Df}$$

и равенствами (4) и (7), получаем

$$[p \supset q] = [p]' + [q]. \tag{13}$$

Аналогично из определения операции эквивалентности

*4.01 $$p \equiv q . = \cdot p \supset q \cdot q \supset p \qquad \text{Df}$$

и предыдущей формулы получаем

$$[p \equiv q] = ([p]' + [q]) \bullet ([q]' + [p]). \tag{14}$$

Применяя равенства (4), (7), (11), (13) и (14), мы можем для любой функции исчисления предложений, заданной посредством формулы, содержащей знаки операций $\sim$, $\vee$, $\cdot$, $\supset$ и $\equiv$, построить изоморфную функцию вырожденных величин, соединенных знаками только трех операций: $'$, $+$ и $\bullet$.

Вырожденная функция предложения позволяет, таким образом, установить между множеством предложений и множеством вырожденных величин соответствие, при котором изоморфными образами операций отрицания, дизъюнкции и соединения предложений являются соответственно операции инверсии $X' = X^{-1}$, обычного и гармонического сложения вырожденных величин.

Для всякой другой (невырожденной) характеристической функции $\omega_\alpha(p)$ предложения p изоморфными образами операций отрицания, дизъюнкции и соединения предложений будут уже не операции инверсии, обычного и гармонического сложения, а некоторые другие операции.

5. *Всякую характеристическую функцию $\omega_\alpha(p)$ можно представить через вырожденную функцию $[p]$ посредством выражений, содержащих только три операции: инверсии, сложения и гармонического сложения.*

---

* Здесь и в дальнейшем формулы, отмеченные звездочкой, заимствованы из ([1]); нумерация формул не изменена.

Действительно, в силу D1, D2, D3, D4 и равенств (8) и (9), имеем:

$$\omega_\alpha(p) = \omega \bullet [y] + \alpha \bullet [p]' \tag{$15_{\rm I}$}$$

и

$$\omega_\alpha(p) = (\omega + [p]') \bullet (\alpha + [p]), \tag{$15_{\rm II}$}$$

где жирная точка служит знаком гармонического сложения.

В силу равенства (4), равенства ($15_{\rm I}$), ($15_{\rm II}$) равносильны следующим:

$$\omega_\alpha(p) = \omega \bullet [p] + \alpha \bullet [\sim p], \tag{$16_{\rm I}$}$$

$$\omega_\alpha(p) = (\omega + [\sim p]) \bullet (\alpha + [p]). \tag{$16_{\rm II}$}$$

Выражения, стоящие в правых частях последних равенств, условимся называть соответственно I-й *нормальной* и II-й *нормальной формой* характеристической функции.

В частности, когда $\alpha = 0$, обе эти формы совпадают друг с другом, и мы получаем одно равенство:

$$\omega_0(p) = \omega \bullet [p]. \tag{16_0}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, будем называть просто *нормальной формой* характеристической функции $\omega_0(p)$.

Заменив в равенствах ($15_{\rm I}$), ($15_{\rm II}$) и (16_0) предложение p его отрицанием $\sim p$, получим на основании (2) и (4) равенства:

$$\omega_\alpha(\sim p) = \omega \bullet [p]' + \alpha \bullet [p], \tag{$15'_{\rm I}$}$$

$$\omega_\alpha(\sim p) = (\omega + [p]) \bullet (\alpha + [p]'), \tag{$15'_{\rm II}$}$$

$$\omega_0(\sim p) = \omega \bullet [p]'. \tag{$16'_0$}$$

6. Функцию $1_0(p)$ условимся называть *единичной функцией предложения* p и ввиду того, что она будет довольно часто встречаться в дальнейшем, будем обозначать ее более простым символом $1(p)$, т. е. положим по определению

$$1(p) = 1_0(p). \tag{D5}$$

В силу равенств (16_0) и ($16'_0$)

$$1(p) = 1 \bullet [p], \tag{16}$$

$$1(\sim p) = 1 \bullet [p]'. \tag{16'}$$

Воспользовавшись тем, что вырожденная величина поглощает при умножении любое конечное $X \neq 0$, т. е. равенством

$$X \times [p] = [p], \tag{17}$$

справедливым при любом конечном $X \neq 0$, легко доказать, что для любых конечных α и ω справедливо равенство

$$\omega_\alpha(p) = \omega \times 1(p) + \alpha \times 1(\sim p). \tag{18}$$

Доказательство. Применяя последовательно равенства ($16_{\rm I}$), (17), (10), (16) и (16'), получим цепь равенств

$$\omega_\alpha(p) = \omega \bullet [p] + \bullet \alpha[\sim p] = \omega \bullet (\omega \times [p]) + \alpha \bullet (\alpha \times [\sim p]) =$$
$$= \omega \times (1 \bullet [p]) + \alpha \times (1 \bullet [\sim p]) = \omega \times 1(p) + \alpha \times 1(\sim p)),$$

из которой следует равенство (18) для любых конечных и отличных от нуля ω и α.

Если же одна из величин α и ω равна нулю, то один из двух членов I-й нормальной формы характеристической функции исчезает,

а с оставшимся мы поступаем так же, как в только что проведенном доказательстве.

Выражение, стоящее в правой чисти равенства (18), будем называть *канонической формой* характеристической функции $\omega_\alpha(p)$. Эта форма является менее общей, чем нормальные формы, ибо она оказывается неприменимой (без добавочных условий), если одна из величин α и ω равна ∞. В частности, при $\alpha=0$ из (18) следует равенство

$$\omega_0(p)=\omega\times 1(p), \tag{18_0}$$

сопоставление которого с равенством (16_0) дает простую, но важную формулу:

$$\omega\bullet[p]=\omega\times 1(p), \tag{19}$$

справедливую для всякого конечного ω.

7. Покажем, что операции дополнения до единицы

$$\overline{X}=1-X, \qquad \text{D6}$$

обычного умножения $X\times Y$ и булевского сложения

$$X\dot{+}Y=X+Y-X\times Y, \qquad \text{D7}$$

производимые над элементами множества $\{0, 1\}$, являются, соответственно, изоморфами операций отрицания, соединения предложений и дизъюнкции.

Действительно, применяя последовательно D6, (16), D4, обычные преобразования, D4, D3, (4) и снова (16), получим цепь равенств

$$\overline{1(p)}=1-1(p)=1-1\bullet[p]=1-(1+[p]^{-1})^{-1}=$$
$$=(1+[p])^{-1}=1\bullet[p]'=1\bullet[\sim p]=1(\sim p),$$

из которой следует равенство

$$\overline{1(p)}=1(\sim p). \tag{20}$$

Условившись обозначать дополнение до единицы единичной функции предложения p более простым символом $\overline{1}(p)$, т. е., положив по определению

$$\overline{1}(p)=\overline{1(p)}, \qquad \text{D8}$$

мы можем записать равенство (20) в следующем виде:

$$\overline{1}(p)=1(\sim p). \tag{20'}$$

Функция $\overline{1}(p)$ является, очевидно, дополнительной к единичной функции $1(p)$, т. е.

$$\overline{1}(p)=0_1(p) \tag{21}$$

и потому мы будем называть ее в дальнейшем *дополнительной единичной функцией предложения* p.

Докажем равенство

$$1(p\cdot q)=1(p)\times 1(q). \tag{22}$$

Применяя последовательно (16), (11), ассоциативный закон для операции

гармонического сложения, (16) и (19), получим цепь равенств

$$1(p\cdot q)=1\times 1(p\cdot q)=1\bullet[p\cdot q]=1\bullet([p]\bullet[q])=$$
$$=(1\bullet[p])\bullet[q]=1(p)\bullet[q]=1(p)\times 1(q),$$

из которой и следует равенство (22).

Равенство

$$1(p\vee q)=1(p)\dot{+}1(q) \tag{23}$$

является следствием равенств (20′), (22) и формулы

*4.57 $\vdash:p\vee q.\equiv.\sim(\sim p.\sim q).$

Действительно, применяя последовательно *4.57, (20′), D6, (22), (20), D6 и D7, получим цепь равенств

$$1\ (p\vee q)=1(\sim(\sim p.\sim q))=\overline{1}(\sim p.\sim q)=1-1(\sim p.\sim q)=$$
$$=1-\overline{1}(p)\times\overline{1}(q)=1-(1-1(p))\times(1-1(q))=$$
$$=1(p)+1(q)-1(p)\times 1(q)=1(p)\dot{+}1(q),$$

из которой следует равенство (23).

Равенство (23) утверждает, что *единичная функция логической суммы предложений p и q равна булевской сумме единичных функций этих предложений.*

Для взаимоисключающих предложений p и q, т. е. таких, совместное утверждение которых ложно, имеем

$$1(p)\times 1(q)=1(p.q)=0 \tag{22_0}$$

и, следовательно,

$$1(p\vee q)=1(p)+1(q), \tag{23_0}$$

т. е. для *взаимоисключающих предложений булевская сумма единичных функций совпадает с обычной суммой тех же функций.*

Примечание. Термин «булевское сложение», применяемый здесь для обозначения операции

$$X\dot{+}Y=X+Y-X\cdot Y,$$

можно оправдать тем, что для чисел 0 и 1 имеют место равенства

$$0\dot{+}0=0,\quad 0\dot{+}1=1\dot{+}0=1\dot{+}1=1,$$

аналогичные тем, которые имеют место в булевской алгебре предложений и понятий для логического нуля и логической единицы.

8. Из определения операций $p\supset q$, $p\equiv q$ следуют равенства

$$1(p\supset q)=\overline{1}(p)\dot{+}1(q), \tag{24}$$
$$1(p\equiv q)=(\overline{1}(p)\dot{+}1(q))\times(\overline{1}(q)\dot{+}1(p)). \tag{25}$$

Последнее равенство легко преобразовать к виду

$$1(p\equiv q)=\overline{1}(p)\times\overline{1}(q)+1(p)\times 1(q), \tag{26}$$

аналогичному формуле

*5.23 $\vdash:.p\equiv q.\equiv:p.q.\vee.\sim p.\sim q,$

выражающей эквивалентность $p\equiv q$ через конституенты.

В равенстве (26) булевское сложение $\dot{+}$ выродилось в обычное сложение. Вообще выражение единичной функции от любого сложного предложения выгодно представлять в форме изоморфной выражению этого предложения через конституенты, ибо в этом случае булевское сложение будет совпадать с обычным сложением и, таким образом, все члены выражения рассматриваемой единичной функции будут связаны друг с другом только двумя обычными операциями: сложением и умножением.

Приведем в качестве примера «конституентные» выражения единичных функций предложений $p \vee q$, $p \supset q$:

$$1(p \vee q) = 1(p) \times 1(q) + 1(p) \times \bar{1}(q) + 1(p) \times 1\, q), \tag{27}$$

$$1(p \supset q) = \bar{1}(p) \times 1(q) + \bar{1}(p) \times \bar{1}(q) + 1(p) \times 1(q). \tag{28}$$

Для того чтобы операцию булевского сложения единичных функций можно было заменить операцией обычного сложения, нет необходимости представлять единичную функцию рассматриваемого предложения обязательно в «конституентной» форме. Рассматриваемое выражение достаточно представить как логическую сумму вполне дизъюнктных слагаемых, как совершенную альтернативу. Мы можем, например, написать

$$1(p \vee q) = 1(p) + \bar{1}(p) \times 1(q), \tag{29}$$

где знак $+$ есть знак обычного сложения, ибо в правой части формулы

$*5.63 \qquad \vdash :. p \vee q . \equiv : p . \vee . \sim p . q$

слагаемые логической суммы суть взаимоисключающие предложения.

Из формулы $*5.63$ следует равенство

$$1(p) \dot{+} 1(q) = 1(p) + \bar{1}(p) \times 1(q), \tag{30}$$

где в левой части обязательно должен стоять знак булевского сложения $\dot{+}$, а в правой может стоять как знак булевского, так и обычного сложения $+$, ибо, как уже было сказано, для взаимоисключающих слагаемых булевская сумма совпадает с обычной суммой.

Равенство

$$X \dot{+} Y = X + \bar{X} \cdot Y \tag{30'}$$

легко доказать и непосредственно из определений операций булевского сложения и дополнения до единицы. Действительно, подставив в правую часть равенства (30′) вместо $\bar{X}$ его значение из D6, получим равенство D7. Теперь, после того как равенство (30′) доказано независимо от формулы $*5.63$, мы можем, наоборот, из справедливости этого равенства заключить об истинности формулы $*5.63$.

9. Единичные функции предложений позволяют изоморфно отобразить все формулы исчисления предложений на множество $\{0, 1\}$, а вырожденные функции — на множество $\{0, \infty\}$. Изоморфным образом каждой доказуемой формулы (тавтологии) будет некоторое выражение,

тождественно равное единице в случае отображения посредством единичных функций, или ∞ при отображении посредством вырожденных функций.

Изоморфным образом каждого противоречия в обоих случаях будет некоторое выражение, тождественно равное нулю.

Всякая эквивалентность может быть на основании формулы (1) изоморфно отображена также и посредством некоторого равенства, которое будет справедливо, если отображаемая эквивалентность верна.

Отображая посредством вырожденных функций эквивалентности, элементарные предложения в которых связаны друг с другом только тремя операциями: соединения, дизъюнкции и отрицания, мы получим равенства, вырожденные величины в которых связаны друг с другом только тремя операциями: гармонического сложения, обычного сложения и инверсии. Посредством отображения таких эквивалентностей, доказанных в исчислении предложений, мы получим равенства, выражающие правила гармонического сложения, обычного сложения и инверсии вырожденных величин.

Пусть x, y и z — вырожденные величины, соответствующие предложениям p, q и r, т. е. пусть

$$x=[p]; \quad y=[q], \quad z=[r].$$

Тогда, применяя (4), (7) и (11), мы получим на основании (1) из формул Principia mathematica (номера которых указаны внутри квадратных скобок) следующие равенства:

$$[*4.13] \quad x=(x')',$$

[*4.24]	$x \bullet x=x$,	[*4.25]	$x+x=x$,
[*4.3]	$x \bullet y=y \bullet x$,	[*4.31]	$x+y=y+x$,
[*4.32]	$(x \bullet y) \bullet z=x \bullet (y \bullet z)$,	[*4.33]	$(x+y)+z=x+(y+z)$,
[*4.4]	$x \bullet (y+z)=x \bullet y+x \bullet z$,	[*4.41]	$x+(y \bullet z)=(x+y) \bullet (x+y')$,
[*4.42]	$x=x \bullet y+x \bullet y'$,	[*4.43]	$x=(x+y) \bullet (x+y')$
[*4.44]	$x=x+x \bullet y$,	[*4.45]	$x=x \bullet (x+y)$,
[*4.5]	$x \bullet y=(x'+y')'$,	[*4.57]	$x+y=(x'+y')'$,
[*4.51]	$(x \bullet y)'=x'+y'$,	[*4.56]	$(x+y)'=x' \bullet y'$.

Знаки утверждения $\vdash$, стоявшие перед каждой из эквивалентностей, послуживших прообразами полученных равенств, мы здесь опускаем, но, конечно, мы вправе написать знак утверждения перед каждым из этих равенств, ибо все они верны для любых вырожденных x, y и z.

Смысл знака утверждения при отображении эквивалентности в равенство не изменяется: знак $\vdash$ попрежнему указывает на то, что стоящее справа от него предложение верно. Разница заключается лишь в том, что одно предложение — эквивалентность предложений — заменяется теперь другим — равенством вырожденных величин.

10. Ясно, что при таком изоморфном отображении, когда предложение отображается в некоторое выражение, не являющееся предложе-

нием, знак утверждения не может сохранить прежний смысл. Если отображение производится посредством вырожденных функций предложений, то очевидно, что утверждение предложения p, т. е. $\vdash p$ должно отобразиться в равенство $[p]=\infty$. Если же отображение производится посредством единичных функций предложений $p, q, \ldots$, то $\vdash p$ должно отобразиться в равенство $1(p)=1$.

В общем случае, когда отображение предложения p производится посредством характеристической функции $\omega_\alpha(p)$, утверждение $\vdash p$ должно, очевидно, отобразиться в равенство $\omega_\alpha(p)=\omega$.

Это становится совершенно ясным, если принять во внимание, что утверждение $\vdash p$ означает предложение «p верно.»

Если мы обозначим буквой T некоторое фиксированное *истинное* предложение, то символ $\vdash p$ можно формально определить как сокращенную запись формулы $p\equiv T$, т. е. так:

$$\vdash p. = .p\equiv T. \qquad \text{D9}$$

В силу формулы (1) имеем

$$\omega_\alpha(p)=\omega_\alpha(T). \equiv . p\equiv T,$$

а так как $\omega_\alpha(T)=\omega$, то окончательно получаем формулу

$$\vdash p. \equiv . \omega_\alpha(p)=\omega, \qquad (31)$$

утверждающую, что равенство $\omega_\alpha(p)=\omega$ эквивалентно $\vdash p$, т. е. предложению: «p верно.»

Покажем, что предложение «p ложно» эквивалентно равенству $\omega_\alpha(p)=\alpha$. Очевидно, что предложение «p ложно» эквививалентно предложению «верно не p», т. е. предложение «p ложно» символически можно записать так: $\vdash \sim p$ и, следовательно, формула (31) примет вид:

$$\vdash \sim p. \equiv . \omega_\alpha(\sim p)=\omega$$

или, в силу (2),

$$\vdash \sim p. \equiv . \alpha_\omega(p)=\omega.$$

Заменив α на ω и ω на α, получим

$$\vdash \sim p. \equiv . \omega_\alpha(p)=\alpha. \qquad (31')$$

В частности, для вырожденных функций имеем

$$\vdash p. \equiv . [p]=\infty, \qquad [31]$$

$$\vdash \sim p. \equiv . [p]=0, \qquad [31']$$

а для единичных функций

$$\vdash p. \equiv . 1(p)=1, \qquad (31_1)$$

$$\vdash \sim p. \equiv . 1(p)=0. \qquad (31_1')$$

Так как в Principia mathematica знак утверждения пишется только перед такими формулами, которые либо приняты в качестве первоначальных предложений (аксиом), либо доказаны, то при отображении

утверждаемых в Principia mathematica формул исчисления предложений мы будем получать только верные равенства, в правых (или в левых) частях которых будет написано число ω при отображении функциями $\omega_a(p)$, и, следовательно, «число» ∞ при отображении посредством вырожденных функций. Так, например, из закона исключенного третьего

*2.11 $\quad\quad \vdash . p \vee \sim p$

следует, на основании (31), равенство

[*2.11] $\quad\quad x + x' = \infty.$

Произведя операцию инверсии над обеими частями этого равенства, получим равенство

[*2.11]′ $\quad\quad x' \bullet x = 0,$

дуальное равенству [*2.11].

Это равенство может быть названо изоморфом принципа противоречия, утверждающего, что предложение, в котором соединены (союзом «и») предложение p и его отрицание $\sim p$, ложно.

Точного изоморфа этого равенства мы не найдем в Principia mathematica, ибо в этом трактате нет знака дуального знаку утверждения $\vdash p$, который позволил бы символически записывать предложения вида: «p ложно». В символах Principia mathematica мы можем записать лишь изоморф равенства

$$(x' \bullet x)' = \infty,$$

получающегося из равенства [*2.11]′ посредством применения операции инверсии к его частям. Очевидно, этот изоморф имеет вид

$$\vdash . \sim (\sim p . p).$$

11. Аналогично тому, как из формул, доказанных для предложений, были получены равенства, справедливые для вырожденных величин, мы можем получить равенства для величин ξ, η и ζ, могущих принимать только два значения: 0 и 1. Для этого мы должны положить

$$\xi = 1(p), \quad \eta = 1(q), \quad \zeta = 1(r)$$

и тогда, воспользовавшись равенствами (20′), (22) и (23), мы получим на основании (1) равенства

$$(*4.13) \qquad \xi = (\bar{\bar{\xi}}),$$

$$(*4.24) \qquad \xi \times \xi = \xi, \qquad (*4.25) \qquad \xi \dot{+} \xi = \xi,$$

. . . .

аналогичные тем, которые были ранее получены для вырожденных величин. Отличие заключается только в том, что вырожденные величины заменяются здесь величинами, могущими принимать только два значения: 0 и 1, а операции инверсии ($'$), гармонического сложения ($\bullet$) и обычного сложения ($+$) заменяются, соответственно, операциями дополнения до единицы ($\bar{\ }$), умножения ($\times$) и булевского сложения $\dot{+}$.

Посредством такой же замены из равенств [*2.11] и [*2.11]′ могут быть получены равенства

$$\xi \dot{+} \bar{\xi} = 1, \qquad (*2.11)$$

$$\bar{\xi} \times \xi = 0, \qquad (*2.11)'$$

важные в том отношении, что они лежат в основе метода разложения на конституенты. В силу второго из этих равенств, знак булевского сложения $\dot{+}$ в равенстве (* 2.11) эквивалентен знаку обычного сложения.

12. Единичные функции предложений полезны в тех случаях, когда надо быстро проверить верно или ложно некоторое предложение или выяснить, эквивалентны ли друг другу какие-нибудь два предложения.

Пусть, например, мы желаем выяснить, верно ли предложение

$$p \supset q . \vee . q \supset p.$$

Для этого вычислим значение единичной характеристической функции этого предложения, пользуясь полученными ранее формулами для единичных функций и их значений ξ, η, ζ.

$$1(p \supset q . \vee . q \supset p) = 1(p \supset q) \dot{+} 1(q \supset p) = (\overline{1}(p) \dot{+} 1(q)) \dot{+}$$
$$\dot{+} (\overline{1}(q) \dot{+} 1(p)) = (\bar{\xi} \dot{+} \eta) \dot{+} (\bar{\eta} \dot{+} \xi) = (\bar{\xi} + \xi) \dot{+} (\eta \dot{+} \bar{\eta}) = 1 \dot{+} 1 = 1.$$

Следовательно, проверяемая нами формула верна при любых предложениях p и q.

Мы могли бы, конечно, произвести вычисления значения этой характеристической функции, не пользуясь операцией булевского сложения $\dot{+}$, так как эту операцию можно выразить через привычные операции дополнения ($\bar{\xi} = 1 - \xi$) и обычного умножения. Вычисления получились бы при этом более длинными, но зато мы применяли бы только обычные операции и нам не пришлось бы использовать формул (*4.31), (* 4.33), (* 2.11) и (* 4.25), которыми мы воспользовались в проведенном здесь вычислении.

Можно, наконец, производить вычисления значений единичных функций предложений, следуя методу, предложенному И. И. Жегалкиным [4].

Нетрудно доказать, что справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$1(p . q) \equiv 1(p) \times 1(q) \pmod 2, \qquad (32)$$
$$1(\sim(p \equiv q)) \equiv 1(p) + 1(q) \pmod 2, \qquad (33)$$
$$1(\sim p) \equiv 1 + 1(p) \pmod 2. \qquad (34)$$

Из этих формул получаем в качестве следствий сравнения

$$1(p \equiv q) \equiv 1 + 1(p) + 1(q) \pmod 2, \qquad (35)$$
$$1(p \vee q) \equiv 1(p) + 1(q) + 1(p) \times 1(q), \qquad (36)$$
$$1(p \supset q) \equiv 1 + 1(p) + 1(p) \times 1(q). \qquad (37)$$

Формула (35) является непосредственным следствием формул (33) и (34).

Доказательство (36). Применяя последовательно * 4.57, (34), (32), (34) и правила умножения и сложения по модулю 2, получим цепь сравнений:

$$1(p \vee q) \equiv 1(\sim(\sim p . \sim q) \equiv 1 + 1(\sim p . \sim q) \equiv 1 + 1(\sim p) \times 1(\sim q) \equiv$$
$$\equiv 1 + (1 + 1(p)) \times (1 + 1(q)) \equiv 1 + 1 + 1(p) + 1(q) + 1(p) \times 1(q) \equiv$$
$$\equiv 1(p) + 1(q) + 1(p) \times 1(q),$$

из которой следует (36).

Доказательство (37). Применяя последовательно *1.01, (36), (34) и правила умножения и сложения по модулю 2, получим цепь сравнений

$$1(p\supset q)\equiv 1(\sim p\vee q)\equiv 1(\sim p)+1(q)+1(\sim p)\times 1(q)\equiv$$
$$\equiv 1+1(p)+1(q)+(1+1(p))\times 1(q)\equiv 1+1(p)+1(q)+1(q)+1(p)\times 1(q)\equiv$$
$$\equiv 1+1(p)+1(p)\times 1(q),$$

из которой следует сравнение (37).

Заменив в формулах (32), (33), (34), (35), (36) и (37) знаки сравнений знаками равенств, получим формулы Жегалкина:

$$1(p.q)=1(p)\times 1(q), \qquad (32_0)$$
$$1(\sim(p\equiv q))=1(p)+1(q), \qquad (33_0)$$
$$1(\sim p)=1+1(p), \qquad (34_0)$$
$$1(p\equiv q)=1+1(p)+1(q), \qquad (35_0)$$
$$1(p\vee q)=1(p)+1(q)+1(p)\times 1(q), \qquad (36_0)$$
$$1(p\supset q)=1+1(p)+1(p)\times 1(q), \qquad (37_0)$$

пользуясь которыми можно вычислить единичную функцию любой формулы исчисления предложений, применяя только две операции: обычного умножения и сложения, производимого по правилам сложения в сравнениях по модулю 2, т. е. по правилам:

$$0+0=1+1=0, \quad 0+1=1+0=1. \qquad (38)$$

Вычислим, следуя этому методу (методу Жегалкина), единичную функцию предложения

$$\sim(p.q\equiv r:\equiv:p.q.\equiv.p.r),$$

утверждающего, что операция соединения предложений недистрибутивна относительно эквивалентности предложений

$$1(\sim(p.q\equiv r:\equiv:p.q.\equiv.p.r))=1(p.q\equiv r)+1(p.q.\equiv.p.r)=$$
$$=1(p)\times 1(q\equiv r)+1+1(p.q)+1(p.r)=1(p)\times(1+1(q)+1(r))+$$
$$+1+1(p)\times 1(q)+1(p)\times 1(r)=1(p)+1(p)\times 1(q)+1(p)\times 1(r)+1+$$
$$+1(p)\times 1(q)+1(p)\times 1(r)=1+1(p)=1(\sim p).$$

Следовательно, предложение верно лишь когда p ложно.

В случаях, когда последним действием в проверяемой формуле является $\equiv$, проще убеждаться в истинности этой эквивалентности, вычисляя методом Жегалкина единичные функции правой и левой частей её.

Наоборот, из всякого равенства, доказанного для величин ξ, η, ζ, следует некоторая эквивалентность. Так, например, из равенства

$$1+\xi+\eta=\xi+(1+\eta)$$

следует, на основании (35) и (34), формула

*5.18 $\quad \vdash: p\equiv q.\equiv.\sim(p\equiv\sim q).$

13. Вырожденные функции, так же как и единичные функции предложений, можно применять для проверки и для доказательства формул исчисления предложений, но особый интерес они представляют потому, что *вырожденные функции предложений и любое выражение, построенное из вырожденных функций, могут быть физически осуществлены.*

Действительно, вырожденная функция $[p]$ предложения p может быть интерпретирована, как проводимость электрического контакта, замыкаемого тогда и только тогда, когда верно предложение p.

Простейшим и наиболее известным примером такого контакта может служить кнопка электрического звонка. Действительно, проводимость кнопки электрического звонка можно считать вырожденной функцией $[p]$ предложения p «эта кнопка нажата», ибо если предложение p верно, т. е. если эта кнопка действительно нажата, то ее проводимость практически бесконечно велика по сравнению с проводимостью остальной части цепи электрического звонка, а если предложение p ложно, т. е. если эта кнопка в действительности (в настоящий момент) не нажата, то проводимость ее практически равна нулю.

Если условиться нажимать эту кнопку, например, тогда и только тогда, когда *около места, где установлена эта кнопка, происходит пожар*, то проводимость $[p]$ этой кнопки будет равна вырожденной функции $[q]$, где q — подчеркнутое выше предложение. Наша кнопка будет в этом случае являться кнопкой пожарного сигнала.

Если же мы условимся считать эквивалентным предложению p («эта кнопка нажата») не предложение q, а какое-то другое предложение r, т. е. если мы условимся нажимать эту кнопку тогда и только тогда, когда верно r, то наша кнопка будет служить для передачи уже не пожарного, а какого-то другого сигнала.

Дополнительная вырожденная функция $[p]'$ предложения p должна интерпретироваться как проводимость контакта, *размыкаемого* тогда и только тогда, когда верно предложение p или, что то же самое, *замыкаемого* тогда и только тогда, когда верно отрицание этого предложения, т. е. когда верно $\sim p$ «не p». Если $[p]$ интерпретируется нами как проводимость кнопки электрического звонка, контактная пара в которой замыкается только, когда кнопка нажата, то вырожденная функция $[p]'$ должна интерпретироваться как проводимость такой кнопки, которая *размыкает* цепь только в то время, когда она нажата.

Рабочим положением кнопки $[p]$ является замкнутое, а кнопки $[p]'$ — разомкнутое положение ее контактов (точнее, ее контактной пары).

Если p, q и r означают соответственно предложения: «реле X находится в рабочем положении», «реле Y находится в рабочем положении», «реле Z находится в рабочем положении», то $x=[p]$, $y=[q]$, $z=[r]$ будут означать проводимости *замыкающих*, а $x'=[p]'$, $y'=[q]'$, $z'=[r]'$ — проводимости *размыкающих* контактов реле X, Y и Z.

Если символы проводимостей проводников применять в качестве символов самих проводников, то знаки сложения $(+)$ и гармонического сложения $(\bullet)$ можно рассматривать [(3), (4)] соответственно как знаки параллельного и последовательного соединения проводников и, следовательно, выражения

$$x+y, \quad x\bullet y$$

можно рассматривать, соответственно, как обозначения параллельного и последовательного соединения замыкающих контактов x и y реле X и Y.

Условимся говорить, что *контакт x реализует предложение p*, если проводимость этого контакта (которую мы условимся обозначать той же буквой x) является вырожденной функцией предложения p.

Пользуясь только что введенным термином, мы можем сказать, что равенства

$$x' = [\sim p], \quad x + y = [p \vee q], \quad x \bullet y = [p.q],$$

справедливые в силу равенств (4), (7) и (11), утверждают, что размыкающий контакт x' реализует отрицание $\sim p$ предложения p, а параллельное и последовательное соединения замыкающих контактов x и y реализуют соответственно дизъюнкцию $p \vee q$ и соединение $p.q$ предложений p и q, если контакты x и y реализуют предложения p и q.

Так как любая операция исчисления предложений может быть выражена через операции отрицания, дизъюнкции и соединения предложений, то, следовательно, каждая операция исчисления предложений реализуема посредством некоторой схемы, построенной из замыкающих и размыкающих контактов посредством параллельного и последовательного соединений этих контактов.

Каждое выражение исчисления предложений, все члены которого связаны символами только двух операций: дизъюнкции и соединения предложений, однозначно соответствует некоторой двухполюсной схеме, построенной из замыкающих и размыкающих контактов, посредством параллельных и последовательных соединений их.

Эквивалентные выражения исчисления предложений взаимно однозначно соответствуют при этом схемам, обладающим одинаковыми проводимостями. В силу взаимной однозначности этого соответствия, мы можем сказать, что схемы, обладающие равными проводимостями реализуют эквивалентные предложения.

Если условиться называть равными друг другу такие схемы, проводимости которых оказываются равными при любых значениях проводимостей элементов, из которых построены эти схемы (предполагая, конечно, что сравниваемые схемы построены из одних и тех же элементов), то равенства п. 10 дают нам наиболее важные случаи равенств схем, построенных различным образом из замыкающих и размыкающих контактов.

Физический смысл всех этих равенств совершенно ясен, и для каждого из выражений, встречающихся в этих равенствах, нетрудно начертить схему, построенную из контактов и реле (релейно-контактную схему).

Так, например, равенство [*4.13] утверждает, что замыкающий контакт x реле X эквивалентен (по своей проводимости) размыкающему

контакту $(x')'$ реле X', которое соединено последовательно с размыкающим контактом x' реле X (см. рис. 1a или более схематичный рис. 1b).

Равенство [*4.5] утверждает, что последовательное соединение $x \bullet y$ замыкающих контактов x и y реле X и Y эквивалентно размыкающему

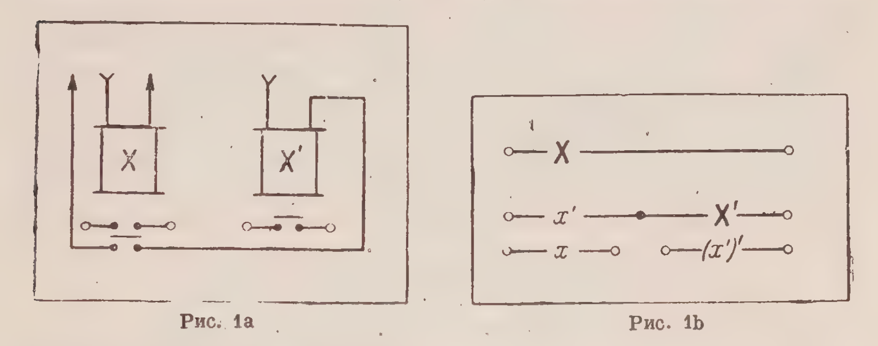


Рис. 1a Рис. 1b

контакту $z' = (x' + y')'$ реле Z, соединенного последовательно с параллельно соединенными размыкающими контактами x' и y' реле X и Y (см. рис. 2).

Равенство (*4.57) утверждает, что параллельное соединение $x + y$ замыкающих контактов x и y реле X и Y эквивалентно размыкающему

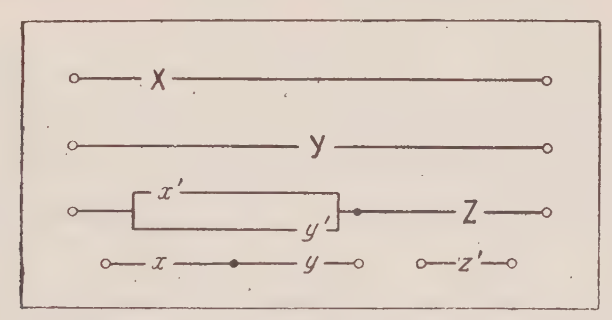


Рис. 2

контакту $z' = (x' \bullet y')'$ реле Z, последовательно соединенного с размыкающими контактами x' и y' реле X и Y (см. рис. 3).

Равенство [*2.11] утверждает, что параллельное соединение $x + x'$ замыкающего x и размыкающего x' контактов представляет собой постоянно замкнутую цепь с бесконечно большой проводимостью.

Равенство [*2.11]' утверждает, что последовательное соединение тех же контактов представляет собой постоянно разомкнутую цепь, т. е. схема $x' \bullet x$ равна схеме, проводимость которой тождественно равна нулю.

Приведенных примеров, повидимому, достаточно для того, чтобы читатель мог сам построить релейно-контактные схемы для выраже-

ний, встречающихся в остальных равенствах п. 10 и даже, более того, для любой формулы исчисления предложений, например, для любой формулы, встречающейся в первой части Principia mathematica.

Мы можем, таким образом, для каждой формулы исчисления предложений построить электрическую схему, являющуюся моделью этой формулы; моделью в том смысле, что проводимость построенной схемы будет вырожденной функцией предложения, символически записанного посредством этой формулы. Проводимость этой схемы будет бесконечно велика, когда моделируемое схемой предложение истинно, и равна нулю, когда это предложение ложно.

14. Возможность представления *любой* характеристической функции $\omega_\alpha(p)$ предложения p в нормальных формах интересна потому, что все члены выражений этих формул связаны только двумя операциями:

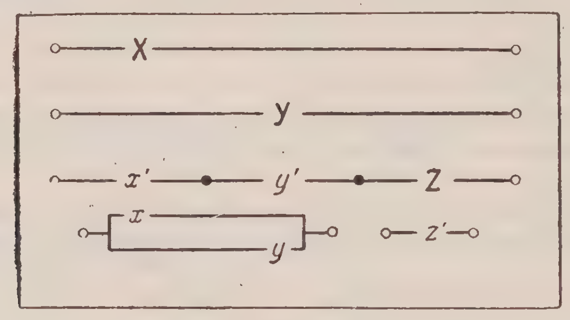


Рис. 3

сложения и гармонического сложения, а эти операции, как мы знаем, можно физически осуществить посредством последовательного и параллельного соединения проводников. Вырожденные функции $[p]$, $[\sim p]$ должны при этом рассматриваться как символы контактов, замыкаемых тогда и только тогда, когда верны, соответственно, предложения p и $\sim p$.

I-я нормальная форма характеристической функции $\omega_\alpha(p)$ должна интерпретироваться как проводимость схемы $\omega \bullet [p] + \alpha \bullet [p]$, представляющей собой параллельное соединение замыкающего контакта $[p]$, последовательно соединенного с проводником с проводимостью ω, с размыкающим контактом $[p]'$, последовательно соединенным с проводником, проводимость которого равна α.

II-я нормальная форма той же характеристической функции должна интерпретироваться как проводимость схемы $(\omega + [p]') \bullet (\alpha + [p])$, представляющей собой последовательное соединение размыкающего контакта $[p]'$, шунтированного проводимостью ω, с замыкающим контактом $[p]$, шунтированным проводимостью α.

Вместо предложения p мы можем представлять любую формулу исчисления предложений и, следовательно, мы можем для любой формулы исчисления предложений построить две схемы, являющиеся ее

моделями; моделями в том смысле, что проводимости этих схем будут характеристическими функциями предложения, символически выраженного этой формулой. Проводимость такой схемы-модели будет равна ω, когда моделируемое рассматриваемой схемой предложение истинно, и равна α, когда это предложение ложно.

Для переменного тока проводимости ω и α могут быть сделаны любыми комплексными величинами, так что для каждой формулы исчисления предложений можно построить две схемы, проводимости которых для переменного тока некоторой фиксированной частоты описывалась бы любой, наперед заданной характеристической функцией предложения, символически записанного посредством этой формулы.

Глава II

Характеристические функции n-значной логики

1. В этой главе мы будем применять буквы p, q, r для обозначения предложений n-значной логики, т. е. таких предложений, которые могут иметь n различных значений истинности (truth values):

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}.$$

Предложение «p имеет значение истинности a_i», где $i = 0, 1, \ldots, n-1$, условимся обозначать символом $\vdash_i p$, т. е. положим по определению:

$$\vdash_i p. = .p \text{ имеет значение истинности } a_i. \qquad \text{D10.}$$

Это предложение является предложением в обычном смысле этого слова, ибо оно может быть только либо истиной (когда p действительно имеет значение a_i), либо ложью (когда p в действительности имеет какое-то другое значение a_j). Вместе с тем $\vdash_i p$ является также и предложением той n-значной логики, к которой принадлежит предложение p.

Характеристической функцией предложения p будем называть любую функцию, областью значений которой является множество $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ каких-либо n элементов v_i, а областью существования — совокупность всех значений истинности a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, возможных в n-значной логике. Будем обозначать эту функцию символом $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p)$, т. е. положим по определению:

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p) = \left\{\begin{array}{lll} v_0 & \text{если} & \vdash_0 p, \\ v_1 & \text{если} & \vdash_1 p, \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1} & \text{если} & \vdash_{n-1} p. \end{array}\right\} \qquad \text{D11}$$

Частный случай этой функции, получаемой при замене всех ее значений v_i соответственно натуральными числами i, условимся называть *натуральной функцией предложения* p и обозначать символом $N_n(p)$, т. е. положим по определению:

$$N_n(p) = \{0, 1, \ldots, n-1\}(p). \qquad \text{D12}$$

2. В обычной логике $n=2$ и возможны поэтому только два значения истинности: a_0 и a_1, так что если одна из этих букв обозначает истину, то другая должна обозначать ложь.

В качестве символов истины и лжи в английской литературе обычно принято применять соответственно буквы T и F.

Отождествляя a_1 с T, мы, на основании D 9 и D 10, имеем

$$\vdash_1 p = \vdash p,$$

т. е. предложение $\vdash_1 p$ получает смысл утверждения истинности предложения p, а предложение $\vdash_0 p$ должно иметь тогда смысл утверждения ложности предложения p и, следовательно, мы получим тогда формулу

$$\vdash_0 p \equiv . \, p \equiv F \qquad \text{D 9}'$$

«дополнительную» к формуле

$$\vdash p \equiv . \, p \equiv T,$$

являющейся непосредственным следствием определения D9.

В двухзначной логике утверждение ложности предложения p эквивалентно отрицанию его истинности или, еще проще, отрицанию самого предложения p, т. е. предложению $\sim p$. Символически это можно выразить посредством следующих эквивалентностей:

$$\vdash_0 p . \equiv . \sim \vdash p . \equiv . \sim p,$$

которые справедливы, конечно, только в том случае, если p является предложением двухзначной логики.

Характеристические функции двухзначной логики, рассматривавшиеся нами в I-й главе, являются частными случаями характеристической функции, определенной здесь. Именно, если мы отождествим a_1 с T и, следовательно, a_0 с F, то, очевидно, получим следующее равенство:

$$\omega_\alpha(p) = \{\alpha, \omega\}(p) \qquad \text{(II.3)}$$

и, в частности, равенства

$$[p] = \{0, \infty\}(p), \qquad \text{(II.3}'\text{)}$$

$$1(p) = \{0, 1\}(p). \qquad \text{(II.3}_1\text{)}$$

Единичная функция предложения p является, стало быть, частным случаем натуральной функции предложения

$$1(p) = N_2(p).$$

3. Так как предложение p в n-значной логике должно обязательно иметь какое-нибудь одно из n значений: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и так как все эти значения различны, то справедливы предложения:

$$\vdash_0 p . \vee . \vdash_1 p . \vee . \cdots . \vdash_{n-1} p . \equiv . T, \qquad \text{(II.4)}$$

$$i \neq j . \supset : \vdash_i p . \vdash_j p . \equiv . F, \qquad \text{(II.5)}$$

из которых следуют равенства

$$\sum_{i=0}^{n-1} 1(\vdash_i p) = 1, \qquad \text{(II.6)}$$

$$1(\vdash_i p) \cdot 1(\vdash_j p) = \delta_{ij}, \tag{II.7}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, т. е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Воспользовавшись этими равенствами, легко доказать, что предложение $\sim\vdash_j p$ является отрицанием логической суммы всех остальных предложений этого вида, т. е. что

$$\sim\vdash_j p. \equiv : \vdash_0 p. \vee . \vdash_1 p. \vee . \cdots . \vee . \vdash_{j-1} p. \vee . \vdash_{j+1} p. \vee . \cdots . \vee . \vdash_{n-1} p. \tag{II.8}$$

Действительно, применяя последовательно (20′), D6, (II.6) и (23_0), получим цепь равенств

$$1(\sim\vdash_j p) = \overline{1}(\vdash_j p) = 1 - 1(\vdash_j p) = \sum_{i=0}^{n-1} 1(\vdash_i p) - 1(\vdash_j p) =$$
$$= \sum_{i=0}^{j-1} 1(\vdash_i p) + \sum_{i=j+1}^{n-1} 1(\vdash_i p) =$$
$$= 1(\vdash_0 p. \vee . \vdash_1 p. \vee . \cdots . \vee . \vdash_{j-1} p. \vee . \vdash_{j+1} p. \cdots . \vee . \vdash_{n-1} p),$$

из которой следует эквивалентность (II.8).

4. Легко доказать, что всякую характеристическую функцию $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p)$ можно представить в форме $\sum_{i=0}^{n-1} v_i \times 1(\vdash_i p)$, которую мы будем называть *канонической формой* этой характеристической функции. Иначе говоря, для всякой характеристической фукции предложения n-значной логики справедливо равенство

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \times 1(\vdash_i p). \tag{II.9}$$

Действительно, если p имеет значение a_i, т. е., если $\vdash_i p$, то $1(\vdash_i p) = 1$ и $1(\vdash_j p) = 0$ для всякого $j \neq i$, а потому все члены суммы $\sum_{j=0}^{n-1} v_j \times 1(\vdash_j p)$ исчезают за исключением i-го, который будет равен v_i, как это и должно быть, когда $\vdash_i p$.

Из только что доказанного равенства следует, на основании (16), равенство

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \bullet [\vdash_i p], \qquad (\text{II}.10_\text{I})$$

где $\bullet$ — знак гармонического сложения.

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, условимся называть I-*й нормальной формой* характеристической функции предложения p.

Нетрудно доказать также и равенство

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p) = \prod_{i=0}^{n-1} \bullet (v_i + [\sim \vdash_i p]), \qquad (\text{II}.10_\text{II})$$

где $\prod_{i=0}^{n-1} \bullet$ — знак гармонической суммы, определяемый формально посредством равенства

$$\prod_{i=0}^{n-1} \bullet X_i = \left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^{-1}\right)^{-1}. \qquad \text{D 13}$$

Действительно, если верно предложение $\vdash_j p$, где j — любое из чисел $0, 1, \ldots, n-1$, то $[\sim \vdash_j p] = 0$ и $[\sim \vdash_i p] = \infty$ для всякого $i \neq j$. Поэтому

$$v_j + [\sim \vdash_j p] = v_j + 0 = v_j,$$
$$v_i + [\sim \vdash_i p] = v_i + \infty = \infty$$

для всякого $i \neq j$, а потому

$$\prod_{i=0}^{n-1} \bullet (v_i + [\sim \vdash_i p]) = \infty \bullet \infty \bullet \ldots \bullet \infty \bullet v_j \bullet \infty \bullet \ldots \bullet \infty.$$

Но последнее выражение, в силу (8), равно v_j, т. е. равно значению характеристической функции $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p)$ при $\vdash_j p$.

Выражение, стоящее в правой части равенства (II.10_II), будем называть II-*й нормальной формой* характеристической функции $\{v_0, v_1, \ldots, \ldots, v_{n-1}\}(p)$.

Итак, *всякую характеристическую функцию* $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p)$ *предложения* p *n-значной логики мы можем представить через характеристические функции двухзначной логики.*

Мы можем «разложить ее в ряд» либо по единичным функциям $1(\vdash_i p)$, т. е. представить ее в *канонической форме*, либо по вырожденным функциям $[\vdash_i p]$ предложений $\vdash_i p$, т. е. представить ее в I-*й нормальной форме*.

Мы можем, наконец, представить ее в виде гармонической суммы $\prod_{i=0}^{n-1} \bullet (v_i + [\sim \vdash_i p])$, т. е. во II-*й нормальной форме*.

5. D. L. Webb ([5]) показал, что *любая* операция n-значной логики может быть порождена посредством итерации одной бинарной операции

$p|q$, где p и q — какие-нибудь предложения этой логики. Эта операция определяется следующими условиями:

$$\left.\begin{aligned} a_i|a_i &= a_{i+1} \quad (i=0,1,\ldots,n-2), \\ a_{n-1}|a_{n-1} &= a_0, \\ a_i|a_j &= a_0 \quad (i \neq j). \end{aligned}\right\} \qquad \text{D 14}$$

Мы будем называть эту операцию операцией Вебба. В случае $n=2$ операция Вебба совпадает, очевидно, с операцией Шеффера (6).

Из определения D 14 следуют эквивалентности:

$$\vdash_{i+1}(p|q) . \equiv . \vdash_i p . \vdash_i q \text{ при } i=0,1,\ldots,n-2 \qquad \text{(II.11)}$$

$$\vdash_0(p|q) . \equiv . \vdash_{n-1} p . \vdash_{n-1} q . \vee . \vdash_0 p . \sim \vdash_0 q . \vee \cdots . \vee . \vdash_i p . \sim \sim \vdash_i q . \vee \cdots . \vdash_{n-1} p . \sim \vdash_{n-1} q, \qquad \text{(II.12)}$$

из которых, на основании (1), (7), (11) и (4), получаем равенства

$$[\vdash_i(p|q)] = [\vdash_{i-1} p] \bullet [\vdash_{i-1} q] \quad (i=1,2,\ldots,n-1), \qquad \text{(II.13)}$$

$$[\vdash_0(p|q)] = [\vdash_{n-1} p] \bullet [\vdash_{n-1} q] + \sum_{i=0}^{n-1} [\vdash_i p] \bullet [\vdash_i q]'; \qquad \text{(II.14)}$$

подставив правые части этих равенств в I-ю нормальную форму характеристической функции операции Вебба, получаем равенство

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p|q) = v_0 \bullet \left([\vdash_{n-1} p] \bullet [\vdash_{n-1} q] + \sum_{i=0}^{n-1} [\vdash_i p] \bullet [\vdash_i q]'\right) + + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \bullet [\vdash_{i-1} p] \bullet [\vdash_{i-1} q]. \qquad \text{(II.15}_\text{I}\text{)}$$

В частности, для натуральной функции операции Вебба получаем значительно более простое равенство:

$$N_n(p|q) = \sum_{i=1}^{n-1} i \bullet [\vdash_{i-1} p] \bullet [\vdash_{i-1} q]. \qquad \text{(II.15}_0\text{)}$$

Если бы мы подставили правые части равенств (II.13), (II.14) во II-ю нормальную форму характеристической функции операции Вебба, то получили бы другое выражение для характеристической функции операции Вебба, которое мы не выписываем здесь потому, что оно не имеет никаких преимуществ по сравнению с уже написанным выражением.

Выражение характеристической функции операции Вебба через единичные функции предложений $\vdash_i p$, $\vdash_i q$ легко получить из уже найденного выражения той же функции через вырожденные функции тех же предложений. Для этого достаточно заменить в (II.15$_\text{I}$) вырожденные функции предложений единичными функциями тех же предложений и знаки гармонического сложения и инверсии соответственно знаками умножения и дополнения до единицы.

Произведя такую замену в (II.15$_\text{I}$) получим равенство

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p\,|\,q) = v \times \Big(1(\vdash_{n-1} p) \times 1(\vdash_{n-1} q) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} 1(\vdash_i p) \times \bar{1}(\vdash_i q) \Big) + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \times 1(\vdash_{i-1} p) \times 1(\vdash_{i-1} q), \quad \text{(II.16)}$$

откуда, в частности, следует

$$N_n(p\,|\,q) = \sum_{i=1}^{n-1} i \times 1(\vdash_{i-1} p) \times 1(\vdash_{i-1} q).$$

Формулы (II.15$_{\text{I}}$) и (II.16) дают возможность построить выражения любой характеристической функции любой операции $f(p, q, \ldots)$ n-значной логики через вырожденные или через единичные функции предложений $\vdash_i p$, $\vdash_j q, \ldots$, ибо всякая операция n-значной логики может быть порождена посредством итерации операции Вебба.

Возможность эта, конечно, только принципиальная, так как выражения большинства операций n-значной логики через операцию Вебба настолько сложны, что практически невозможно этими выражениями пользоваться.

6. Значительно более практичным был бы метод, который давал бы возможность конструировать выражения любой характеристической функции любой операции $f(p, q, \ldots)$ n-значной логики через единичные или вырожденные функции предложений $\vdash_i p$, $\vdash_j q, \ldots$ непосредственно по заданной таблице значений истинности (truth values) этой операции.

Такой метод существует. Прежде чем излагать его в общем виде, покажем на примере, как, пользуясь этим методом, можно построить выражение характеристической функции какой-нибудь операции, заданной посредством таблицы значений истинности.

Пусть задана, например, операция $p\psi q$ посредством табл. 1. Из этой таблицы следуют эквивалентности:

Табл. 1

p	q	$p\psi q$
a_0	a_0	a_1
a_0	a_1	a_0
a_0	a_2	a_2
a_1	a_0	u_0
a_1	a_1	a_0
a_1	a_2	a_2
a_2	a_0	a_2
a_2	a_1	a_2
a_2	a_2	a_2

$$\vdash_0 (p\psi q) . \equiv : \vdash_0 p . \vdash_1 q . \vee . \vdash_1 . p . \vdash_0 q . \vee . \vdash_1 p . \vdash_1 q,$$
$$\vdash_1 (p\psi q) . \equiv . \vdash_0 p . \vdash_0 q,$$
$$\vdash_2 (p\psi q) . \equiv : \vdash_0 p . \vdash_2 q . \vee . \vdash_2 p . \vdash_0 q . \vee .$$
$$. \vdash_1 p . \vdash_2 q . \vee . \vdash_2 p . \vdash_1 q . \vee . \vdash_2 p . \vdash_2 q .$$

Максимально упрощая правые части этих эквивалентностей, получаем формулы:

$$\vdash_0 (p\psi q) . \equiv : \vdash_1 p . \sim (\vdash_2 q) . \vee . \sim (\vdash_2 p) . \vdash_1 q, \qquad (II.17_0)$$
$$\vdash_1 (p\psi q) . \equiv . \vdash_0 p . \vdash_0 q, \qquad (II.17_1)$$
$$\vdash_2 (p\psi q) . \equiv : \vdash_2 p . \vee . \vdash_2 q . \qquad (II.17_2)$$

На основании (1), (7), (11) и (4), из этих эквивалентностей следуют равенства:

$$[\vdash_0 (p\psi q)] = [\vdash_1 p] \bullet [\vdash_2 q]' + [\vdash_2 p]' \bullet [\vdash_1 q], \qquad (II.17_0')$$
$$[\vdash_1 (p\psi q)] = [\vdash_0 p] \bullet [\vdash_0 q], \qquad (II.17_1')$$
$$[\vdash_2 (p\psi q)] = [\vdash_2 p] + [\vdash_2 q], \qquad (II.17_2')$$

в силу которых

$$\{v_0, v_1, v_2\} (p\psi q) = v_0 \bullet ([\vdash_1 p] \bullet [\vdash_2 q]' + [\vdash_2 p]' \bullet [\vdash_1 q]) + + v_1 \bullet [\vdash_0 p] \bullet [\vdash_0 q] + v_2 \bullet ([\vdash_2 p] + [\vdash_2 q]). \qquad (II.18)$$

Метод построения характеристической функции любой операции, заданной посредством таблицы значений истинности, заключается, таким образом, в следующем:

1) из заданной таблицы для операции $f(p, q, \ldots)$, находим, как предложения $\vdash_k f(p, q, \ldots)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ выражаются через предложения $\vdash_i p$, $\vdash_j q, \ldots$;

2) из полученных выражений, члены которых связаны знаками только трех операций: ., $\vee$ и $\sim$ получаем выражения для вырожденных или единичных функций предложений $\vdash_k f(p, q, \ldots)$, представленные соответственно через вырожденные или единичные функции предложений $\vdash_i p$, $\vdash_j q, \ldots$;

3) подставляя полученные выражения для вырожденных (единичных) функций предложений $\vdash_k f(p, q, \ldots)$ в нормальную (каноническую) форму характеристической функции операции $f(p, q, \ldots)$, находим искомое выражение этой функции через вырожденные (единичные) функции предложений $\vdash_i p$, $\vdash_j q, \ldots$

7. Возможность представления любой характеристической функции любой операции n-значной логики посредством выражения, члены которого связаны друг с другом только операциями обычного сложения и гармонического сложения, интересна потому, что эти операции как раз такие, которые могут быть реализованы посредством электрических схем.

Действительно, если рассматривать члены этого выражения как символы проводимостей проводников, то знаки сложения $(+)$ и гармонического сложения $(\bullet)$ можно рассматривать, соответственно, как символы параллельного и последовательного соединения проводников. Вырожденные функции $[\vdash_i p]$, $[\vdash_i p]'$ предложения $\vdash_i p$ должны интерпретироваться при этом как символы проводимостей контактов: замыкаемого и размыкаемого, соответственно, тогда и только тогда, когда верно это предложение. Самое же предложение $\vdash_i p$ можно считать при этом имеющим смысл: «n-позиционный переключатель

(или n-позиционное реле) находится в i-ой позиции». Предложения $\vdash_j q$, $\vdash_k r$, ... естественно считать тогда имеющими аналогичный смысл.

Заметим, что в силу равенства

$$[\vdash_i p]' = \sum_{j=0}^{i-1} [\vdash_j p] + \sum_{j=i+j}^{n-1} [\vdash_j p],$$

изоморфного равенству (II. 8), размыкающие контакты в n-позиционных релейно-контактных схемах могут быть заменены параллельными соединениями замыкающих контактов и, таким образом, размыкающие контакты всегда могут быть элиминированы.

Итак, любая операция n-значного исчисления предложений может быть изоморфно реализована (моделирована) посредством некоторой релейно-контактной схемы, построенной из проводников с конечными проводимостями v_i и контактов n-позиционных реле или переключателей. Проводимости v_i могут быть любыми комплексными величинами, так что мы можем построить для каждого предложения p n-значной логики схему, проводимость которой для переменного тока некоторой фиксированной частоты описывалась бы действительно любой наперед заданной характеристической функцией $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}(p)$.

Поступило
18. V. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Whithehead A. N. and Russel B., Principia mathematica, vol I, Cambridge, Engl., 1910.

[2] Шестаков В. И., Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра A-схем), Ж. Т. Ф., т. XI, вып. 6, 1941.

[3] Шестаков В. И., Об одном символическом исчислении, применимом к теории релейных электрических схем, Уч. записки МГУ, вып. XXIII, кн. 5-я (математика).

Жегалкин И. И., О технике вычислений предложений в символической логике, Мат. сборн., т. 34 (1927), 9—28.

[5] Webb D. L., Generation of any n-valued logic by one binary operation Proc N. A. S. vol. 21 (1935), 252—255.

[6] Sheffer H. M., A set of five postulates for Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 14 (1913), 481—488.

V. SHESTAKOV. REPRESENTATION OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROPOSITIONS BY EXPRESSIONS REALIZABLE BY RELAY-CONTACT CIRCUITS

SUMMARY

I. Characteristic functions of propositions of the two-valued logic

Every characteristic function $\omega_\alpha(p)$ of the proposition p defined by the equalities:

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_\alpha(p) = \omega & \text{if } p \text{ is true,} \\ \omega_\alpha(p) = \alpha & \text{if } p \text{ is false,} \end{array}\right\} \qquad \text{D1}$$

can be expressed through the *degenerate function*

$$[p] = \infty_0(p) \qquad \text{D2}$$

by means of the expressions:

$$\omega \bullet [p] + \alpha \bullet [p]', \tag{I}$$

$$(\omega + [p]') \bullet (\alpha + [p]), \tag{II}$$

where the accent ′ denotes inversion;

$$X' = X^{-1}, \tag{D3}$$

and the thick point • denotes *harmonic addition*:

$$X \bullet Y = (X^{-1} + Y^{-1})^{-1}. \tag{D4}$$

Making use of the equalites obtained in the paper

$$[\sim p] = [p]', \tag{1}$$

$$[p \vee q] = [p] + [q], \tag{2}$$

$$[p . q] = [p] \bullet [q], \tag{3}$$

every characteristic function of any operation of the calculus of propositions can be expressed through ω, α *and degenerate functions of the propositions* $p, q, \ldots$ *by the formulae containing only the operations of inversion, addition and harmonic addition.*

If the terms of the formulae are considered as symbols of conductivities of conductors, then the addition and the harmonic addition may be considered respectively, as symbols of parallel connection and of series connection of the conductors. Degenerate functions $[p]$, $[p]'$ must thereby be interpreted as symbol of conductivities of locking and breaking contacts, respectively, provided the proposition p is true. Substituting for p any formula $f(p, q, \ldots)$ of the calculus of propositions and using the formulae (1)—(3), we can obtain from the normal forms (I), (II) of the characteristic function $\omega_\alpha(p)$ of the proposition p the formula for the structure of the circuit diagram the conductivity of which is the characteristic function $\omega_\alpha(f(p, q, \ldots))$ of the proposition $f(p, q, \ldots)$, substituted for p.

We can construct a circuit modelling any operation of the calculus of operations in the sense that the conductivity of the circuit is ω or α, according as the proposition modelled by the circuit is true or false.

In the case of alternate circuit of finite fixed frequency the conductivities can take on any complex values and therefore we can realize every characteristic function of any operation of the calculus of propositions by a circuit diagram.

II. Characteristic function of the n-valued logic

The characteristic function of a proposition p of the n-valued logic defined by the set of n-propositions of the form

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}\ (p) = v_i \quad \text{if} \quad \vdash_i p,$$

where $\vdash_i p = (p$ has the truth value $a_i)$, can be expressed through the degenerate functions of the propositions $\vdash_i p$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ by means of the expressions:

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_i \bullet \vdash_i p], \tag{III}$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} \bullet (v_i + [\vdash_i p]), \tag{IV}$$

where

$$\prod_{i=0}^{n-1} \bullet X_i = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^{-1} \Big)^{-1}.$$

As D. L. Webb has shown, any n-valued logic can be generated by iterating the operation $p|q$ defined by the conditions:

$$\left.\begin{aligned} a_i \,|\, a_i &= a_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2), \\ a_{n-1} \,|\, a_{n-1} &= a_0, \\ a_j \,|\, a_j &= a_0 \quad (i \neq j). \end{aligned}\right\} \tag{D5}$$

Hence if we replace the proposition p in (III), (IV) by Webb's operation, we obtain the expressions that enable us to represent any characteristic function *of any operation of the n-valued logic* by the formulae whose terms are connected only by physically realizable operations of addition, harmonic addition and inversion.

The possibility to represent every characteristic function of any operation of the n-valued logic by degenerate functions of the propositions $\vdash_i p$, $\vdash_j q$ implies that it is possible to realize the circuit diagram modelling any operations of the n-valued logic.

For, if we consider the terms of the expression of any operation of the n-valued logic through the functions of $\vdash_i p$, $\vdash_j q$ as symbols of conductivities, then the signs $+$ and $\bullet$ can be considered respectively as symbol of parallel connection and of series connection of the conductors. Degenerate functions $[\vdash_i p]$, $[\vdash_i p]'$ of the proposition $\vdash_i p$ must be interpreted thereby as symbols of conductivities of locking and breaking contacts, respectively, if, and only if, $\vdash_i p$ is true. The proposition $\vdash_i p$ itself can be supposed, for instance, to have the sense „the n-position relay P (or the n-position switch) is in the i-th position".

Thus any operation of an n-valued calculus of propositions can be isomorphically realized (modelled) by a relay-contacts circuit composed by conductors with finite conductivities v_i and contacts of the n-position relays or switches.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМОВ
1—10

Рядом с наименованием каждой статьи указывается номер тома, год издания и страницы тома, на которых напечатана данная статья. При этом следует иметь в виду, что (см. т. 4, стр. 3)

№№ 1—4 (стр. 1—636) за 1937 год составляют том 1,
№№ 1—6 (стр. 1—628) за 1938 год составляют том 2,
№№ 1—6 (стр. 1—652) за 1939 год составляют том 3.

Критика и библиография

INDEX DES TOMES 1—10

A côté du titre de chaque article on indique le numéro du tome, l'année de la publication et les pages du tome, sur lesquelles est imprimé l'article. D'ailleurs il est à noter que (cf. vol. 4, p. 4).

NN 1—4 (pp. 1—636), 1937 constituent le tome 1,
NN 1—6 (pp. 1—628), 1938 constituent le tome 2,
NN 1—6 (pp. 1—652), 1939 constituent le tome 3.

* * *

Critique et bibliographie

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 10

TABLE DES MATIÈRES DU TOME 10

Член редколлегии проф. *Б. И. Сегал*

Подписано к печати 21.XII 1946 г. А 13944
Объем 4 печ. л., уч.-изд. л. 6,25, Тираж 2500 экз.
Цена 9 руб. Заказ 1131

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный, 9.